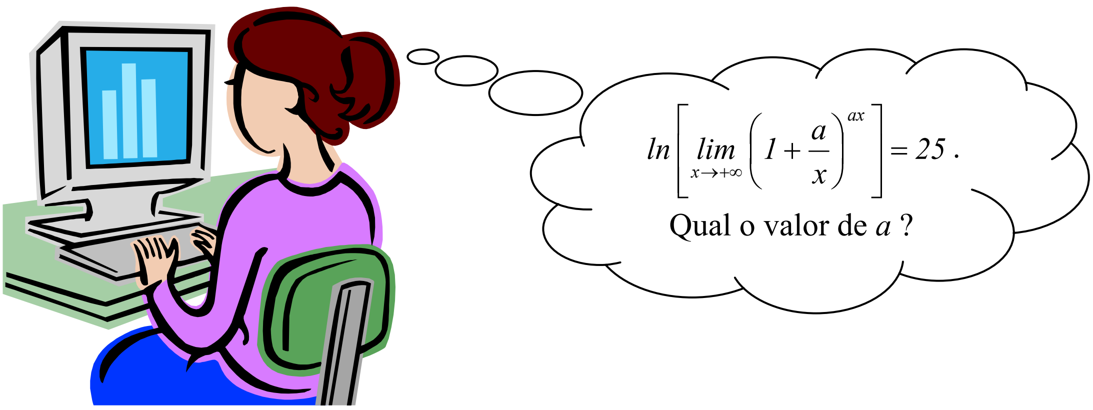
ÁREA 1 - Faculdade de Ciência e Tecnologia
Cursos de Engenharia
Cálculo Diferencial e Integral I
Professor: Álvaro Fernandes Serafim



Apostila de limites e derivadas

"Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar a sua curiosidade e fizer funcionar a sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta"

George Polya

Última atualização: 02/06/2006

Índice

Limite e continuidade........ 3

Noção intuitiva de limite........ 3
Tabelas de aproximações........ 4
Cálculo de uma indeterminação do tipo 0/0........ 5
Definição intuitiva de limite........ 6
Propriedades dos limites........ 6
Limites infinitos........ 8
Limites no infinito........ 9
Expressões indeterminadas........ 10
Limite fundamental exponencial........ 12
Limite fundamental trigonométrico........ 14
Funções limitadas........ 16
Continuidade........ 18
Aplicação 1: Problema da área sob o arco de uma parábola........ 20
Aplicação 2: Problema do circuito RL em série........ 21

Derivada........ 22

A reta tangente........ 22
A reta normal........ 25
A derivada de uma função num ponto........ 25
Derivadas laterais........ 26
Regras de derivação........ 28
Derivada da função composta (Regra da cadeia)........ 30
Derivada da função inversa........ 32
Derivada das funções elementares........ 33
Derivada da função exponencial........ 33
Derivada da função logarítmica........ 34
Derivada das funções trigonométricas........ 34
Derivada das funções trigonométricas inversas........ 37
Tabela de derivadas........ 39
Derivadas sucessivas........ 40
Derivada na forma implícita........ 42
Derivada de uma função na forma paramétrica........ 47
Diferencial........ 51

Aplicações da derivada........ 53

A regra de L'Hospital........ 53
Interpretação cinemática da derivada........ 55
Taxa de variação........ 58
Análise gráfica das funções........ 61
  Máximos e mínimos........ 61
  Funções crescentes e decrescentes........ 63
  Critérios para determinar os extremos de uma função........ 65
  Concavidade e inflexão........ 67
  Assíntotas horizontais e verticais........ 69
  Esboço gráfico........ 72
Problemas de otimização........ 77

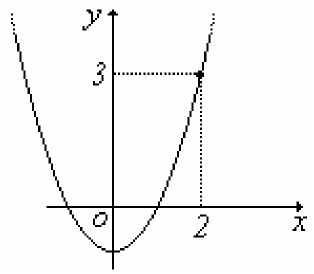
Limite e continuidade

Noção Intuitiva de limite

Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Esta função está definida para todo $x \in \Re$, isto é, qualquer que seja o número real *c*, o valor $f(c)$ está bem definido.

Exemplo 1. Se $x = 2$ então $f(2) = 2^2 - 1 = 3$. Dizemos que a *imagem* de $x = 2$ é o valor $f(2) = 3$.

Graficamente:



Considere agora uma outra função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Esta função está definida $\forall x \in \Re - \{1\}$. Isto significa que não podemos estabelecer uma imagem quando *x* assume o valor 1.

$$g(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} ???$$

$\dfrac{0}{0}$ simboliza uma **indeterminação matemática**. Outros tipos de indeterminações matemáticas serão tratados mais adiante.

Qual o comportamento gráfico da função *g* quando *x* assume valores *muito próximos* de *1*, porém diferentes de *1*?

A princípio o estudo do limite visa estabelecer o comportamento de uma função numa *vizinhança* de um ponto (que pode ou não pertencer ao seu domínio). No caso da função *f*, qualquer valor atribuído a *x* determina uma única imagem, sem problema algum. Mas na função *g*, existe o ponto $x = 1$ que gera a indeterminação.

Estudemos os valores da função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ quando *x* assume valores próximos (numa vizinhança) de *1*, mas *diferente* de *1*. Para isto vamos utilizar *tabelas de aproximações*.

Tabelas de aproximações

As tabelas de aproximações são utilizadas para aproximar o valor da imagem de uma função (se existir) quando a variável x se aproxima de um determinado ponto.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém **menores** do que 1: (tabela A)

x	0	$0,5$	$0,75$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$g(x)$	1	$1,5$	$1,75$	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém **maiores** do que 1: (tabela B)

x	2	$1,5$	$1,25$	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$g(x)$	3	$2,5$	$2,25$	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$

Observemos que podemos tornar $g(x)$ tão próximo de **2** quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1. De outra forma, dizemos:

"O limite da função $g(x)$ quando x se aproxima de (tende a) 1 é igual a 2".

Simbolicamente escrevemos: $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ ou $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Observações:

1) Os dois tipos de aproximações que vemos nas tabelas A e B são chamados de **limites laterais**.

* Quando x tende a 1 por valores **menores** do que 1 (tabela A), dizemos que x tende a 1 **pela esquerda**, e denotamos simbolicamente por $x \to 1^-$. Temos então que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}$$

Obs: O sinal negativo no expoente do nº 1 simboliza apenas que x se aproxima do número 1 pela esquerda.

* Quando x tende a 1 por valores **maiores** do que 1 (tabela B), dizemos que x tende a 1 **pela direita**, e denotamos simbolicamente por $x \to 1^+$. Temos então que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2}$$

Obs: O sinal positivo no expoente do nº 1 simboliza apenas que x se aproxima do número 1 pela direita.

2) Se a função g se aproximasse de valores **distintos** à medida que x se aproximasse lateralmente de 1, pela esquerda e pela direita, então diríamos que o limite da função g **não existiria neste ponto**, simbolicamente $\nexists \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

3) O limite da função $g(x)$ quando x se aproxima de 1, **somente existe** se os limites laterais **são iguais**. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2 \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 2.$$

Será necessário sempre construir *tabelas de aproximações* para determinar o limite de uma função, caso ele exista?

Não! Há uma forma bem mais simples, como veremos a seguir.

Cálculo de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Sempre que nos depararmos com uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, deveremos **simplificar*** a expressão da função envolvida. Logo após, calculamos o limite da função substituindo, na expressão já simplificada, o valor de x.

* Para simplificar a expressão você deve utilizar fatoração, racionalização, dispositivo prático de *Briot-Ruffini* para dividir polinômios, etc...

Vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 2. Determine $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, onde $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $g(1) = \frac{0}{0}$ que é uma **indeterminação matemática!** Quando a variável x está cada vez mais próxima de 1, a função g está cada vez mais próxima de quanto? Devemos então simplificar a expressão da função g e depois fazer a substituição direta.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1), \forall x \neq 1$$ Então:

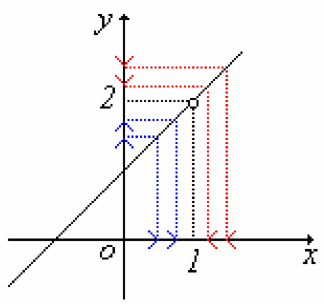
$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2.$$ Logo, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Chegamos à mesma conclusão da análise feita pelas tabelas de aproximações, porém de uma forma mais rápida e sistemática.

Não mais utilizaremos as tabelas de aproximações para casos semelhantes a este!!

Vale lembrar que a expressão $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ significa que a função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ está tão próxima de 2 assim como x está suficientemente próximo de 1, porém **diferente** de 1. Graficamente podemos verificar isso:

Gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\forall x \neq 1$.



$$\begin{cases} x \to 1^- \Rightarrow y \to 2 \\ x \to 1^+ \Rightarrow y \to 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Exemplo3. Determine $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ (observe a indeterminação matemática $\dfrac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}.$$

Se você construir as tabelas de aproximações, constatará que $g(x)$ está cada vez mais próximo de $1/4$ a medida que x se aproxima de 1.

Exemplo 4. Determine $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{3x^2-12}$ (observe a indeterminação matemática $\dfrac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-12} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-2^3)}{3(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{3(x+2)} = \frac{12}{12} = 1$$

Definição intuitiva de limite.

Seja f uma função definida num intervalo $I \subset \Re$ contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é $L \in \Re$, e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, se, e somente se, os **limites laterais** à esquerda e à direita de a ***são iguais*** à L, isto é, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que o limite não existe, em símbolo $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Proposição (unicidade do limite).

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$. Se o limite de uma função num ponto existe, então ele é único.

Principais propriedades dos limites.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem, e k é um número real qualquer, então:

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to a} k.f(x) = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

e) $\lim\limits_{x\to a} k = k$.

Exemplo 5. Calcule $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6}{2x+4}$ usando as propriedades.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6}{2x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-2)}{2(x+2)}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x+2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim_{x\to 2}x^2-2}{\lim_{x\to 2}x+2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{4}.$$

Obteríamos este resultado substituindo diretamente: $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6}{2x+4}=\frac{3.2^2-6}{2(2)+4}=\frac{12-6}{4+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Atividades (grupo 1).

Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{2+x}$
b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$
c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{5x-5}$

d) $\lim_{x\to -2}\frac{8+x^3}{4-x^2}$
e) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{8-x^3}$
f) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

g) $\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{x+\sqrt{2+x}}$
h) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
i) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Atividades (grupo 2).

Calcule os limites indicados:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$, calcule: $\lim_{x\to -1}f(x)$, $\lim_{x\to 2}f(x)$ e $\lim_{x\to 0}f(x)$.

b) $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\ne 2\\ 3, & x=2\end{cases}$, calcule: $\lim_{x\to 2}g(x)$.

c) $h(x)=\begin{cases}4-x^2, & x<1\\ 5-2x, & x>1\end{cases}$, calcule: $\lim_{x\to 1}h(x)$.

d) $l(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 1-x^2, & 0\le x<2\\ 2x-6, & x\ge 2\end{cases}$, calcule: $\lim_{x\to 0}l(x)$, $\lim_{x\to 2}l(x)$, $\lim_{x\to -\infty}l(x)$ e $\lim_{x\to +\infty}l(x)$.

Limites infinitos

Quando resolvemos um limite e não encontramos como resposta valores numéricos, mas sim infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), dizemos então que o limite é infinito.

Exemplo 6. Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Neste caso, quando fazemos a substituição de x por -1 na expressão $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, encontramos $\dfrac{0}{-2} = 0$.

Esta não é uma situação especial. Sempre que na substituição de x ocorrer $\dfrac{0}{k}$, $k \neq 0$, o resultado do limite será sempre zero, naturalmente.

E se na substituição do valor de x ocorrer $\dfrac{k}{0}$, $k \neq 0$?

Vamos analisar esta situação num caso particular e depois formalizar uma regra.

Exemplo 7. Estude o seguinte limite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

Devemos analisar os limites laterais. Vamos recorrer às tabelas de aproximações:

Aproximação do zero pela direita (notação $x \to 0^+$)

x	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$f(x)=1/x$	1	10	100	1000	10.000

Cada vez que tomamos x suficientemente próximo de zero (pela direita), $f(x) = 1/x$ **cresce indefinidamente**. Simbolizamos esta situação assim:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

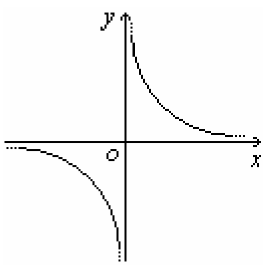
Aproximação do zero pela esquerda (notação $x \to 0^-$)

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$f(x)=1/x$	-1	-10	-100	-1000	-10.000

Cada vez que tomamos x suficientemente próximo de zero (pela esquerda), $f(x) = 1/x$ **decresce indefinidamente**. Simbolizamos esta situação assim:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Conclusão: Como os limites laterais são distintos, então $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.



Veja ao lado o gráfico da função $f(x) = 1/x$.

Regra (generalização)

Se no cálculo de um limite ocorrer uma situação do tipo $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$, então:

$$\begin{cases} \frac{k}{0^+} = +\infty, k > 0 \quad \text{e} \quad \frac{k}{0^+} = -\infty, k < 0. \\ \\ \frac{k}{0^-} = -\infty, k > 0 \quad \text{e} \quad \frac{k}{0^-} = +\infty, k < 0. \end{cases}$$

Desta tabela podemos perceber que $\frac{k}{\pm\infty} = 0$. Se o denominador tende ao infinito com o numerador constante, a razão se aproxima de zero. Como veremos agora.

Limites no infinito

Estamos interessados agora em estabelecer o comportamento de uma função quando a variável x cresce indefinidamente ($x \to +\infty$) ou quando ela decresce indefinidamente ($x \to -\infty$). Em algumas situações, a função se aproxima de um valor numérico (figura 1), noutros pode também crescer indefinidamente (figura 2) ou decrecer indefinidamente (figura 3).

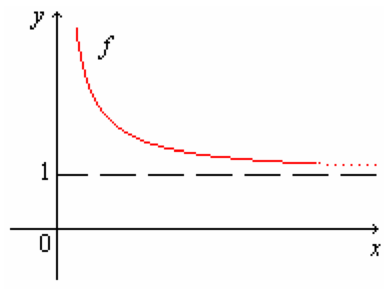


Figura 1

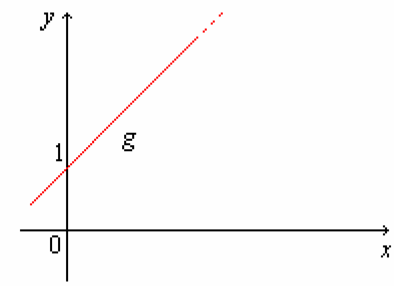


Figura 2

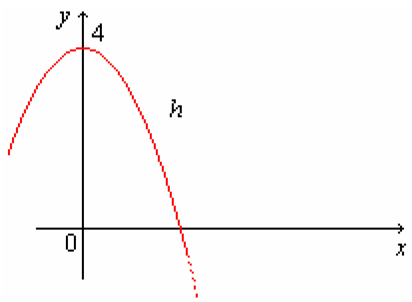


Figura 3

Exemplo 8.

Na figura 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=0+1=1$, na figura 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ e na figura 3: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+4\right)=-\infty$.

A tabela abaixo apresenta situações de soma e produto de infinitos que usaremos com freqüencia.

$$\begin{cases} (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty \\ (\mp\infty)\cdot(\pm\infty) = -\infty \\ (\pm\infty)+(\pm\infty) = \pm\infty \\ (\pm\infty)-(\pm\infty) = ? \quad \text{indeterminação!} \end{cases} \quad \text{e se } k \in \Re^* \text{, então } \begin{cases} (\pm\infty)\cdot k = \pm\infty, \text{se } k > 0 \\ (\pm\infty)\cdot k = \mp\infty, \text{se } k < 0 \\ (\pm\infty)+k = \pm\infty \\ (\pm\infty)-k = \pm\infty \end{cases}.$$

Vale ressaltar ainda que, se n é um ***natural não nulo***, então:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, n \text{ par.} \\ -\infty, n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Atividades (grupo 3). Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-4}{(x-3)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-7}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{3x^2} - 2x^3 + 6$

Atividades (grupo 4). Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{3-x}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3-x}{x^2+x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{x^2-10}{2x+10}$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x^2+x-2}$

Expressões indeterminadas

Vimos que $\dfrac{0}{0}$ é uma expressão de **indeterminação matemática**. Também são:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0 \quad \text{e} \quad \infty^0.$$

Vamos analisar os quatro primeiros casos. Os outros serão tratados em capítulos posteriores.

A indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 9. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{5x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x^2}{x^2+x}$

Podemos observar que estas expressões geram indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, pois quando $x\to+\infty$ as expressões do numerador e denominador também tendem a $+\infty$. Não podemos afirmar, a priori, o valor delas. Vejamos:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{5x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{5x^2\left(1+\dfrac{3}{5x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{5\left(1+\dfrac{3}{5x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} 5\left(1+\dfrac{3}{5x^2}\right)} = \frac{+\infty(1+0)}{5(1+0)} = \frac{+\infty}{5} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{(1+0)}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2+1}{3x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2\left(1+\dfrac{1}{6x^2}\right)}{3x^2\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6\left(1+\dfrac{1}{6x^2}\right)}{3\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)} = \dfrac{6}{3} \cdot \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{6x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)} = \dfrac{6}{3} \cdot \dfrac{(1+0)}{(1+0)} = 2$.

Observamos que nas três situações analisadas as indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ produziram **respostas distintas** (como era esperado, por isso que é *indeterminação*!) Você deve ter notado que para resolver indeterminações deste tipo a idéia é colocar o termo de maior grau em evidência no numerador e no denominador.

Atividades (grupo 5).

1. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-1}{5x^3+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^2}{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x^3}{5x+3-x^4}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{1-5x^2}$

A indeterminação do tipo ∞ - ∞

Exemplo 10. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x^3$. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 + x$.

Podemos observar que estas expressões geram indeterminações do tipo ∞ - ∞, mas não podemos afirmar, a priori, o valor delas. Vejamos:

Usando a mesma técnica da indeterminação anterior...

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3\left(-\dfrac{1}{x}+1\right) = -\infty(0+1) = -\infty(1) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 5x^2 + 7 = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2\left(\dfrac{1}{5x}+1+\dfrac{7}{5x^2}\right) = +\infty(0+1+0) = +\infty(1) = +\infty$.

Atividades (grupo 6).

1. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 - x^3 + 2x$. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + 5x - 6$.

A indeterminação do tipo 0 × ∞

Exemplo 11. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^3}\left(x^2+1\right)$. b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}(x)$.

Podemos observar que estas expressões geram indeterminações do tipo $\mathbf{0} \times \infty$, mas não podemos afirmar, a priori, o valor delas. Vejamos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2}{x^3} = \ldots$ Transformamos a indeterminação $\mathbf{0} \times \infty$ em ∞ / ∞. Daí você já sabe!

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2}{x^3} = \ldots = 0 .$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \ldots$ Novamente transformamos a indeterminação para ∞ / ∞. Usando a técnica da racionalização:

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x} = 3(+\infty) = +\infty .$$

Atividades (grupo 7).

1. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^2+3\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to5^+} \left(\frac{2}{x\text{-}5}\right)\left(x^2-25\right)$.

Limite fundamental exponencial (a indeterminação do tipo 1^∞)

O número *e* tem grande importância em diversos ramos das ciências, pois está presente em vários fenômenos naturais, por exemplo: Crescimento populacional, crescimento de populações de bactérias, desintegração radioativa (datação por carbono), circuitos elétricos, etc. Na área de economia, é aplicado no cálculo de juros.

Foi o Matemático Inglês *Jonh Napier* (1550-1617) o responsável pelo desenvolvimento da teoria logarítmica utilizando o número *e* como base. O número *e* é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração, e vale aproximadamente:

$$\boxed{e \cong 2{,}7182818}$$

Como o número *e* é encontrado em diversos fenômenos naturais, a função exponencial $f(x) = e^x$ é considerada uma das funções mais importantes da matemática, merecendo atenção especial de cientistas de diferentes áreas do conhecimento humano.

Proposição: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

A prova desta proposição envolve noções de séries. Utilizaremos o recurso das tabelas de aproximações e gráfico para visualizar este resultado.