Aula 6. Conceitos de energia específica, representação e quantificação.

Hidráulica II

Maria M. Gamboa

1° Semestre de 2019. 09/04/2019

Energia (carga) em um canal

Lembrando da equação de Bernoulli para 'energia' (carga).

Energia (carga) em um canal

Lembrando da equação de Bernoulli para 'energia' (carga).

- Carga de velocidade. Com velocidade média na seção, V.

$$\alpha \frac{V^2}{2g} \approx \frac{V^2}{2g}$$

(se distribuição de velocidades aprox. uniforme $\alpha \approx 1$)

Energia (carga) em um canal

Lembrando da equação de Bernoulli para 'energia' (carga).

- Carga de velocidade. Com velocidade média na seção, V.

$$\alpha\frac{V^2}{2g} \approx \frac{V^2}{2g}$$

  (se distribuição de velocidades aprox. uniforme $\alpha \approx 1$)

- Carga de pressão + carga de posição = carga piezométrica = constante se distribuição de pressão hidrostática:

$$Z + y$$

Energia (carga) em um canal

Lembrando da equação de Bernoulli para 'energia' (carga).

- Carga de velocidade. Com velocidade média na seção, V.

$$\alpha\frac{V^2}{2g} \approx \frac{V^2}{2g}$$

  (se distribuição de velocidades aprox. uniforme $\alpha \approx 1$)

- Carga de pressão + carga de posição = carga piezométrica = constante se distribuição de pressão hidrostática:

$$Z + y$$

- Carga total:

$$H = Z + y + \frac{V^2}{2g}$$

Energia (carga) em um canal

Em cada seção do canal: $H = Z + y + \dfrac{V^2}{2g}$

Se uniforme: $\dfrac{\Delta H}{L} = I_f \quad = \quad \dfrac{\Delta Z}{L} = I_0$

Energia (carga) em um canal

$$\text{Em cada seção do canal: } H = Z + y + \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Se uniforme: } \frac{\Delta H}{L} = I_f \quad = \quad \frac{\Delta Z}{L} = I_0$$

Se nível de referência passa a ser fundo do canal:

Energia (carga) em um canal

Em cada seção do canal: $H = Z + y + \dfrac{V^2}{2g}$

Se uniforme: $\dfrac{\Delta H}{L} = I_f \quad = \quad \dfrac{\Delta Z}{L} = I_0$

Se nível de referência passa a ser fundo do canal: $Z = 0$

$$E = y + \frac{V^2}{2g}$$

Energia Específica

Carga total acima do fundo do canal

Energia Especifica

Para canal qualquer* (*com baixa declividade, velocidade aproximadamente uniforme):

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Energia Especifica

Para canal qualquer* (*com baixa declividade, velocidade aproximadamente uniforme):

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Para um canal retangular, definindo vazão unitária $= q = Q/b$:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(by)^2} = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

Energia Especifica

Para canal qualquer* (*com baixa declividade, velocidade aproximadamente uniforme):

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Para um canal retangular, definindo vazão unitária $= q = Q/b$:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(by)^2} = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

Escoando a vazão Q constante, como fica a relação E e y?

Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

- Consideramos somente $y > 0$
  $\rightarrow E > y$. À direita da linha 45^o

Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

- Consideramos somente $y > 0$
  $\rightarrow E > y$. À direita da linha 45^o
- Se $y \rightarrow 0$, $E \rightarrow \inf$
  Assíntota ao eixo E, horizontal

Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

- Consideramos somente $y > 0$
  $\rightarrow E > y$. À direita da linha 45^o
- Se $y \rightarrow 0$, $E \rightarrow \inf$
  Assíntota ao eixo E, horizontal
- Se $y \rightarrow \inf$, $E = y \rightarrow \inf$
  Assíntota à linha 45^o, $E = y$

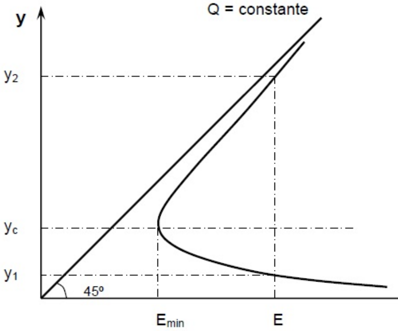
Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

- Consideramos somente $y > 0$ $\rightarrow E > y$. À direita da linha 45^o
- Se $y \rightarrow 0$, $E \rightarrow \inf$
  Assíntota ao eixo E, horizontal
- Se $y \rightarrow \inf$, $E = y \rightarrow \inf$
  Assíntota à linha 45^o, $E = y$



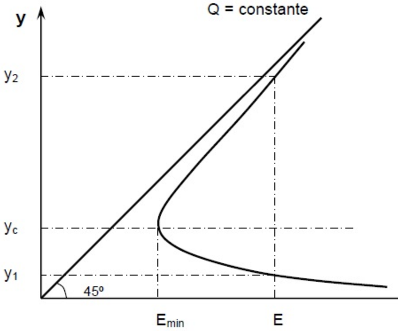
Curva de energia especifica, E vs y

Para canal qualquer*:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(\mathcal{F}[y])^2}$$

Analisando a relação entre y e E:

- Consideramos somente $y > 0$ $\rightarrow E > y$. À direita da linha 45^o
- Se $y \rightarrow 0$, $E \rightarrow \inf$
  Assíntota ao eixo E, horizontal
- Se $y \rightarrow \inf$, $E = y \rightarrow \inf$
  Assíntota à linha 45^o, $E = y$



Diferente Q gera diferente curva, mesmas assintotas.

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Para um valor de E dado, equação cúbica de y, tem três raízes

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Para um valor de E dado, equação cúbica de y, tem três raízes

- $y < 0$: Sem nenhum significado físico

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Para um valor de E dado, equação cúbica de y, tem três raízes

- $y < 0$: Sem nenhum significado físico
- y_1: Vazão q, com energia E, escoando em regime subcrítico

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Para um valor de E dado, equação cúbica de y, tem três raízes

- $y < 0$: Sem nenhum significado físico
- y_1: Vazão q, com energia E, escoando em regime subcrítico
- y_2: Vazão q, com energia E, escoando em regime supercrítico

Curva de energia especifica, E vs y

Analisando em canal retangular (sem perder generalidade), com $q =$ constante:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad \rightarrow \quad y^3 - Ey^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Para um valor de E dado, equação cúbica de y, tem três raízes

- $y < 0$: Sem nenhum significado físico
- y_1: Vazão q, com energia E, escoando em regime subcrítico
- y_2: Vazão q, com energia E, escoando em regime supercrítico
- y_1 e y_2: Alturas alternadas: mesma Q e E com diferente y

Exemplo

Água está escoando com uma velocidade média de $1.0 m/s$ e altura de água $1.0m$ em um canal retangular de $2.0m$ de largura.
Qual é o regime do escoamento (fluvial ou torrencial)?
Qual seria a altura de água se a mesma vazão escoasse pelo mesmo canal com a mesma carga disponível total mas em outro regime?

Exemplo

Água está escoando com uma velocidade média de $1.0m/s$ e altura de água $1.0m$ em um canal retangular de $2.0m$ de largura.
Qual é o regime do escoamento (fluvial ou torrencial)?
Qual seria a altura de água se a mesma vazão escoasse pelo mesmo canal com a mesma carga disponível total mas em outro regime?

Resposta: Pelos dados do prolema: $E = 1.051$
Da equação de energia específica, calculamos as três raízes
$1.0, -0.202, 0.253$
Original: $y_1 = 1.0m$, subcrítico. Alternada: $y_2 = 0.25m$, supercrítico

Curva de energia especifica, y vs q

Se $E =$ constante, pode ser analisada relação entre q e y

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = cte$$
$$q = y\sqrt{2g(E-y)}$$

- Para cada q, duas raízes: y_1 e y_2

Curva de energia especifica, y vs q

Se $E =$ constante, pode ser analisada relação entre q e y

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = cte$$
$$q = y\sqrt{2g(E - y)}$$

- Para cada q, duas raízes: y_1 e y_2
- Se $y \to 0$, $q \to 0$

Curva de energia especifica, y vs q

Se $E =$ constante, pode ser analisada relação entre q e y

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = cte$$
$$q = y\sqrt{2g(E - y)}$$

- Para cada q, duas raízes: y_1 e y_2
- Se $y \to 0$, $q \to 0$
- Se $y \to E$, $q \to 0$

Curva de energia especifica, y vs q

Se $E =$ constante, pode ser analisada relação entre q e y

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = cte$$
$$q = y\sqrt{2g(E - y)}$$

- Para cada q, duas raízes: y_1 e y_2
- Se $y \to 0$, $q \to 0$
- Se $y \to E$, $q \to 0$
- Ponto crítico:

$$y_1 = y_2 = y_c$$
$$q = q_{max}$$

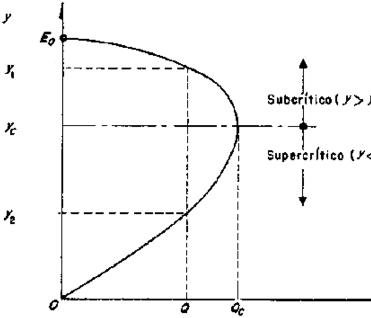
Curva de energia especifica, y vs q

Se $E =$ constante, pode ser analisada relação entre q e y

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = cte$$
$$q = y\sqrt{2g(E-y)}$$

- Para cada q, duas raízes: y_1 e y_2
- Se $y \to 0$, $q \to 0$
- Se $y \to E$, $q \to 0$
- Ponto crítico:

$$y_1 = y_2 = y_c$$
$$q = q_{max}$$



Escoamento crítico

Ponto crítico:

- Mínimo E para $q = cte$, ou
- máximo q para $E = cte$

- No ponto crítico:

  $y_1 = y_2 = y_c =$ altura crítica

  $E_{min} = E_c$

  $y_c \rightarrow A \rightarrow V_c$

Escoamento crítico

Ponto crítico:

- Mínimo E para $q = cte$, ou
- máximo q para $E = cte$

- No ponto crítico:

  $y_1 = y_2 = y_c =$ altura crítica

  $E_{min} = E_c$

  $y_c \rightarrow A \rightarrow V_c$
- $y_1 > y_c\,;\, V < V_c$: escoamento subcrítico, fluvial

Escoamento crítico

Ponto crítico:

- Mínimo E para $q = cte$, ou
- máximo q para $E = cte$
- No ponto crítico:

  $y_1 = y_2 = y_c =$ altura crítica

  $E_{min} = E_c$

  $y_c \rightarrow A \rightarrow V_c$
- $y_1 > y_c\,;\, V < V_c$: escoamento subcrítico, fluvial
- $y_2 < y_c\,;\, V > V_c$: escoamento supercrítico, torrencial

Escoamento crítico

Ponto crítico:

- Mínimo E para $q = cte$, ou
- máximo q para $E = cte$

- No ponto crítico:
  $y_1 = y_2 = y_c =$ altura crítica
  $E_{min} = E_c$
  $y_c \rightarrow A \rightarrow V_c$
- $y_1 > y_c\,;\, V < V_c$: escoamento subcrítico, fluvial
- $y_2 < y_c\,;\, V > V_c$: escoamento supercrítico, torrencial
- $y = y_c\,;\, V = V_c\,;\, E = E_{min}$: escoamento crítico

Escoamento crítico

Ponto crítico: Mínimo E para $q = cte$, ou máximo q para $E = cte$.

Escoamento crítico

Ponto crítico: Mínimo E para $q = cte$, ou máximo q para $E = cte$.

Para achar o ponto crítico da equação de energia específica:

Derivar E : $$\frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{q^2}{2gy^2}\right) = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - \frac{V^2}{gy}$$

Escoamento crítico

Ponto crítico: Mínimo E para $q = cte$, ou máximo q para $E = cte$.

Para achar o ponto crítico da equação de energia específica:

$$\text{Derivar } E: \quad \frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{q^2}{2gy^2}\right) = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - \frac{V^2}{gy}$$

$$\text{Igualar a } 0: \quad 1 = \frac{V^2}{gy} =$$

Escoamento crítico

Ponto crítico: Mínimo E para $q = cte$, ou máximo q para $E = cte$.

Para achar o ponto crítico da equação de energia específica:

$$\text{Derivar } E: \quad \frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{q^2}{2gy^2}\right) = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - \frac{V^2}{gy}$$

$$\text{Igualar a } 0: \quad 1 = \frac{V^2}{gy} = Fr^2$$

Escoamento crítico

Ponto crítico: Mínimo E para $q = cte$, ou máximo q para $E = cte$.

Para achar o ponto crítico da equação de energia específica:

$$\text{Derivar } E: \quad \frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y + \frac{q^2}{2gy^2}\right) = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - \frac{V^2}{gy}$$

$$\text{Igualar a } 0: \quad 1 = \frac{V^2}{gy} = Fr^2$$

Analisando de novo na curva E vs y:

- $\frac{dE}{dy} > 0 \rightarrow Fr < 1$ Ramo superior. Escoam. subcrítico, fluvial
- $\frac{dE}{dy} < 0 \rightarrow Fr > 1$ Ramo inferior. Esc. supercrítico, torrencial
- $\frac{dE}{dy} = 0 \rightarrow Fr = 1$ Ponto de mínima energia. Escoam. crítico

Escoamento crítico

Em canais retangulares, a profundidade crítica y_c depende somente da vazão unitária q

$$Fr^2 = 1 = \frac{q^2}{gy^3} \quad \rightarrow \quad y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Escoamento crítico

Em canais retangulares, a profundidade crítica y_c depende somente da vazão unitária q

$$Fr^2 = 1 = \frac{q^2}{gy^3} \quad \rightarrow \quad y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Nesses canais, y_c é suficiente para calcular E_c e V_c :

$$E_c = \frac{3}{2} y_c$$
$$V_c = \sqrt{g\, y_c}$$

Exercicio

Em um canal retangular de $3.0m$ de largura, declividade de fundo $I_0 = 0.0005$, coeficiente de rugosidade $n = 0.024$, escoa em regime uniforme uma vazão de $3.0m^3/s$.
Determine a energia específica e o tipo de escoamento e, para a vazão dada, a altura crítica, a energia específica crítica e a velocidade crítica.