PEF2603
Estruturas na Arquitetura III –
Sistemas Reticulados e Laminares

Grelhas

(01/04/2019)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

1º Semestre 2019

Grelha

- Estrutura reticulada plana submetida à carregamentos perpendiculares ao seu plano.

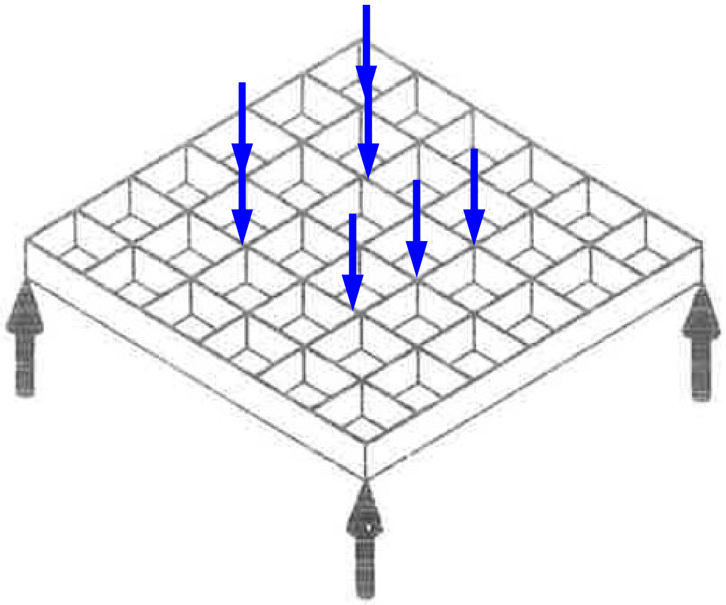
- São compostas por vigas que se interceptam formando um reticulado plano.

Aplicações

- Pisos e coberturas

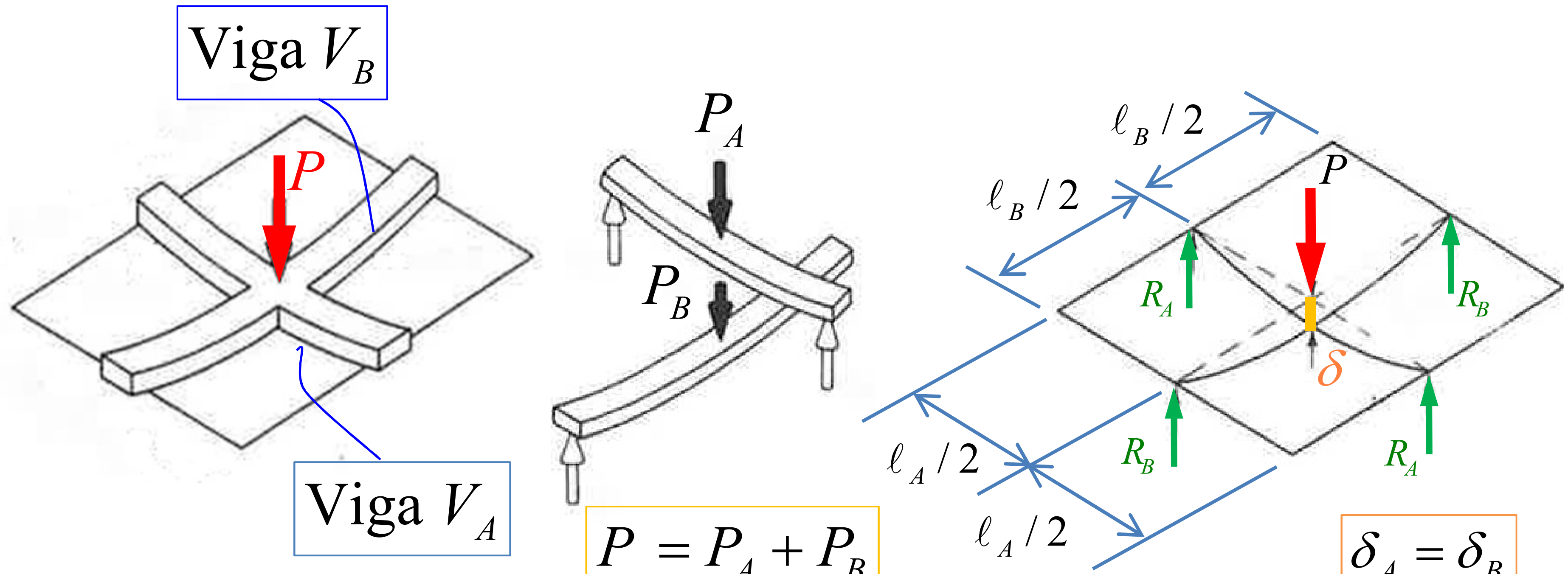
Comportamento Estrutural

- ✓ Tridimensional, combinando esforços cortantes (V), momentos fletores (M) e momentos torsores (T)



Comportamento Estrutural

✓ *Modelo simplificado para entender o comportamento das grelhas ("método dos esforços")*



$$P = P_A + P_B$$

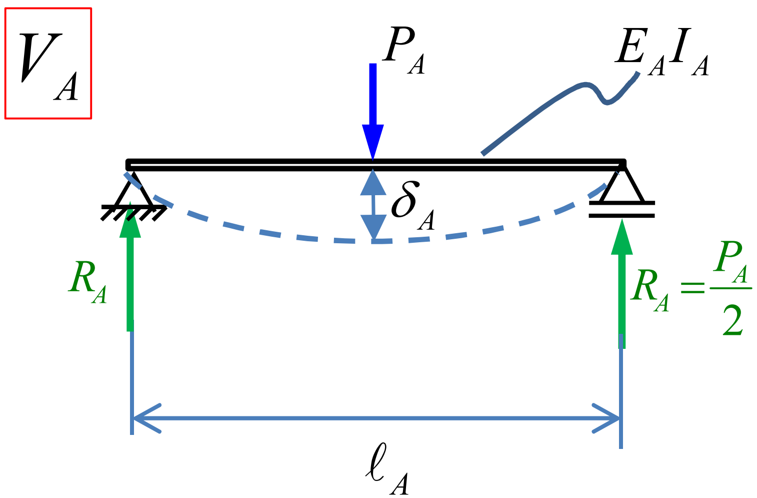
$$\delta_A = \delta_B$$

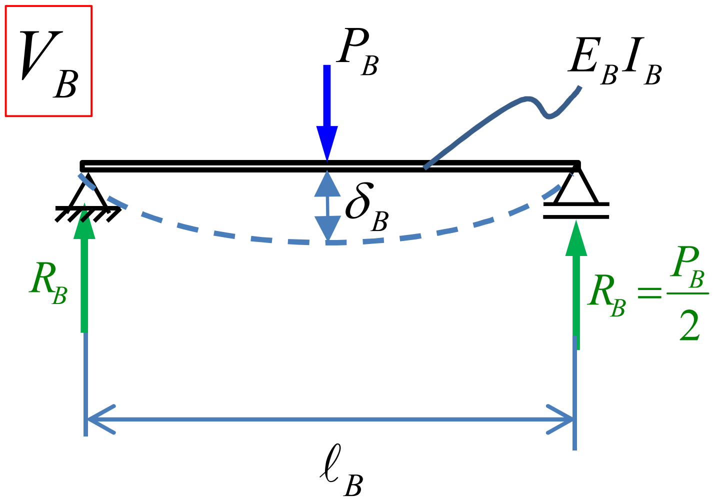
✓ *Equação de EQUILÍBRIO*

Sistema Intrinsecamente Hiperestático!

Comportamento Estrutural

- ✓ *Qual das duas vigas recebe mais carga?*





$$\delta_A = \frac{P_A \ell_A^3}{48 E_A I_A}$$

$$\delta_B = \frac{P_B \ell_B^3}{48 E_B I_B}$$

Comportamento Estrutural

- ✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?

- ✓ Equação de COMPATIBILIDADE: $\boxed{\delta_A = \delta_B}$

$$\frac{P_A \ell_A^3}{48 E_A I_A} = \frac{P_B \ell_B^3}{48 E_B I_B}$$

$$\boxed{\frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 \cdot \left(\frac{E_A I_A}{E_B I_B}\right)}$$

Comportamento Estrutural

✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?

✓ 1º CASO PARTICULAR:

- mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$

- mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$

$$\frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 = \alpha \quad \therefore \quad \boxed{P_A = \alpha P_B}$$

- Inserindo na Equação de Equilíbrio:

$$\alpha P_B + P_B = P \quad \therefore \quad \boxed{P_B = \frac{P}{\alpha + 1}} \quad e \quad \boxed{P_A = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right) P}$$

Comportamento Estrutural

- ✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?

  - ✓ 2º CASO PARTICULAR:

    - mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$

    - mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$

    - mesmo comprimento: $\boxed{\ell_A = \ell_B}$

$$\ell_A = \ell_B \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \qquad \therefore \qquad \boxed{P_A = P_B = \frac{P}{2}}$$

Comportamento Estrutural

✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?

✓ 3º CASO PARTICULAR:

- mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$

- mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$

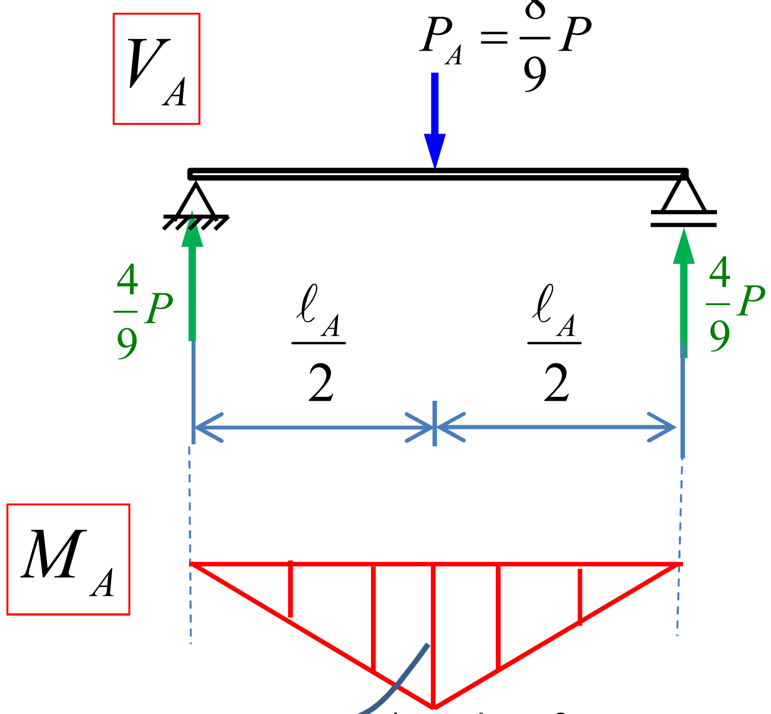
- comprimento: $\boxed{\ell_B = 2\ell_A}$

$$\therefore \quad \alpha = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 = \left(\frac{2\ell_A}{\ell_A}\right)^3 = 8 \;\therefore\; \begin{cases} \boxed{P_A = \dfrac{8}{9}P} \\ \boxed{P_B = \dfrac{1}{9}P} \end{cases}$$

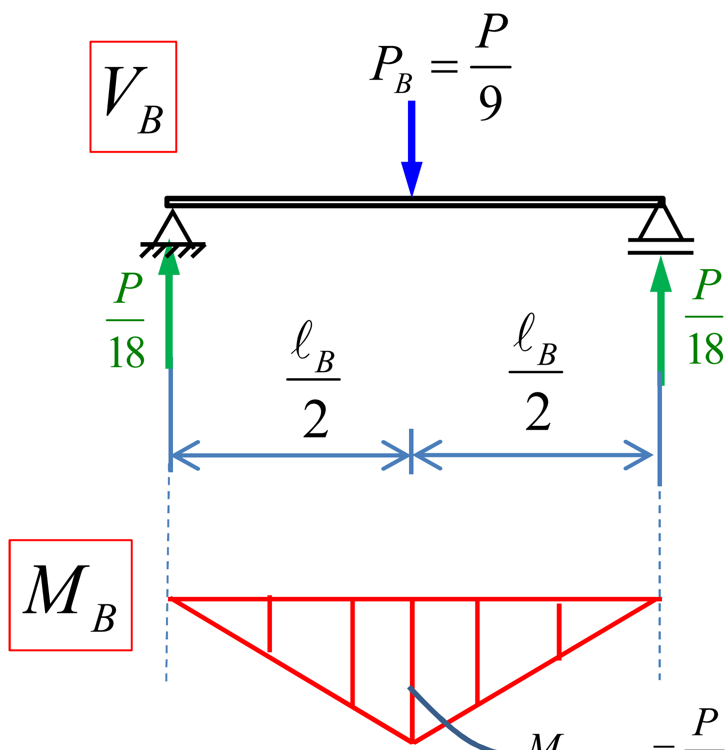
✓ CONCLUSÃO: as vigas curtas são mais rígidas, logo "absorvem" mais carga. Ou seja, são mais solicitadas.

Comportamento Estrutural

- ✓ *Qual das duas vigas recebe mais carga?*



$$M_{A,MAX} = \frac{4}{9}P \times \frac{\ell_A}{2} = \frac{2}{9}P\ell_A$$



$$M_{B,MAX} = \frac{P}{18} \times \frac{\ell_B}{2} = \frac{P\ell_B}{36}$$

$$\ell_B = 2\ell_A \Rightarrow M_{B,MAX} = \frac{P\ell_A}{18}$$

$$\frac{M_{A,MAX}}{M_{B,MAX}} = \frac{2}{9}P\ell_A \times \frac{18}{P\ell_A} \quad \therefore \quad \boxed{M_{A,MAX} = 4M_{B,MAX}}$$

Comportamento Estrutural

- ✓ Observações:

a) A maior parcela de carga é transferida para viga de menor vão;

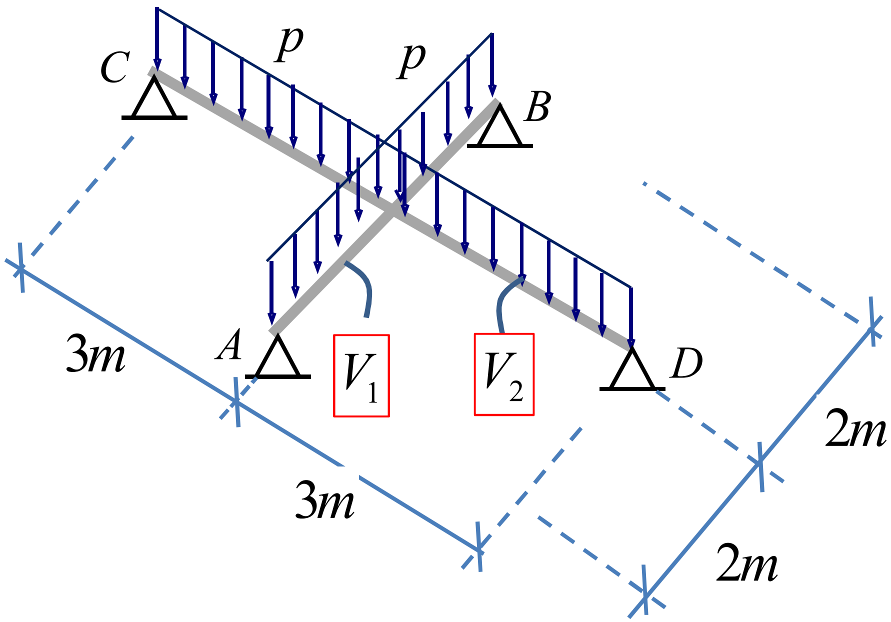
b) A viga mais rígida (curta) será mais solicitada em comparação com a viga mais flexível (longa);

c) A interligação das vigas pode introduzir um giro na seção transversal (exceto nos eixos de simetria);

d) Quando uma das vigas sofre flexão, a viga interligada sofre um efeito de torção (exceto nos eixos de simetria);

Exercício 1

- ✓ As duas vigas da figura abaixo têm a mesma seção transversal (b=20cm e h=50cm) e o mesmo material (γ_c=25kN/m³). Determinar os diagramas de esforços solicitantes quando sobre elas atuar apenas o peso próprio.



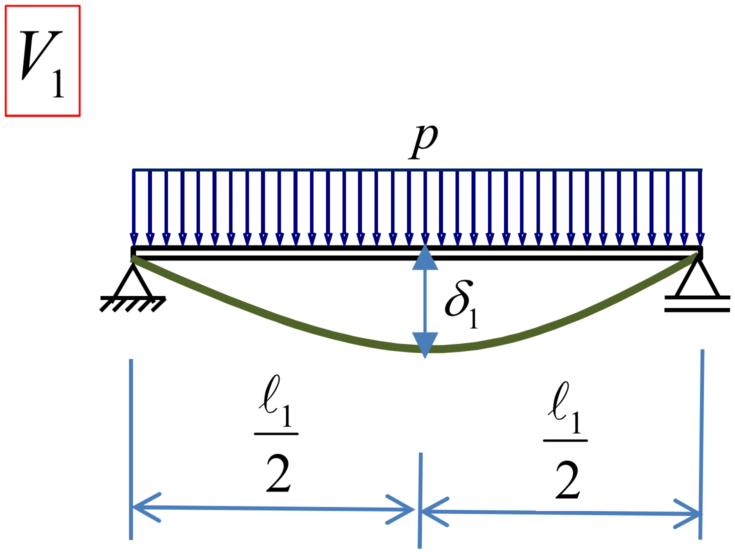
- Peso próprio: $p = b.h.\gamma_c = 0,2m \times 0,5m \times 25kN/m^3 = 2,5kN/m$

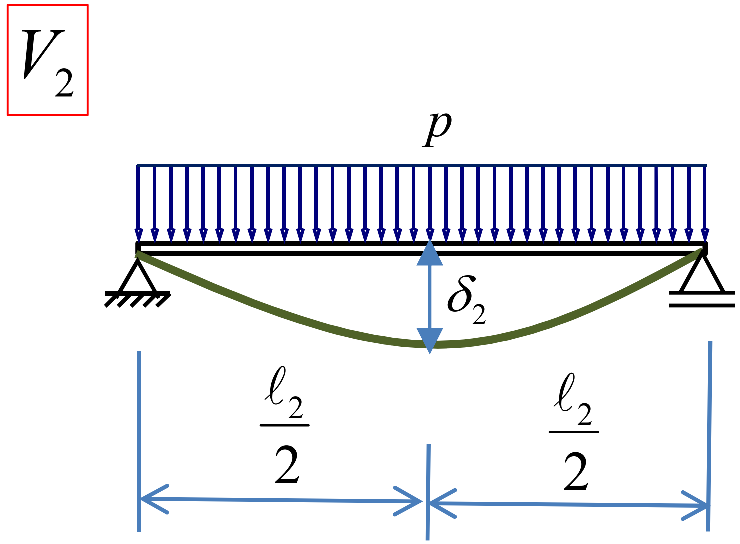
- Comprimento de V1: $\ell_1 = 4m$

- Comprimento de V2: $\ell_2 = 6m$

Exercício 1 - Resolução

a) Se as vigas fossem independentes, V1 teria uma deflexão no ponto médio menor que V2 ($\delta_1 < \delta_2$):



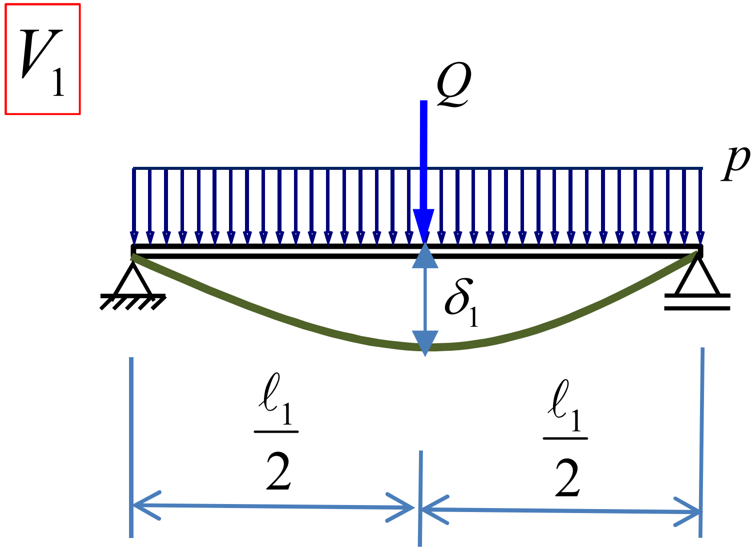


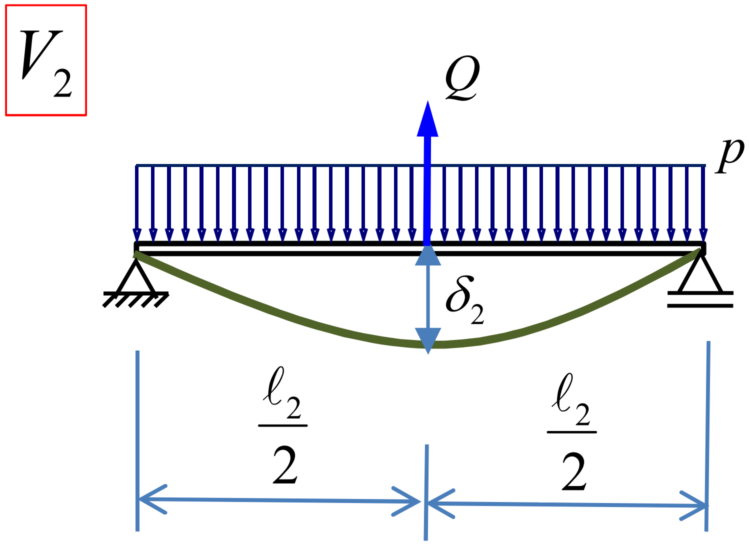
- Como a interligação é rígida, há compatibilidade das deformações:

$$\boxed{\delta_1 = \delta_2}$$

Exercício 1 - Resolução

- Desta maneira surge uma força de interação Q entre as vigas, sendo que V2 se apoia sobre V1:





$$\delta_1 = \delta_1^p + \delta_1^Q = \frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI}$$

$$\delta_2 = \delta_2^p - \delta_2^Q = \frac{5p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{48EI}$$

Exercício 1 - Resolução

- COMPATIBILIDADE: $\delta_1 = \delta_2$

$$\frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI} = \frac{5p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{48EI}$$

$$\frac{Q}{48}\left(\ell_1^3 + \ell_2^3\right) = \frac{5}{384}p\left(\ell_2^4 - \ell_1^4\right)$$

$$\boxed{Q = \frac{5}{8}\frac{\left(\ell_2^4 - \ell_1^4\right)}{\left(\ell_1^3 + \ell_2^3\right)}p}$$

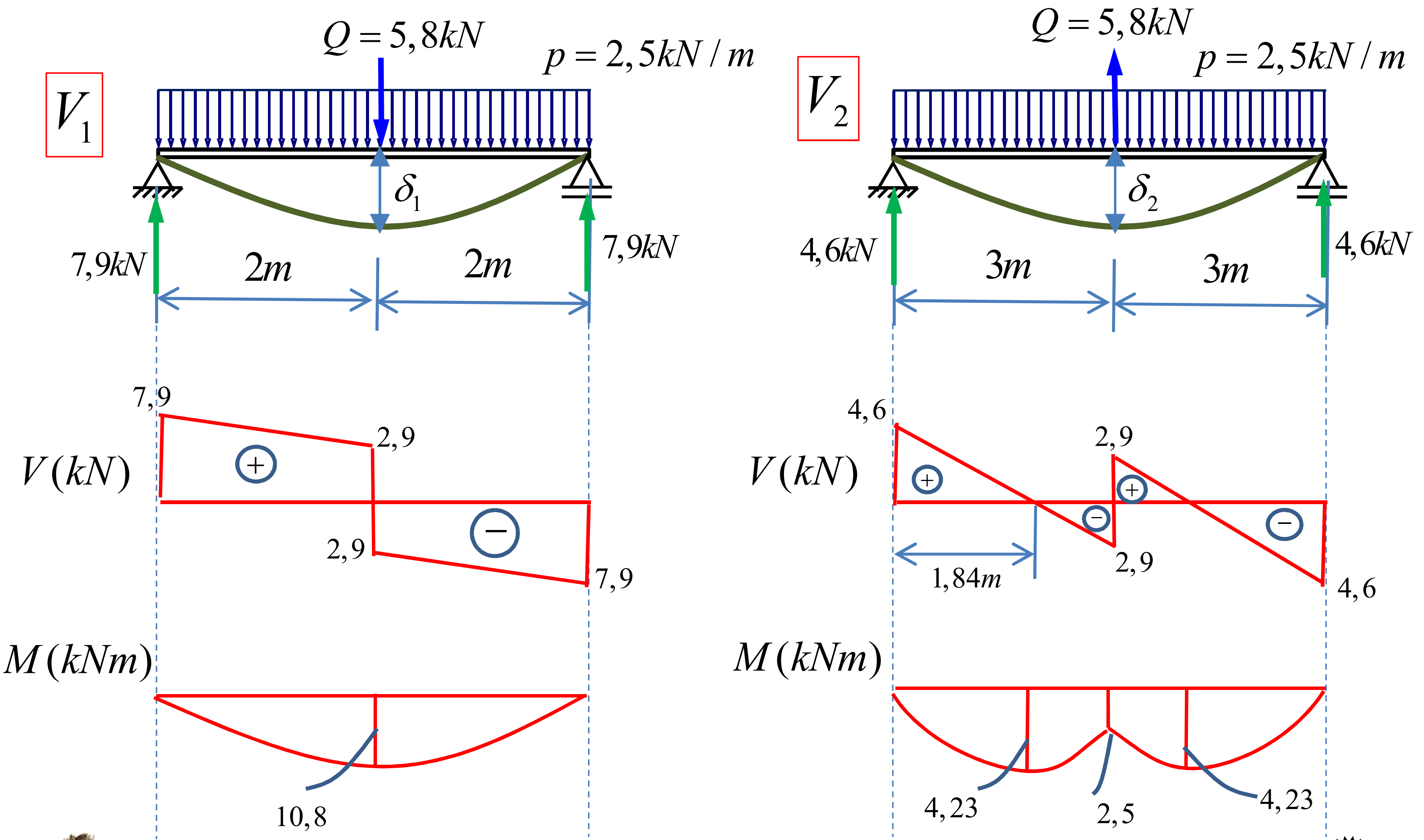
- obs: Note que se $(EI)_1 \neq (EI)_2$, haverá outra relação.

- Substituindo os valores:

$$\boxed{Q = \frac{5}{8}\frac{\left(6^4 - 4^4\right)}{\left(4^3 + 6^3\right)} \times 2,5 = 5,80kN}$$

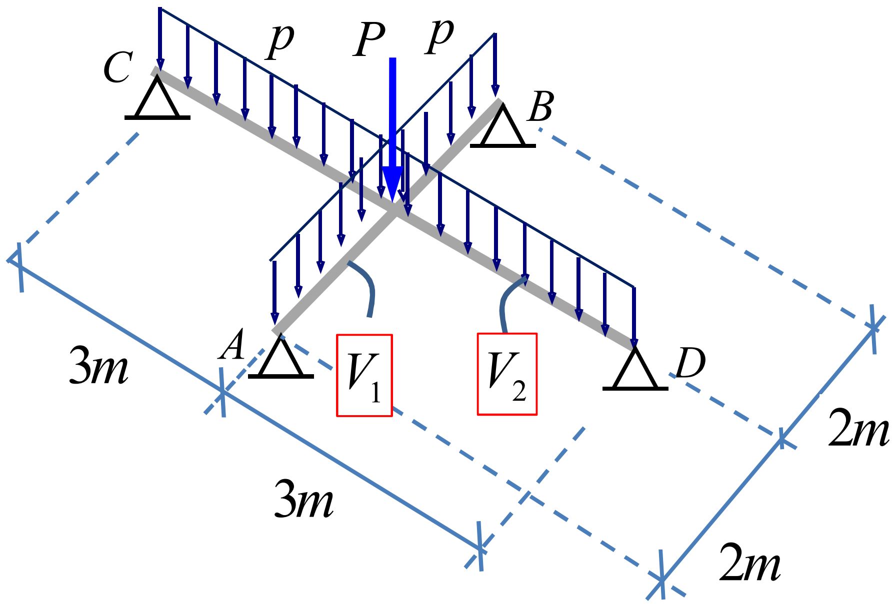
Exercício 1 - Resolução

- Diagrama de esforços solicitantes:



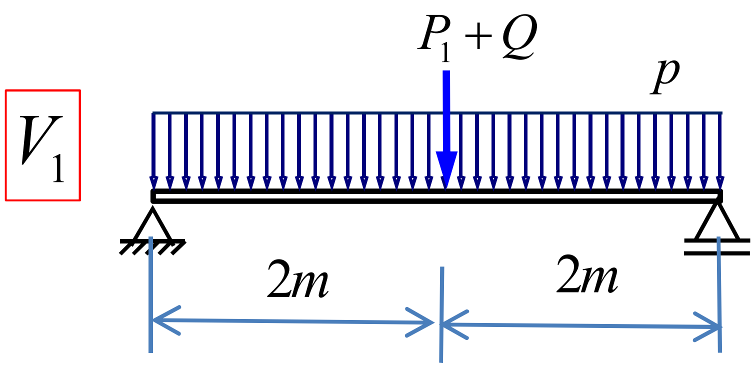
Exercício 1 - Resolução

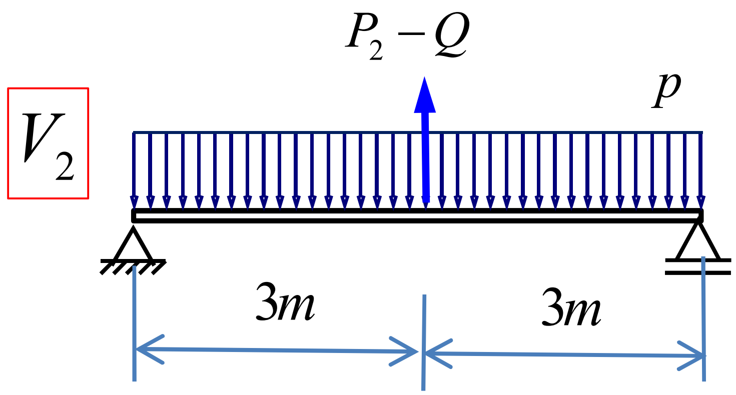
b) Supondo a existência de uma carga adicional P=20kN, aplicada ao ponto de cruzamento das vigas, conforme o que se viu no exemplo anterior



Exercício 1 - Resolução

Esta carga P=20kN se distribuirá entre as duas vigas, conforme o que se viu no exemplo anterior ($P=P_1+P_2$)





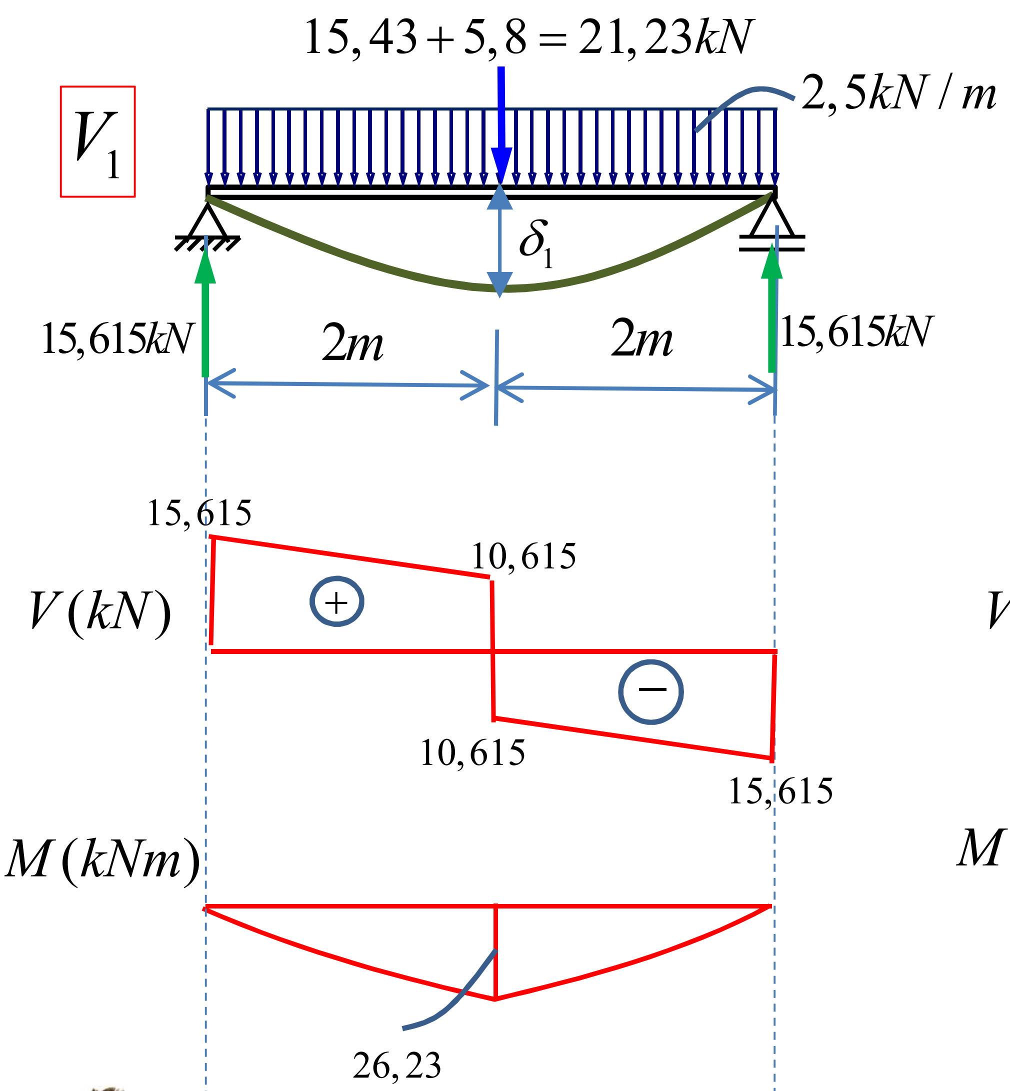
- Como visto:
$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\right)^3 = \alpha \\ P_1 + P_2 = P \end{cases}$$

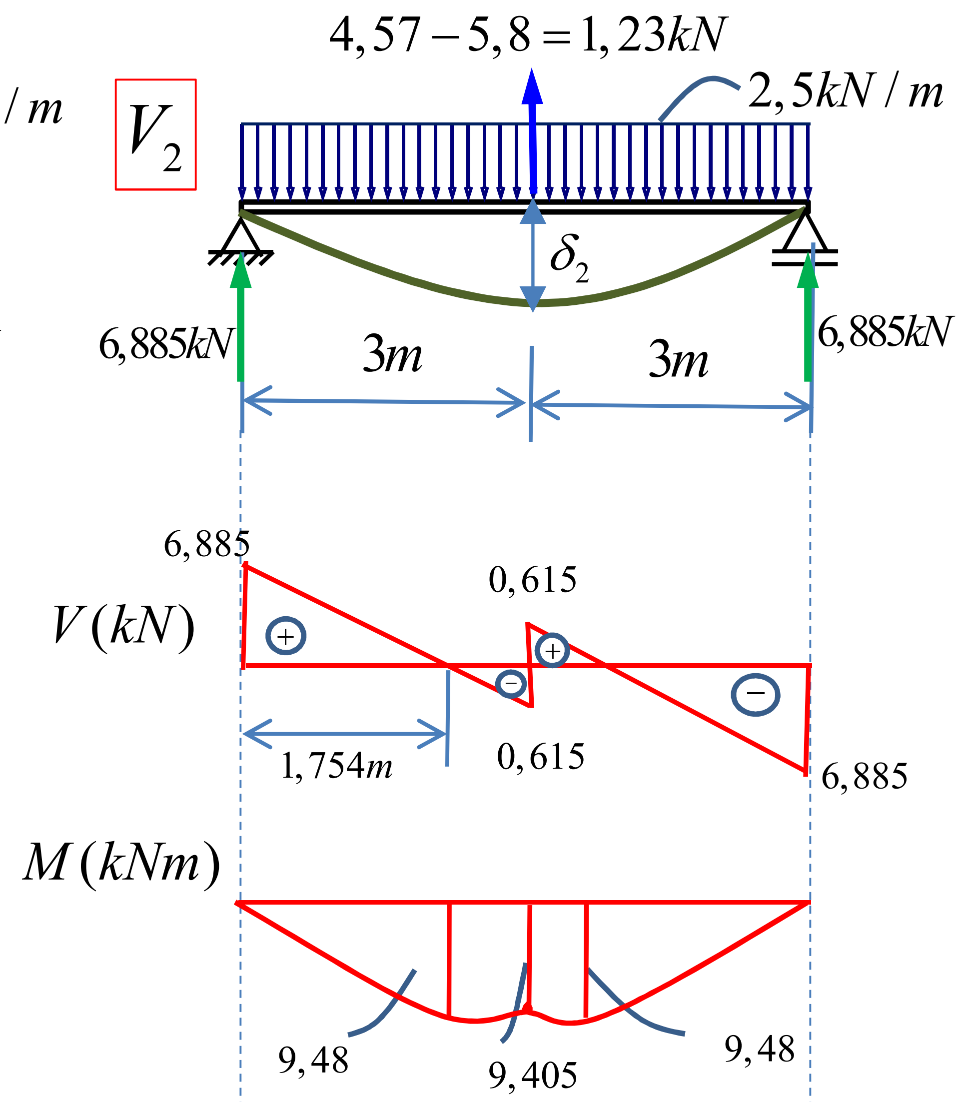
- Resulta em:
$$P_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)P \quad e \quad P_2 = \frac{P}{\alpha+1}$$

$$\alpha = \left(\frac{6}{4}\right)^3 \cong 3,38 \qquad \boxed{\Rightarrow \quad P_1 = \left(\frac{3,38}{3,38+1}\right)\times 20 = 15,43kN} \quad e \quad \boxed{P_2 = \left(\frac{20}{3,38+1}\right) = 4,57kN}$$

Exercício 1 - Resolução

- Diagrama de esforços solicitantes:



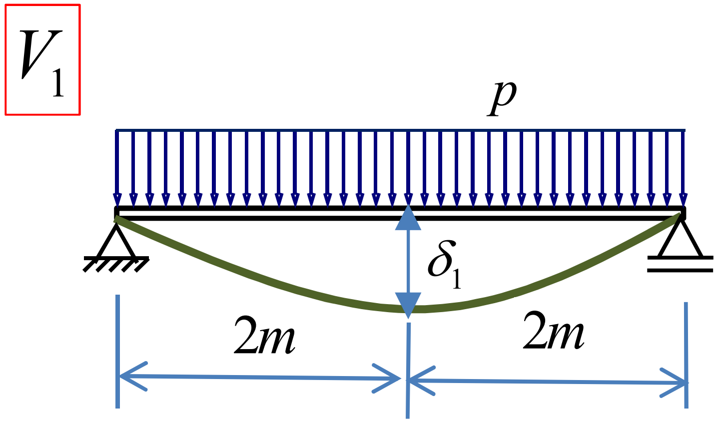


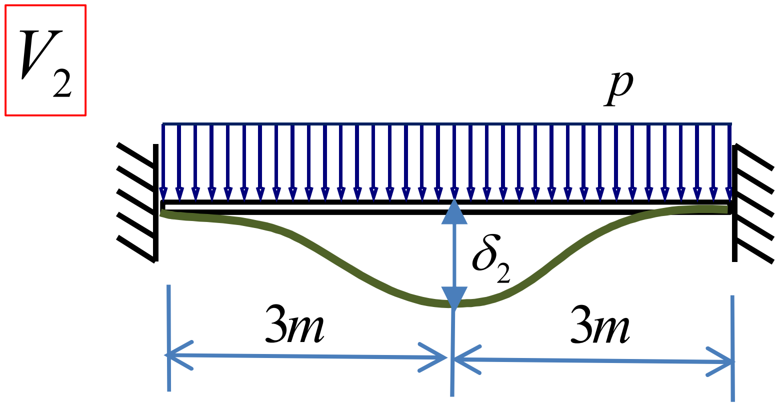
Exercício 1 - Resolução

c) Viga V2 é bi-engastada (mais rígida)

- Será que a viga V2 continua a se apoiar na viga V1, ou a situação se inverte?

- Se trabalhassem de forma independente:





$$\delta_1 = \frac{5p\ell_1^4}{384EI} = \frac{5\times 2,5\times 4^4}{384EI} = \frac{8,33}{EI}$$

$$\delta_2 = \frac{p\ell_2^4}{384EI} = \frac{2,5\times 6^4}{384EI} = \frac{8,44}{EI}$$

$\delta_1 < \delta_2 \quad \Rightarrow$ A viga V2 continua a se apoiar na viga V1, como no caso anterior, mas a força de interação Q é menor.

Exercício 1 - Resolução

c) - Ao trabalhar em conjunto (compatibilidade): $\boxed{\delta_1 = \delta_2}$

$$\delta_1^p + \delta_1^Q = \delta_2^p - \delta_2^Q$$

$$\frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI} = \frac{p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{192EI}$$

$$\frac{Q}{192}\left(4\ell_1^3 + \ell_2^3\right) = \frac{1}{384}p\left(\ell_2^4 - 5\ell_1^4\right)$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{384} \times 192 \times \frac{\left(\ell_2^4 - 5\ell_1^4\right)}{\left(4\ell_1^3 + \ell_2^3\right)}p}$$

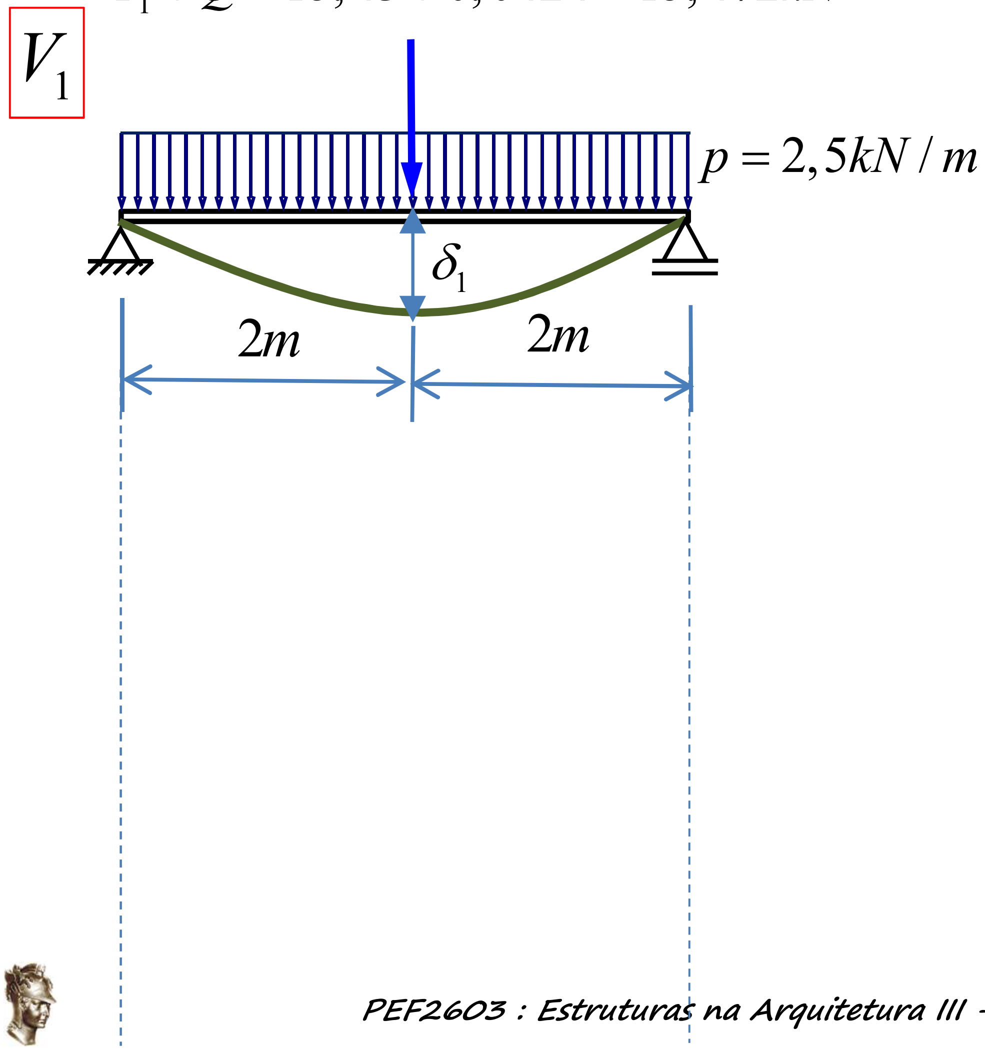
- Substituindo os valores:

$$\boxed{Q = \frac{2,5}{384} \times 192 \times \frac{\left(6^4 - 5 \times 4^4\right)}{\left(4 \times 4^3 + 6^3\right)} = 0,0424kN}$$

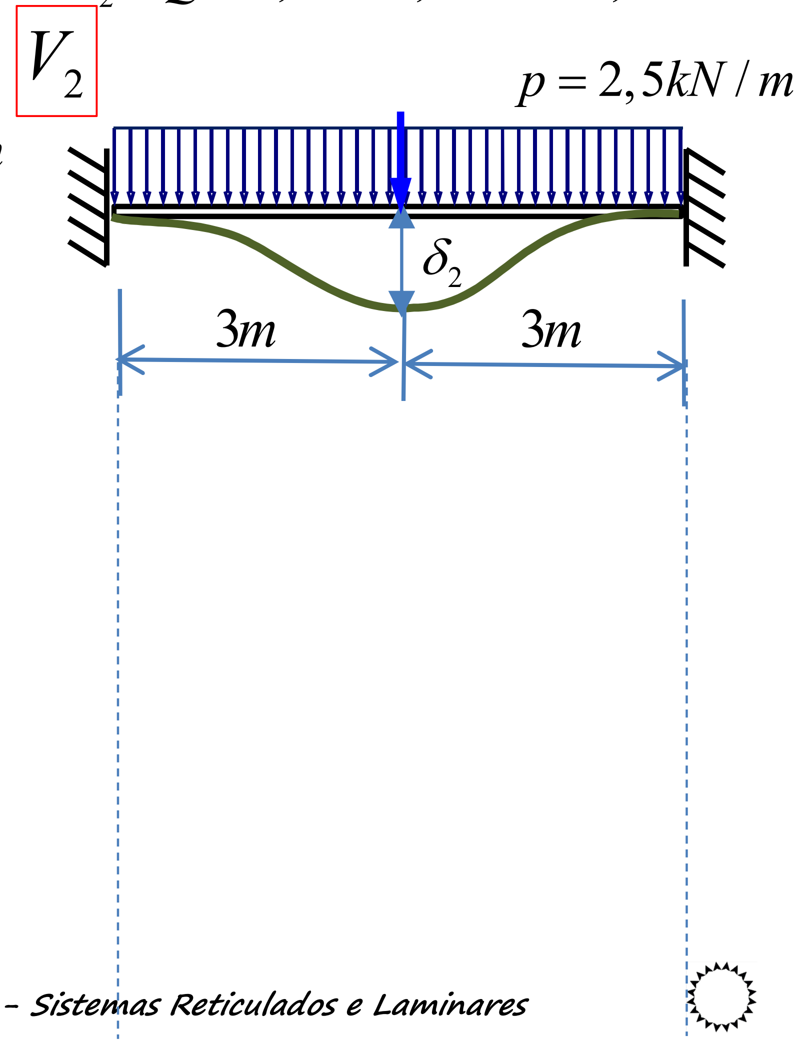
Exercício 1 - Resolução

- Diagrama de esforços solicitantes
(exercício para praticar - não precisa entregar!):

$$P_1 + Q = 15,43 + 0,0424 = 15,472kN$$



$$P_2 - Q = 4,57 - 0,0424 = 4,5276kN$$



P2-Q1 (2007) A grelha esquematizada abaixo, simplesmente apoiada ao longo de seu contorno, suporta uma laje contínua. Tanto a grelha quanto a laje têm peso específico 25kN/m³.
Desprezando a contribuição da laje para a rigidez do conjunto, a estrutura pode ser estudada, de forma simplificada, considerando um modelo definido por duas vigas ortogonais entre si, solidárias em seu ponto de encontro, cada uma responsável por equilibrar as cargas verticais atuantes nas respectivas zonas de influência, indicadas no esquema ao lado por meio de hachuras.
Faça um esboço deste modelo estrutural simplificado e determine as cargas transversais considerando o peso próprio das vigas e da laje, bem como uma carga acidental de 2kN/m², uniformemente distribuída sobre a laje. Calcule os diagramas de momento fletor nas duas vigas deste modelo simplificado.