



Introdução aos Elementos de Máquinas

PMR3320

Aula 4

Eixos



1. Introdução

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado

4. Projeto do Eixo

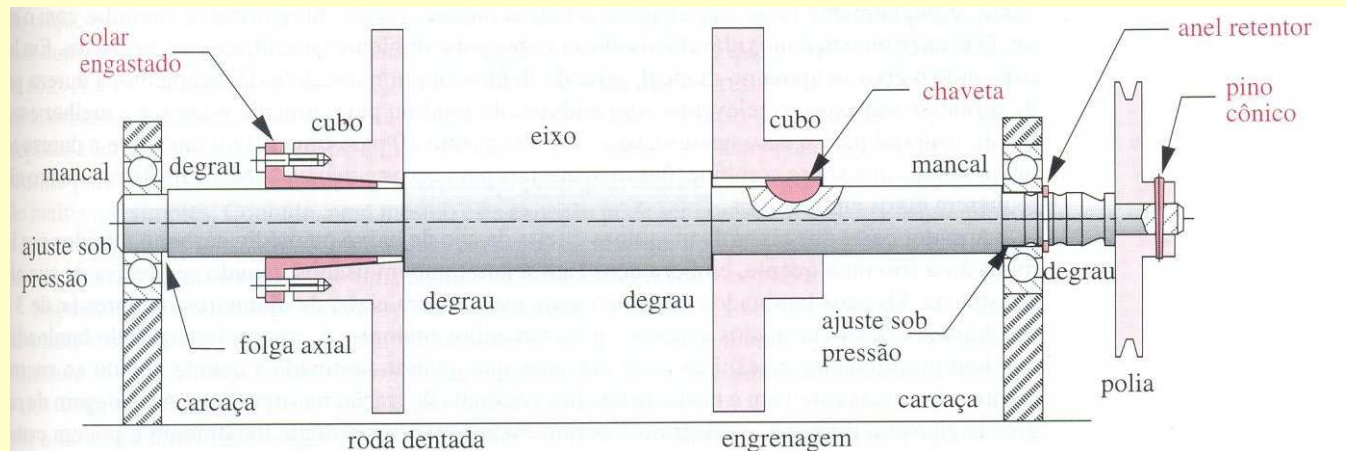
- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

1. Introdução

Eixos de **transmissão** (ou simplesmente eixos)



transmitem rotação e torque



Definição : Elemento sobre o qual se assentam partes giratórias de uma máquina e que recebe destas as cargas de trabalho que devem ser descarregadas na estrutura da máquina.

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

❖ Cargas em Eixos

- ✓ Torção devido ao torque transmitido
- ✓ Flexão devido às cargas transversais (em engrenagens ou polias)



Freqüentemente ocorrem em combinação

Os dois tipos de cargas citadas acima, ainda podem ser de caráter:

- ✓ fixo (constante) \Rightarrow ex.: eixo não rotativo – não transmite torque
- ✓ **variar no tempo**

Trabalharemos com eixos **rotativos** e seu projeto para **cargas de fadiga**

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

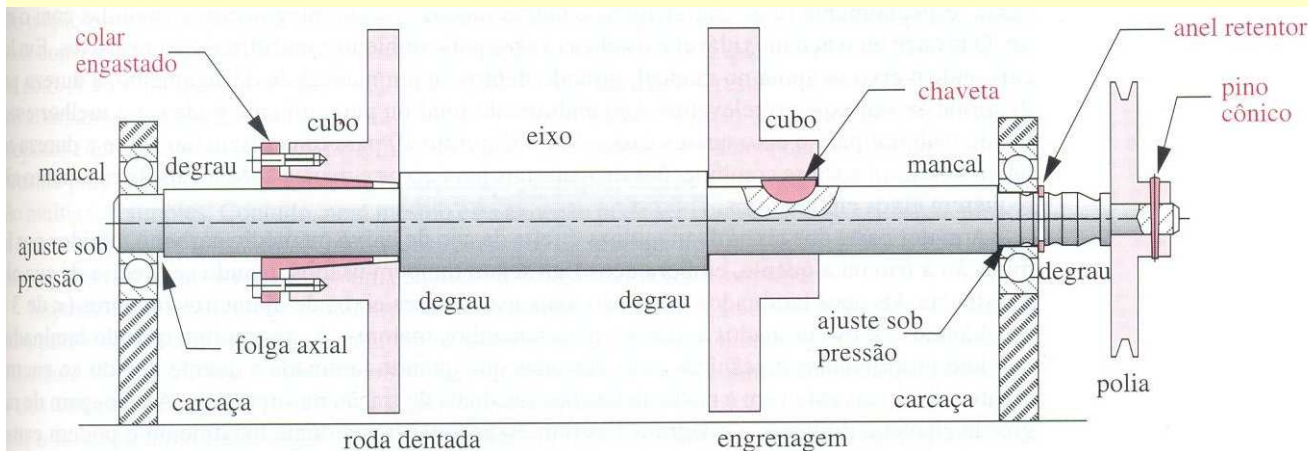
3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

❖ Conexões e Concentração de Tensões

Comum \Rightarrow eixos tenham um número de degraus onde d mude (**escalonado**)

- ✓ **acomodar** elementos fixados (mancais, engrenagens etc.)
- ✓ precisão e **localização** axial dos elementos fixados
- ✓ criar d apropriado para **alojar** peças padronizadas



Consequência: concentração de tensão

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

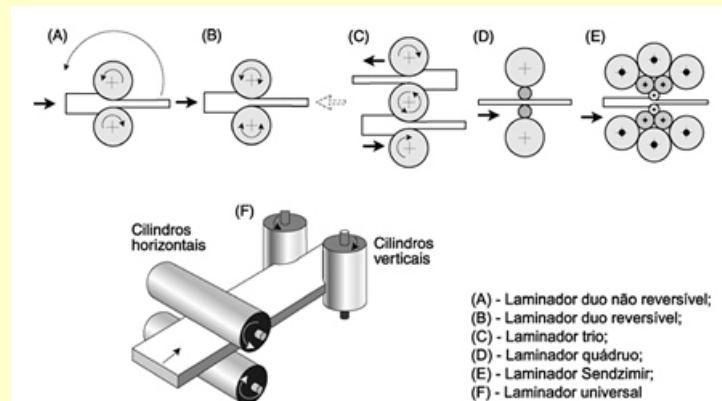
- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

❖ Materiais Para Eixos

- ✓ para minimizar as deflexões: **aço** ($\uparrow E$)
- ✓ ambientes marítimos ou **corrosivos**: **bronze ou aço inoxidável**

❑ maior parte dos eixos é de aço de baixo ou médio carbono, obtido por **laminação a frio** ($d < 3$ in) ou **a quente** ($d > 3$ in)

❑ **aços liga** quando se precisa \uparrow resistência





1. Introdução

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

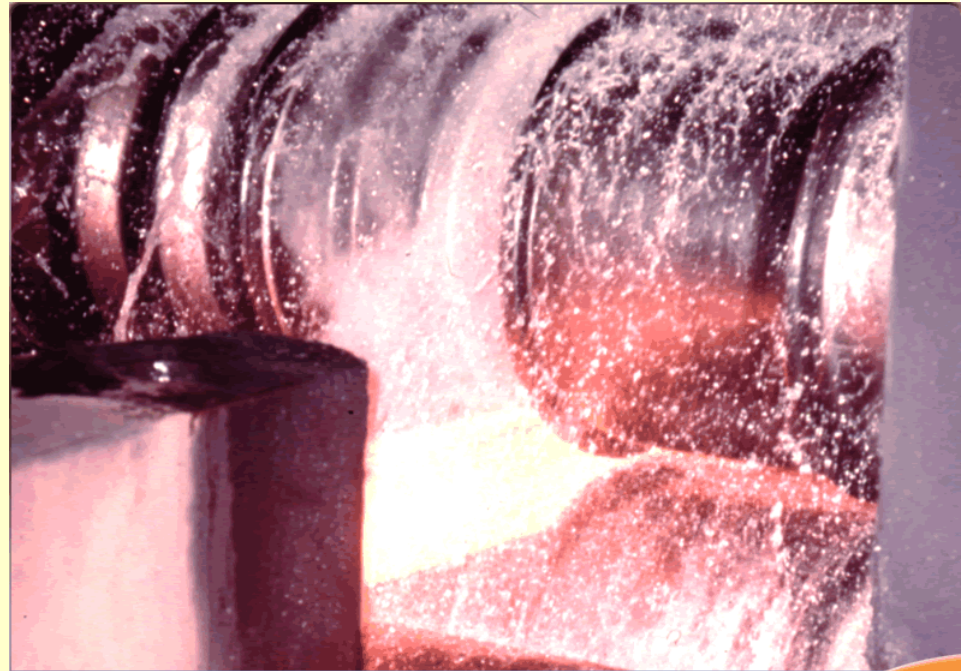
3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado

4. Projeto do Eixo

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II



Laminação



Laminação

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

2. Projeto de Eixos

Precisam ser consideradas tanto as **tensões** quanto as **deflexões** para o projeto do eixo

O eixo é projetado pela **1ª vez**, usando considerações de **tensão**. As deflexões são calculadas após a geometria completamente definida

Outra consideração importante é a **velocidade crítica** (frequência natural)

Eixos comuns → cálculo em **função de σ_{adm}**

- $\sigma \leq \sigma_{adm}$ {
- eixos de redutores de velocidade
 - eixos de laminadores
 - eixos de máquinas de elevação
 - **eixos de transmissão** (**carros** / caminhões)

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

Eixos de precisão → cálculo em **função da deflexão admissível**

$$\sigma_{trab} \ll S_{ut}$$

limitante é deflexão

$$\delta \leq \delta_{adm} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ eixos árvore de máquinas ferramentas} \\ \bullet \text{ aparelhos de metrologia} \end{array} \right.$$

Eixos com rotação elevada → **um dos critérios anteriores + velocidade crítica**

$$\omega < \omega_{crit} \left\{ \begin{array}{ll} \bullet \text{ eixos árvore de retificadoras internas} & : 50000 \text{ [rpm]} \\ \bullet \text{ eixos centrifugadores} & : 30000 \text{ [rpm]} \end{array} \right.$$



1. Introdução <ul style="list-style-type: none">❖ Cargas em Eixos❖ Conexões e Concentração de Tensões❖ Materiais para Eixos	2. Projeto de Eixos <ul style="list-style-type: none">❖ Potência no Eixo❖ Cargas no Eixo❖ Tensões no Eixo	3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado	4. Projeto do Eixo <ul style="list-style-type: none">❖ Situação I❖ Situação II
--	--	---	--

Algumas considerações gerais

Norton, págs. 483 e 484

- o **comprimento** do eixo deve ser mantido o **menor** possível
- usar **viga bi-apoiada** sempre que possível
- eixo **vazado** tem melhor relação **rigidez/massa** e ω_n maior
- **concentradores de tensão** longe das regiões de grandes momentos fletores
- etc.

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

❖ Potência no Eixo

$$P = T \omega$$

$P \Rightarrow$ potência

$T \Rightarrow$ torque

$\omega \Rightarrow$ velocidade angular

❖ Cargas no Eixo

Caso mais geral: **torque variado e momento variado em combinação**

Pode haver cargas axiais (normalmente há!): minimizar a porção de seu comprimento sujeito à cargas axiais, descarregando-as através de mancais axiais o mais próximo da fonte de carga

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

❖ Tensões no Eixo (seção transversal circular)

Tensão de flexão alternada

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a y}{I}$$

$$\sigma_a = K_f \frac{32 M_a}{\pi d^3}$$

Tensão de flexão média

$$\sigma_m = K_{fm} \frac{M_m y}{I}$$

$$\sigma_m = K_{fm} \frac{32 M_m}{\pi d^3}$$

tensão normal

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

Tensão torcional alternada

$$\tau_a = K_{fs} \frac{T_a r}{J}$$

$$\tau_a = K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}$$

Tensão torcional média

$$\tau_m = K_{fsm} \frac{T_m r}{J}$$

$$\tau_m = K_{fsm} \frac{16T_m}{\pi d^3}$$

tensão de cisalhamento

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

Tensão devido á carga axial \Rightarrow apenas componente média

$$\sigma_{m_{axial}} = K_{fm} \frac{F}{A}$$

$$\sigma_{m_{axial}} = K_{fm} \frac{4F}{\pi d^2}$$

tensão normal



1. Introdução

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

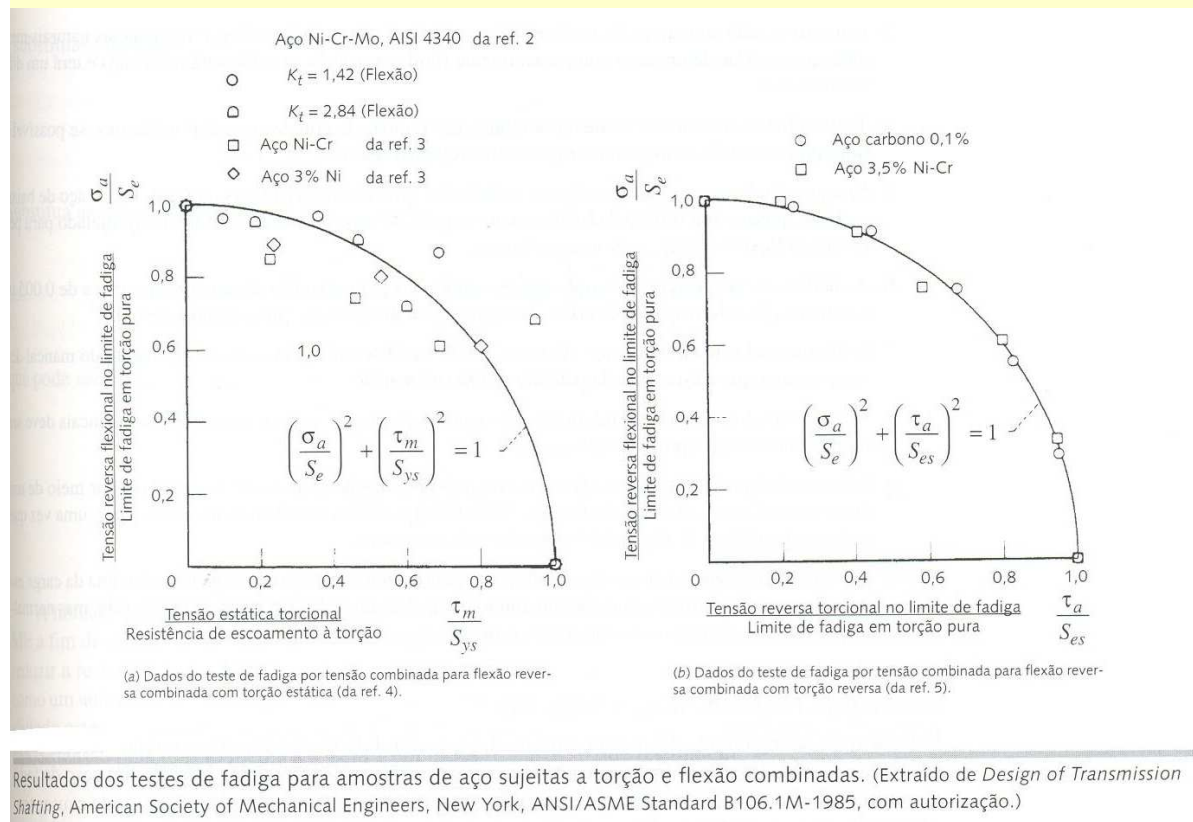
- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado

4. Projeto do Eixo

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado



Estudos de falha por fadiga de aços dúcteis e *fofo* frágeis sob flexão e torção combinados \Rightarrow Davies e Gough e Pollard (Inglaterra 1930).

A combinação de torção e flexão em materiais dúcteis em fadiga segue a relação elíptica como definida pelas equações na figura.

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

4. Projeto do Eixo: situação I

❖ Situação I \Rightarrow flexão alternada ($\sigma_m = 0$) e torção fixa ($\tau_a = 0$)

Método **ASME** \Rightarrow norma ANSI/ASME B106.1M-1985

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{S_{ys}}\right)^2 = 1$$

com

$$\sigma_a = K_f \frac{32 M_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_{fsm} \frac{16 T_m}{\pi d^3}$$

**1. Introdução**

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

Introduzindo um fator de segurança N_f

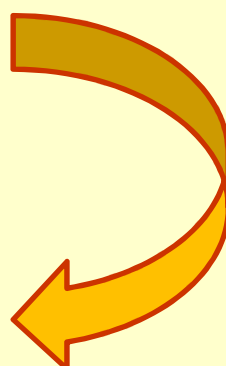
$$\left(N_f \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(N_f \frac{\tau_m}{S_{ys}} \right)^2 = 1$$

com

$$\sigma_a = K_f \frac{32 M_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_{fsm} \frac{16 T_m}{\pi d^3}$$

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$



Págs. 484 e 485
Norton



1. Introdução <ul style="list-style-type: none">❖ Cargas em Eixos❖ Conexões e Concentração de Tensões❖ Materiais para Eixos	2. Projeto de Eixos <ul style="list-style-type: none">❖ Potência no Eixo❖ Cargas no Eixo❖ Tensões no Eixo	3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado	4. Projeto do Eixo <ul style="list-style-type: none">❖ Situação I❖ Situação II
--	--	---	--

Exercício 1:

Projete um eixo para suportar os complementos mostrados na figura do próximo *slide*, com um coeficiente de segurança de projeto mínimo de 2,5.

Este eixo deve transmitir 2 HP a 1725 rpm.

O torque e a força na engrenagem são constantes no tempo.

Será usado aço para obter vida infinita.

Pressuponha um fator de concentração de tensão de 3,5 para o degrau nos raios de flexão, 2,0 para o degrau nos raios em torção e 4,0 nas chavetas.

Aço 1020: $S_{ut} = 65$ kpsi
 $S_y = 38$ kpsi

Dado: 1 HP = 6600 in lb/s



1. Introdução

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

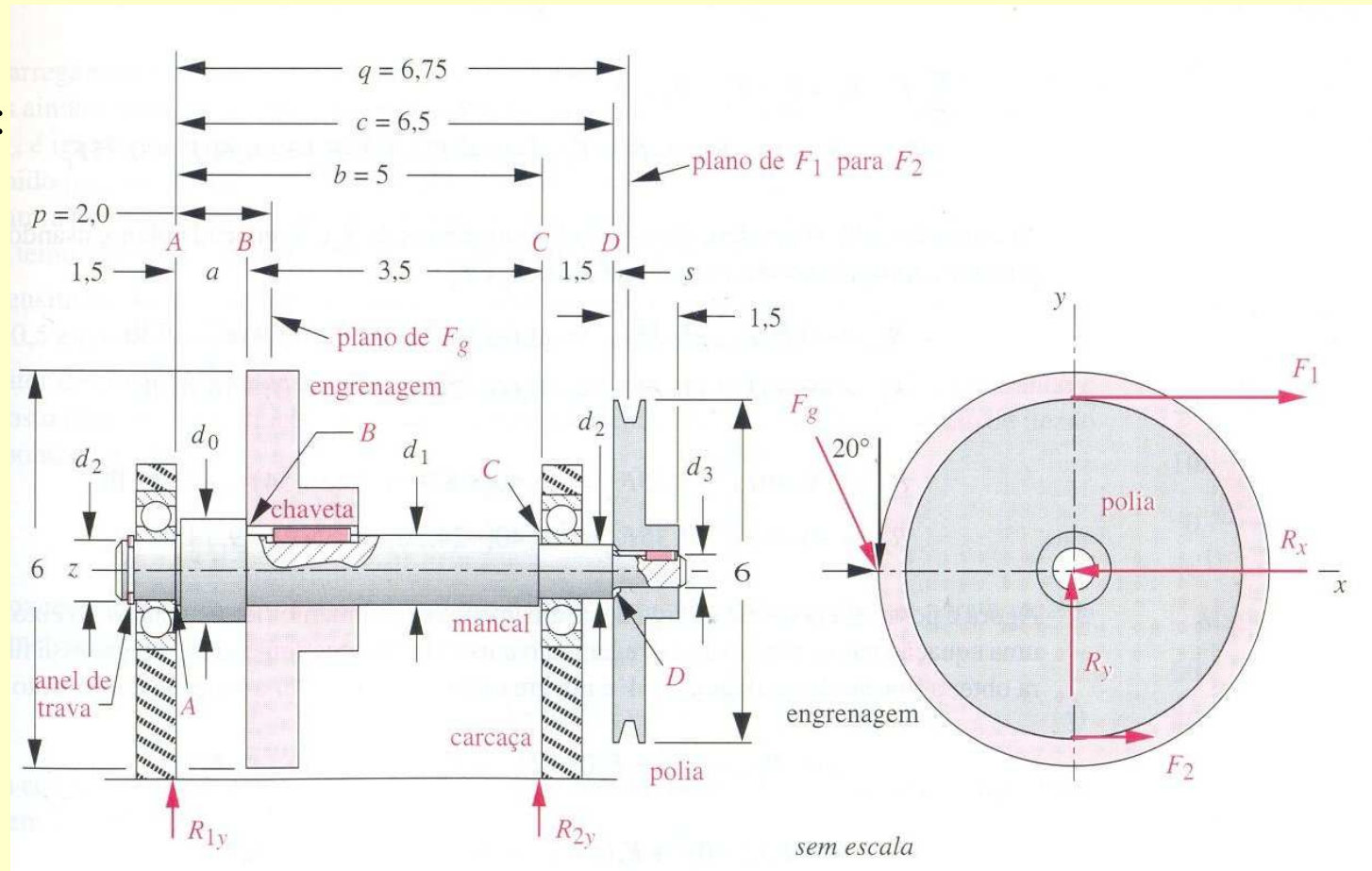
- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado

4. Projeto do Eixo

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

E1 (continuação):





1. Introdução

- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado

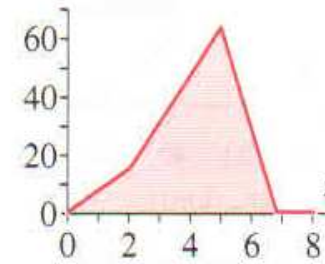
4. Projeto do Eixo

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II

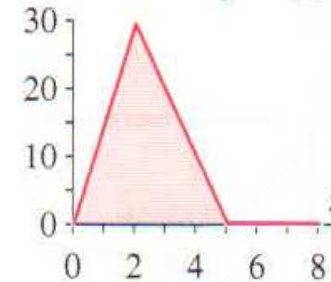
E1 : diagramas



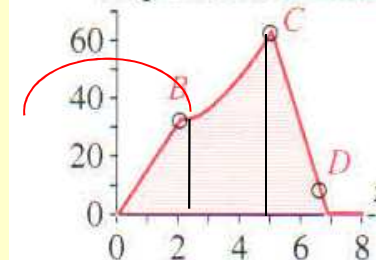
Momento no plano xz



Momento no plano yz



Magnitude do momento



Plano de F_g
 $M=32,8 \text{ lb in}$



1. Introdução ❖ Cargas em Eixos ❖ Conexões e Concentração de Tensões ❖ Materiais para Eixos	2. Projeto de Eixos ❖ Potência no Eixo ❖ Cargas no Eixo ❖ Tensões no Eixo	3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado	4. Projeto do Eixo ❖ Situação I ❖ Situação II
---	---	---	--

4. Projeto do Eixo: situação II

❖ situação II \Rightarrow flexão variada (σ_a e σ_m) e torção variada (τ_a e τ_m)

	Tensões alternadas ($\sigma_m = 0$)	Tensões variadas ($\sigma_m \neq 0$)
Tensões uniaxiais	Categoria I	Categoria II
Tensões multiaxiais	Categoria III	Categoria IV

Um eixo rodando em flexão combinada com torção apresenta um estado biaxial de tensão

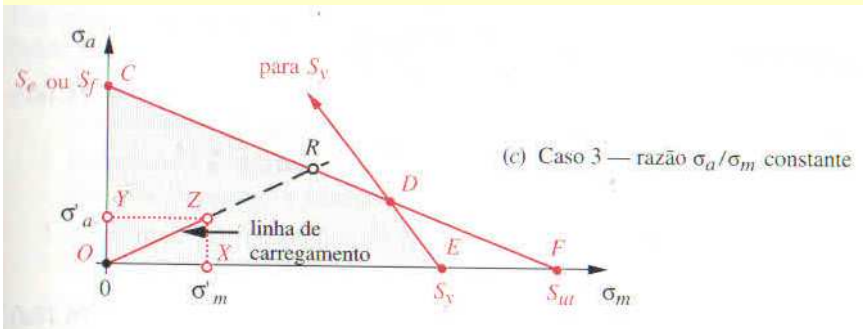
$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{(\sigma_m + \sigma_{m_{axial}})^2 + 3\tau_m^2}$$

\Rightarrow Tensão efetiva de von Mises



1. Introdução ❖ Cargas em Eixos ❖ Conexões e Concentração de Tensões ❖ Materiais para Eixos	2. Projeto de Eixos ❖ Potência no Eixo ❖ Cargas no Eixo ❖ Tensões no Eixo	3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado	4. Projeto do Eixo ❖ Situação I ❖ Situação II
---	---	---	--



Equação de projeto

$$\frac{1}{N_f} = \frac{\sigma'_a}{S_f} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}$$

com

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{(\sigma_m + \sigma_{m_{axial}})^2 + 3\tau_m^2}$$

- cargas média e alternada mantêm razão constante
- carga axial no eixo igual a zero

$$\sigma_a = K_f \frac{32M_a}{\pi d^3}$$

$$\sigma_m = K_{fm} \frac{32M_m}{\pi d^3}$$

$$\tau_a = K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_{fsm} \frac{16T_m}{\pi d^3}$$



**1. Introdução**

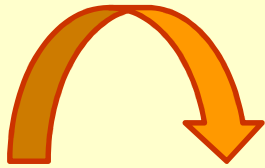
- ❖ Cargas em Eixos
- ❖ Conexões e Concentração de Tensões
- ❖ Materiais para Eixos

2. Projeto de Eixos

- ❖ Potência no Eixo
- ❖ Cargas no Eixo
- ❖ Tensões no Eixo

3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado**4. Projeto do Eixo**

- ❖ Situação I
- ❖ Situação II



$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(K_f M_a)^2 + \frac{3}{4}(K_{fs} T_a)^2}}{S_e} + \frac{\sqrt{(K_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4}(K_{fsm} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$



1. Introdução <ul style="list-style-type: none">❖ Cargas em Eixos❖ Conexões e Concentração de Tensões❖ Materiais para Eixos	2. Projeto de Eixos <ul style="list-style-type: none">❖ Potência no Eixo❖ Cargas no Eixo❖ Tensões no Eixo	3. Falha do Eixo em Carregamento Combinado	4. Projeto do Eixo <ul style="list-style-type: none">❖ Situação I❖ Situação II
--	--	---	--

Exercício 2:

Refaça o exercício anterior considerando que o torque e o momento fletor possuem componentes alternadas e médias com amplitudes iguais.



PERGUNTAS?

