Bradesco

Matemática Financeira

Departamento de Treinamento

ISO 9001 2000

Gestão de Treinamento na
Organização Bradesco

SUMÁRIO
Pág.

Apresentação

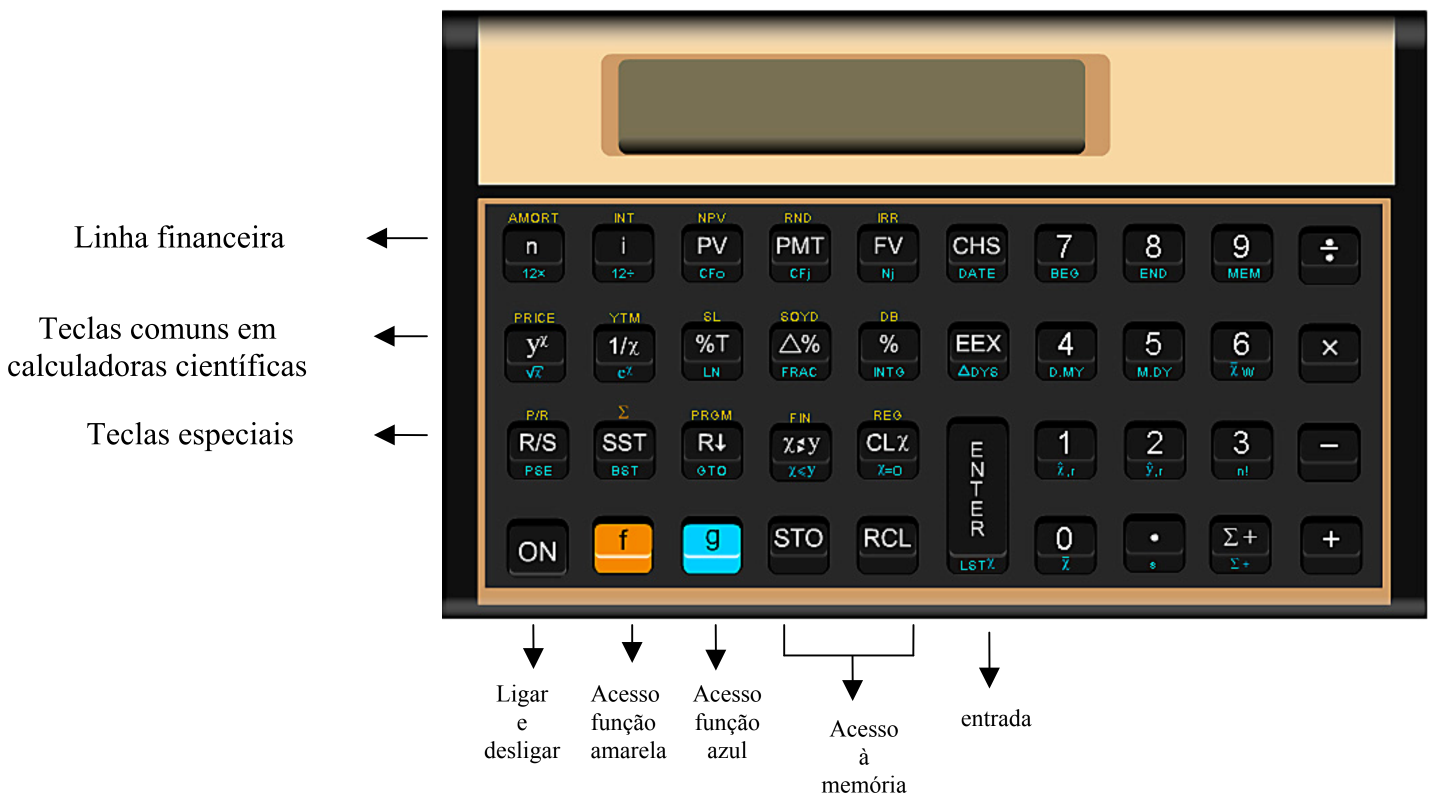
Caro Participante,

Esse material foi elaborado com o propósito de servir como apoio ao TreiNet de Matemática Financeira. Ele não substitui o curso, mas apresenta todo o conteúdo, exemplos resolvidos e exercícios propostos, que podem ajudá-lo a consolidar o conhecimento obtido durante o curso.

4636-1/Departamento de Treinamento

Principais Funções da HP-12C

Esta é uma calculadora HP-12C. A partir de agora você irá utilizá-la para realizar todos os seus cálculos, então, vamos verificar qual é a função de cada tecla?



01. Ligando e Desligando a Calculadora:

Para começar a usar a sua HP-12C, pressione a tecla [ON] . Se você pressionar [ON] novamente, a calculadora será desligada.

02. O Teclado

A maioria das teclas da HP-12C realiza duas ou até mesmo três funções, observe:

. Para usar a função primária, impressa em branco, basta pressioná-la.

. Para usar a função impressa em amarelo, pressione a tecla amarela, de prefixo [f] e, em seguida, pressione a tecla da função desejada.

. Para usar a função impressa em azul, pressione a tecla azul, de prefixo [g] e, então, pressione a tecla da função desejada.

03. Separando Dígitos

Se, ao ligar sua HP, você perceber que a parte inteira está separada da parte decimal por ponto (0.00), significa que está preparada para cálculo em US$. Para adaptá-la a cálculos em R$, ou seja (0,00), basta, com a máquina desligada, pressionar ao mesmo tempo as teclas [ON] e [•] soltando primeiro a tecla [ON] e, em seguida, a tecla.

04. Introduzindo Números

Pressione as teclas dos dígitos em seqüência. A tecla do ponto [•] deverá ser pressionada se o número possuir dígitos na parte decimal; se o número for inteiro, o ponto é irrelevante.

05. Cálculos Aritméticos Simples

Para realizar os cálculos, os números devem ser informados na ordem. Após a introdução do primeiro número, pressione a tecla [ENTER] e, em seguida, o segundo número e a operação a ser realizada ([+] [-] [x] ou [÷]); a resposta aparecerá no visor.

Exemplo:

a) 15 + 27 = 42

Pressione	**Visor**
15 [ENTER]	15,00
27 [+]	42,00

06. Tabulando Casas Decimais

Para fixar um número distinto de casas decimais, pressione a tecla [**f**] seguida da tecla de número correspondente à quantidade desejada de casas decimais (de 0 a 9 casas).
***Exemplo**: Acionando* [**f**] *4, aparecerá no visor: 0,0000.*

Durante o curso, você perceberá que nem sempre utilizamos 2 casas decimais (0,00).

Para ter um resultado mais preciso será necessário aumentar o número de casas. Você poderá determinar o número de casas que pretende usar: geralmente 2 casas decimais para reais, 4 para taxas e 6 para coeficientes.

Importante:

À medida em que reduzimos o número de casas decimais, o valor que aparece no visor será automaticamente arredondado, usando a seguinte convenção:

Se o número seguinte for:
- ✓ 0 a 4, mantém-se
- ✓ 5 a 9, arredonda-se

Exemplo: 200 ÷ 17

200 ENTER

17 ÷ ➔ 11,76

Se pressionarmos f 3 a resposta será ➔ 11,765

Se pressionarmos f 5 a resposta será ➔ 11,76471

Se pressionarmos f 9 a resposta será ➔ 11,76470588

Se pressionarmos f 0 a resposta será ➔ 12

Qual é a resposta correta?

Todas. Porém, convém observar o número de casas decimais que se deseja a cada exercício.

Obs.: *Perceba que estando com este resultado no visor (12) se multiplicarmos por 5, a HP-12C lhe trará como resultado 59, se pressionarmos* f 2 *o resultado será 58,82. Isso quer dizer que a HP-12C não multiplicou o número arredondado que aparecia no seu visor (12), mas sim, o resultado da divisão com todas as casas decimais (11,76470588).*

07. Limpando os Registros

A tecla clear **CLX** é utilizada somente para limpar o visor, porém, se pressionar **f** **CLX** limpará todos os registros.

08. Troca de Sinais

CHS que, em inglês, quer dizer "troca sinal", isto é, transforma o número que estiver no visor, se positivo, em negativo e vice-versa.

09. Cálculos em Cadeia

Toda vez que o resultado de um cálculo estiver no visor e se desejar armazená-lo para efetuar outro cálculo em seguida, não será necessário pressionar **Enter** , pois o resultado será armazenado automaticamente. Isto ocorre porque a HP-12C possui quatro registradores, os quais são usados para armazenamento de números durante os cálculos. Esses registradores (conhecidos por memórias de pilha operacional) são designados por X, Y, Z e T.

Exemplos:

a) 1 + 2 + 3 + 4 = 10

Demonstração Gráfica dos Registradores da Pilha Operacional

	X	Y	Z	T
Digitar 1	1,			
ENTER	1,00	1,00		
Digitar 2	2,	1,00		
ENTER	2,00	2,00	1,00	
Digitar 3	3,	2,00	1,00	
ENTER	3,00	3,00	2,00	1,00
Digitar 4	4,	3,00	2,00	1,00
+	7,00	2,00	1,00	
+	9,00	1,00		
+	10,00	1,00		

b) $\left\{\dfrac{18}{\left[24 \;-\; (15 \;+\; 3)\right]}\right\} \;=\; 3{,}00$

Teclado		**Visor**
18	$\boxed{\text{ENTER}}$	18,00
24	$\boxed{\text{ENTER}}$	24,00
15	$\boxed{\text{ENTER}}$	15,00
3	$\boxed{+}$	18,00
	$\boxed{-}$	6,00
	$\boxed{\div}$ →	3,00

Lembre-se:

A regra matemática diz que, primeiro, devemos resolver a multiplicação e a divisão, depois a soma e a subtração, respeitando parênteses, colchetes e chaves.

Vamos exercitar?

Calcule:

a) $\left\{ \dfrac{(7.500 + 230}{2.220} \right\}$

7.500 $\boxed{\text{ENTER}}$

230 $\boxed{+}$

2.220 $\boxed{\div}$ ➔ 3,48

b) $\left\{ \dfrac{(4.621 - 2.730)}{(6.230 + 1.723)} \right\}$

4.621 $\boxed{\text{ENTER}}$

2.730 $\boxed{-}$

6.230 $\boxed{\text{ENTER}}$

1.723 $\boxed{+}$

$\boxed{\div}$ ➔ 0,24

10. Funções de Porcentagem

a) Para calcular o valor correspondente à porcentagem de um número, introduza a base, pressione [ENTER] , introduza a porcentagem e pressione [%] .

Exemplo: *14 % de 300*

300 [ENTER] 14 [%] → 42,00

b) Para calcular a variação percentual entre dois números, introduza, como base, o valor mais antigo da operação, seguido da tecla [ENTER] , introduza o segundo número e pressione [Δ%] .

Exemplo:

No pregão de ontem, as ações da Cia. X S.A. subiram de R$ 5,37 para R$ 5,90. Qual foi a variação percentual?

5,37 [ENTER] 5,90 [Δ%] = 9,87%

c) Para calcular a porcentagem de um valor em relação a um total, introduza o valor correspondente ao total, digite o valor da porcentagem e pressione [**% T**] .

Exemplo:

No mês passado as despesas de uma indústria foram assim distribuídas:

- salários e encargos	*R$ 35.000,00*
- conservação e manutenção	*R$ 5.000,00*
- utilidades (luz, água, telefone etc.)	*R$ 7.000,00*
- gerais e diversas	*R$ 3.000,00*
Total das despesas	***R$ 50.000,00***

Qual é o percentual que os salários e encargos representam do total das despesas da fábrica?

50.000,00

35.000,00 [% T] = 70 %

11. Funções de Calendário

Para encontrar datas futuras ou passadas e o dia da semana correspondente, pressione inicialmente as teclas **g** **D.MY** (que representam as iniciais, em inglês, de dia, mês e ano) você estará fixando esta informação na sua calculadora. Portanto, não será necessário repetí-la a cada operação.

Obs.: *Lembre-se que, ao acionar a tecla* ***g*** *, a função em azul passa a ser utilizada.*

a) Data Futura

Para utilizar o calendário, introduza a data conhecida, separando o dia e o mês pela tecla **•** **,** e pressione a tecla **ENTER** **.** Digite o número de dias correspondente ao intervalo de tempo e pressione as teclas **g** **DATE** . Você estará calculando uma nova data.

Exemplo: *Qual é a data de vencimento de uma compra feita no dia 25.03.2002 para pagamento em 45 dias?*

25.032002 **ENTER** 45 **g** **DATE** ➩ 09.05.2002 4

Resposta: *Vencimento em 09.05.2002. Observe, no visor, um número que aparece à direita do resultado. Ele representa o dia da semana em que esta data ocorrerá. Neste exemplo, quinta-feira, conforme o quadro seguinte.*

Dias da semana

1 - segunda-feira
2 - terça-feira
3 - quarta-feira
4 - quinta-feira
5 - sexta-feira
6 - sábado
7 - domingo

b) Data Passada

No exemplo anterior vimos que o vencimento foi no dia 09.05.2002. Se a compra foi feita para pagamento em 45 dias, qual a data da compra?

09.052002 ENTER 45 CHS g **DATE** ➪ 25.03.2002 1

Resp.: A data da compra foi 25.03.2002, uma segunda-feira.

Obs.: *O CHS serve para indicar que se trata de data passada.*

c) Variação de Dias entre Datas

Para calcular o número de dias existentes entre duas datas, introduza a data mais antiga e pressione ENTER , em seguida, introduza a data mais recente e pressione as teclas **g** **△ DYS**

Exemplo:

Calcule o número de dias decorridos entre as datas 01.03.2002 e 31.10.2002.

01.032002 ENTER 31.102002 **g** △ **DYS** → 244 dias

***Resp**.: O número de dias entre as duas datas é 244.*

12. Usando a Memória - Armazenando e Recuperando Valores

- A HP-12C possui 20 memórias para armazenamento de valores, que vão de 0 a 9 e de • 0 a • 9.

- Para armazenar um valor, deve-se digitá-lo e, em seguida, pressionar a tecla **STO** seguida do número da memória desejada.
- Para recuperar a informação contida na memória é necessário pressionar a tecla **RCL** seguida do número da memória.

Exemplo:

Armazenar o número 15 na memória 0.

Digitar:
15 STO 0 ➔ o número continua no visor, porém já está armazenado. Quando você for utilizar o número armazenado basta pressionar RCL 0 , que ele retornará ao visor, podendo ser utilizado para qualquer cálculo.

13. Resolvendo uma Operação de Potenciação na HP-12C

Relembrando .... $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

em que:
2 é a base
3 é o expoente
8 é a potência

Assim sendo, o número que se repete como fator é denominado base que neste caso é 2. O número de vezes que a base se repete é denominado expoente no caso é 3. O resultado é denominado potência no caso 8.

Para calcular o resultado de um número elevado a um expoente qualquer, introduza a base, em seguida, digite o expoente e pressione a tecla y^x.

Exemplos:

a) $4^5 = 1.024$

Na calculador a:

4 ENTER 5 y^x ➔ 1.024

Quando o expoente for uma fração, será necessário, inicialmente, resolver a fração para depois calcular a potência.

b) $25^{30/360} = 1{,}31$

Na calculadora:

25 $\boxed{\text{ENTER}}$ 30 $\boxed{\text{ENTER}}$ 360 $\boxed{\div}$ $\boxed{Y^x}$ → 1,31

Quando o expoente for um número negativo, deve-se usar a tecla $\boxed{CHS}$

c) $3^{-5} = 0{,}0041$

Na calculadora:

3 $\boxed{\textbf{E}}$ 5 $\boxed{\textbf{CHS}}$ $\boxed{y^x}$ = 0,0041

Exercícios

1 - **A operação 6.428 - 1.346 + 527 - 3.278 + 15 é igual a:**

$\boxed{f}$	$\boxed{\text{CLX}}$
6.428	$\boxed{\text{ENTER}}$
1.346	$\boxed{-}$
527	$\boxed{+}$
3.278	$\boxed{-}$
15	$\boxed{+}$

Resp.: 2.346,00

2 - **Efetuando a operação 0,383 x 1,4796 x 2.838,4972, encontraremos a resposta:**

$\boxed{f}$	$\boxed{\text{CLX}}$
0,383	$\boxed{\text{ENTER}}$
1,4796	$\boxed{x}$
2.838,4972	$\boxed{x}$

Resp.: 1.608,54

3 - A divisão de 16.427,49 por 0,03951 tem como resultado:

16.427,49 $\boxed{\text{ENTER}}$

0,03951 $\boxed{\div}$

Resp.: 415.780,56

4 - Qual é o resultado de 18^5 ?

18 $\boxed{\text{ENTER}}$

5 $\boxed{Y^x}$

Resp.: 1.889.568,00

5 – **Resolvendo** $\left\{ (1 + 0{,}638)^{48/360} - 1 \right\} \times 100$

	$\boxed{\text{f}}$	$\boxed{\text{CLX}}$
1		$\boxed{\text{ENTER}}$
0,638		$\boxed{+}$
48		$\boxed{\text{ENTER}}$
360		$\boxed{\div}$
		$\boxed{y^x}$
1		$\boxed{-}$
100		$\boxed{\text{x}}$

Resp.: 6,80

6- Calcule a data e o dia da semana em que vencerá uma aplicação efetuada em 7.08.2002 pelo prazo de 35 dias.

	$\boxed{\text{f}}$	$\boxed{\text{CLX}}$	
7.082002		$\boxed{\text{ENTER}}$	
35	$\boxed{\text{g}}$	$\boxed{\text{DATE}}$	11.09.2002 2

Resp.: 11.09.2002, terça-feira.

Por enquanto, estas são as teclas e funções da calculadora HP-12C que precisávamos conhecer, para adentrarmos ao mundo da Matemática Financeira.
Aos poucos outras virão, a medida que formos tomando intimidade com a matéria!

Juros

Remuneração do Capital, podendo ser definido como o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

Taxa de Juros

É a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no fim de um período de tempo e o capital inicialmente empregado. A taxa de juros está sempre relacionada com uma unidade de tempo: dia, mês, ano etc.

Exemplo:

Qual a taxa de juros cobrada por um empréstimo de R$ 120,00 a ser resgatado por R$ 134,40 ao final de um ano?

Capital Inicial --------------------> R$ 120,00
Capital Final --------------------> R$ 134,40
Juros ------------------------------> R$ 14,40

Taxa de Juros --------------------> $\dfrac{\text{R\$ } 14{,}40}{\text{R\$ } 120{,}00} = 0{,}12 \times 100 = 12\%$

As taxas de juros são apresentadas na forma PERCENTUAL em jornais, revistas, circulares e assim devem ser utilizadas no teclado financeiro da HP (software).
Quando forem utilizadas em fórmula (álgebra) devem ser representadas na forma DECIMAL.

Em Resumo		
Forma Percentual	**Transformação**	**Forma Decimal**
12% a.a.	$\frac{12}{100}$	0,12
0,5% a.m.	$\frac{0,5}{100}$	0,005

Capitalização Simples ou Linear

Você sabe o que é Capitalização Simples?

É aquela em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial.

Neste regime de capitalização a taxa varia linearmente em função do tempo, ou seja, se quisermos converter a taxa mensal em anual, basta multiplicar por 12; se quisermos a taxa diária, tendo a mensal, basta dividir por 30, e assim por diante.

Cálculo dos Juros

O valor dos juros é obtido por meio da expressão:

$$\boxed{\mathbf{J = C \cdot i \cdot n}}$$

Simbologia adotada

J - Valor dos juros.

n - Prazo.

i - Taxa de juros.

C - Capital, Principal ou Valor Presente.

Exemplo:

Qual o valor dos juros correspondentes a uma aplicação de R$ 420,00, à taxa de 1,5% ao mês, por um prazo de 3 meses?

Se:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

J = 420,00 . 0,015 . 3

J = R$ 18,90

Na HP

420 [E]

0,015 [x]

3 [x] ➔ 18,90

Obs.: *Na fórmula usaremos a taxa (i) na forma decimal.*

Cálculo do Capital

Qual o capital que, à taxa de 1,5% ao mês, rende juros de R$ 18,90 em 3 meses?

Se:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

Então:

$$\boxed{C = \frac{J}{i \cdot n}}$$

Logo:

$$\boxed{C = \frac{18{,}90}{0{,}015 \cdot 3}}$$

C = R$ 420,00

Na HP

18,90 [E]

0,015 [E]

3 [x]

[÷] ➔ 420,00

Cálculo da Taxa

O Sr. Luiz Carlos aplicou R$ 420,00 por um prazo de 3 meses e obteve um rendimento de R$ 18,90. Qual a taxa de juros mensal correspondente a essa aplicação?

Se:

$$\mathbf{J = C.\ i.\ n}$$

Então:

$$\mathbf{i = \frac{J}{C.\ n}}$$

Logo:

$$\mathbf{i = \frac{18{,}90}{420{,}00\ .\ 3}}$$

i = 0,015 ou 1,5% a.m.

Na HP

18,90	E		
420,00	E		
3	x		
	÷	→	0,015
100	x	→	1,5%

***Obs.**: Multiplicamos por 100 para encontrarmos o resultado em percentual.*

Cálculo do Prazo

Sabendo-se que os juros de R$ 18,90 foram obtidos de uma aplicação de R$ 420,00, à taxa de 1,5% ao mês, calcule o prazo dessa aplicação.

Se:

$$\mathbf{J = C.\ i.\ n}$$

Então:

$$\mathbf{n = \frac{J}{C.\ i}}$$

Logo:

$$\mathbf{n = \frac{18{,}90}{420{,}00\ .\ 0{,}015}}$$

n = 3 meses

Na HP

18,90	E		
420	E		
0,015	x		
	÷	→	3

EXERCÍCIOS:

01 - Um investidor aplicou R$ 518,00 por um prazo de 3 meses. Quanto receberá de juros, sabendo-se que a taxa é de 4,28% a.m.?

Resp.: R$ 66,51

02 - Uma loja me vendeu uma geladeira, cujo preço à vista é R$ 636,00, para pagamento no prazo de 9 meses e vou lhe pagar juros no valor de R$ 467,36. Qual a taxa de juros mensal cobrada pela loja?

Resp.: 8,16 % a.m.

Montante

Montante (M) ou Valor Futuro é igual à soma do capital inicial mais os juros referentes ao período da aplicação: $\boxed{\mathbf{M = C + J}}$

Para entender a fórmula do montante é necessário que você retome a fórmula de juros:

$$\boxed{\mathbf{J = C \,.\, i \,.\, n}}$$

Vamos fazer passo a passo, utilizando o seguinte exemplo:

C = R$ 420,00
n = 3 meses
i = 1,5% a.m.
J = R$ 18,90

M = C + J ⟶ M = 420,00 + 18,90 = 438,90

➔ No próximo passo vamos substituir o **J** pela fórmula de juros: **J = C. i. n**

M = C + (C. i. n) ⟶ M = 420,00 + (420,00 . 0,015 . 3) = 438,90

➔ Existem 2 termos iguais (C), vamos colocar um (C) em evidência:

M = C (1 + i. n) ⟶ M = 420,00 **.** (1 + 0,015 . 3) = 438,90

$$\boxed{\mathbf{M = C\ (1 + i.\,n)}}$$

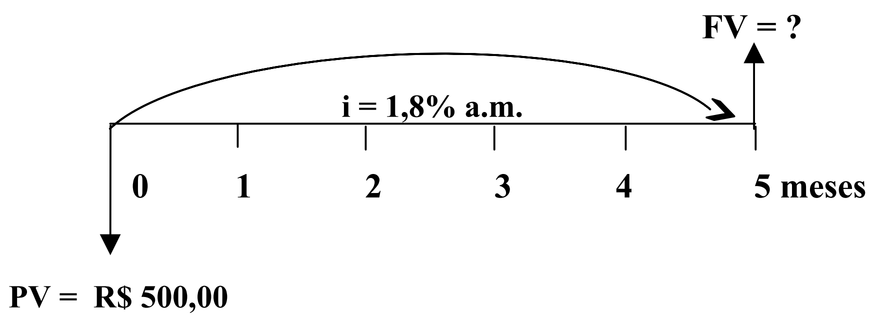
Esta é a fórmula do Montante ou Valor Futuro.

Para que nos habituemos com a linguagem da calculadora financeira, vamos chamar o "M" de "FV" (Valor Futuro) e o "C" de "PV" (Valor Presente). Assim, se substituirmos as letras, a equação ficará:

$$\boxed{\mathbf{FV = PV\,.\,(1 + i.n)}}$$

Veja esse exemplo.

O Sr. Anselmo aplicou R$ 500,00 a juros de 1,80% a.m., com vencimento para daqui a 5 meses. Qual o montante a ser recebido pelo Sr. Anselmo?



Fórmula

FV = PV . (1 + i.n)

FV = 500,00 x (1 + 0,018 x 5)

FV = R$ 545,00

Na HP

500 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

0,018 $\boxed{E}$

5 $\boxed{x}$

$\boxed{+}$

$\boxed{x}$ → 545,00

Valor Presente

Valor Presente ou Valor Atual é o valor do capital que, aplicado a uma determinada taxa e a um determinado prazo, gera um montante.

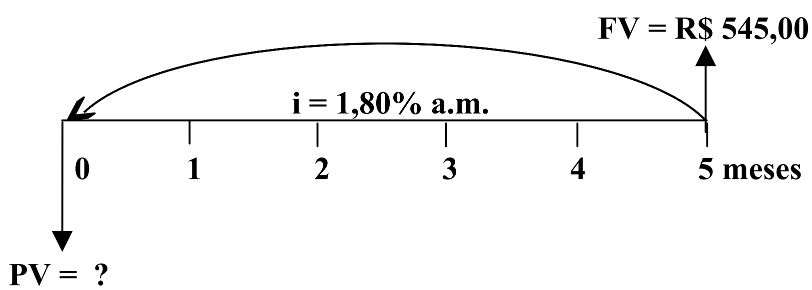
Se: **FV = PV . (1 + i.n)**

Então:

$$\boxed{PV = \frac{FV}{(1 + i \, . \, n)}}$$

Exemplo:

Quanto o Sr. José precisará aplicar hoje para resgatar R$ 545,00, daqui a 5 meses, à taxa de 1,80% a.m.?



Fórmula

$$PV = \frac{FV}{(1 + i.n)} = \frac{545{,}00}{(1 + 0{,}018 \, . \, 5)} = 500{,}00$$

Na HP

545	$\boxed{E}$
1	$\boxed{E}$
0,018	$\boxed{E}$
5	$\boxed{x}$
	$\boxed{+}$
	$\boxed{\div}$ ➔ 500,00

Obs.: *Até agora o prazo estava compatível com a taxa, ou seja, na mesma unidade de tempo. Quando não estiver, teremos de fazer o devido ajuste.*

Exemplo:

Tenho uma taxa de 5% ao mês para um prazo de 37 dias.

Logo: $\frac{5}{30} \times 37 \rightarrow 6{,}17\%$ a.p.

Em juros simples, é dessa maneira que a taxa é alterada.

Vamos treinar

01 - Calcule o montante (FV) da aplicação de um capital (PV) de R$ 1.800,00, pelo prazo de 8 meses, a uma taxa de 2% a.m.

Resp.: R$ 2.088,00

02 - Qual o valor de resgate de um investimento no valor de R$ 2.127,00, à taxa de 1,50% a.m., pelo prazo de 92 dias.

Resp.: R$ 2.224,84

03 - Calcule o Valor Presente de uma aplicação efetuada há 45 dias, à taxa de 3,50% ao bimestre, que tem como resgate R$ 14.230,00.

Resp.: R$ 13.866,02

04 - Calcule o Valor Presente de uma aplicação, a uma taxa de 4% a.m., cujo valor de resgate, ao final de 5 meses, será de R$ 3.600,00.

Resp.: R$ 3.000,00

Capitalização Composta ou Exponencial

No regime de capitalização composta, diferente do que vimos até agora, **a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior**.

Montante

Quando desenvolvemos o raciocínio da capitalização simples, no capítulo anterior, chegamos à fórmula algébrica abaixo. Você está lembrado?

$$\boxed{\mathbf{FV = PV\ (1 + i\ .\ n)}}$$

Com os dados seguintes, vamos desenvolver o cálculo (período a período), para encontrarmos o montante.

PV = 1.000,00
n = 3 meses
i = 5% a.m. *(Lembre-se, para usar na fórmula é necessário dividir a taxa por 100)*

1º Mês → O Capital é de R$ 1.000,00

FV = 1.000,00 x (1 + 0,05 x 1) = 1.050,00

2º Mês → O Capital agora é R$ 1.050,00

FV = 1.050,00 x (1 + 0,05 x 1) = 1.102,50

3º Mês → O Capital nesse instante é R$ 1.102,50.

FV = 1.102,50 x (1 + 0,05 x 1) = 1.157,63

➲ ***Isso significa:***

FV = PV x (1 + i) x (1 + i) x (1 + i)

FV = 1.000,00 x (1 + 0,05) x (1 + 0,05) x (1+ 0,05)

Daí teremos:

$FV = 1.000,00\ (1 + 0,05)^3 = R\$\ 1.157,63$

Na HP:

1.000 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

0,05 $\boxed{+}$

3 $\boxed{y^x}$

$\boxed{x}$ ➔ 1.157,63

e assim chegamos à fórmula geral:

$$\boxed{\mathbf{FV = PV\ (1 + i)^n}}$$

$\mathbf{(1 + i)^n}$ é chamado de **Fator de Acumulação de Capital (FAC)** ou Fator de capitalização para pagamento único.

Exemplo:

Qual o valor de resgate (FV) de uma aplicação de R$ 1.500,00, ao final de 7 meses, sabendo que a taxa é de 3,2% a.m.?

Utilizando a fórmula $FV = PV\ (1 + i)^n$, teremos:

$FV = 1.500,00 \times (1 + 0,032)^7$

$FV = 1.870,03$

Na HP:

1.500 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

0,032 $\boxed{+}$

7 $\boxed{y^x}$

$\boxed{x}$ ➔ 1.870,03

Cálculo do Valor Presente

Se: $FV = PV\ (1 + i)^n$

Então:

$$\boxed{PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}}$$

Exemplo:

Quanto o Sr. Márcio deverá aplicar hoje, para obter R$ 1.157,63, daqui a 3 meses, à taxa de 5% a.m.?

Substituindo os valores na fórmula, teremos:

$$\boxed{PV = \frac{1.157,63}{(1 + 0,05)^3} = 1.000,00}$$

Na HP:

1.157,63 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

0,05 $\boxed{+}$

3 $\boxed{y^x}$

$\boxed{\div}$ → 1.000,00

Vamos exercitar?

01 - Apliquei R$ 2.500,00 hoje e irei resgatar daqui a 2 meses, com taxa prefixada de 1,09% a.m. Qual o valor de resgate?

Resp.: R$ 2.554,80

02 - Precisarei de R$ 5.000,00 para utilizar daqui a 6 meses. Quanto devo aplicar hoje, sabendo que a taxa prefixada para uma determinada aplicação está em 1,02% a.m.?

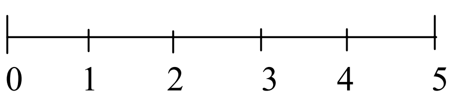
Resp.: R$ 4.704,63

Até então, resolvemos os exercícios pela fórmula algébrica. A partir deste módulo, começaremos a trabalhar também com Fluxo de Caixa (gráfico) e usaremos, também, as teclas financeiras da calculadora.

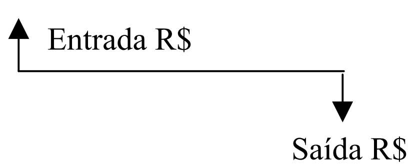
Entendendo:

Fluxo de Caixa:
Tem por objetivo facilitar a visualização da operação proposta. Sua elaboração se dá por uma linha horizontal, que é chamada linha do tempo, que pode ser expressa em dias, meses, anos etc.

Modelo:



Existem também as setas verticais, que representam entradas e saídas de dinheiro. Quando indicada para cima mostra entrada de dinheiro e, para baixo, indica saída de dinheiro. Veja o modelo:



Obs.: *Todos os valores representados por setas apontando para baixo devem ser digitados na calculadora com sinal negativo. Chega, então, o momento de utilizarmos a tecla* $\boxed{CHS}$.

Conhecendo o teclado financeiro da HP-12C ...

Os cálculos financeiros podem, também, ser resolvidos pelo teclado localizado na primeira linha da HP-12C .

Teclas		***Significado***
n	→	prazo
i	→	taxa (representada na forma percentual)
PV	→	valor presente ou atual
PMT	→	valor das prestações ou pagamentos
FV	→	valor futuro ou montante

Observações:

1) As teclas financeiras, quando usadas, não exigem uma determinada ordem. Isto significa que poderemos iniciar a resolução utilizando qualquer uma das teclas, bastando informar os dados da questão nas teclas correspondentes e, em seguida, acionar a tecla que você procura como resposta.

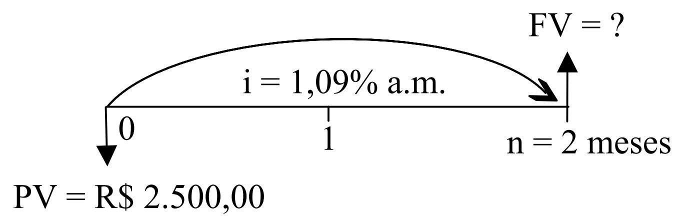
2) Prazo e taxa devem ser informados na mesma unidade de tempo.

3) São necessários, no mínimo, três dados ou informações, para que seja dada a resposta de um cálculo.

4) A taxa de juros deve ser indicada na forma percentual (%).

Vamos fazer juntos, pelo teclado financeiro, o exercício nº 1?

✓ ***Fluxo de Caixa***



✓ Usando o teclado financeiro:

f CLX

2.500,00 CHS PV

1,09 i *(Atenção: taxa na forma percentual)*

2 n

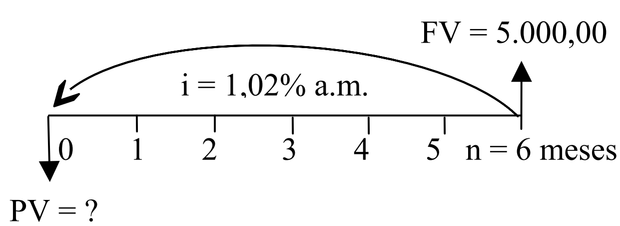
FV ➔ R$ 2.554,80

Observações:

A HP 12-C trabalha com o conceito de fluxo de caixa (entradas e saídas de dinheiro). Portanto, toda vez que fizer uso das teclas financeiras para resolver problemas financeiros, um dos valores (PV ou FV) será inserido como um número negativo.

Para reforçarmos os conceitos anteriores, façamos o exercício nº 2.

✓ ***Fluxo de Caixa:***



✓ Utilizando o teclado financeiro:

5.000,00 CHS FV

1,02 i

6 n

PV ➔ R$ 4.704,63

Agora é a sua vez. Resolva os exercícios seguintes:

Lembrete:
Em juros compostos não podemos mais dividir ou multiplicar a taxa de juros, pois são taxas compostas. No próximo capítulo, veremos como alterar uma taxa composta. Portanto, a partir de agora, para igualarmos prazo e taxa, alteraremos o prazo.

01 - Calcular o montante de uma aplicação no valor de R$ 950,00, pelo prazo de 3 meses, a uma taxa de 2,23% ao mês.

Resp.: R$ 1.014,98

02 - Uma pessoa deseja obter R$ 4.680,00 dentro de seis meses. Quanto deverá aplicar, hoje, num fundo que rende 2,197% ao trimestre?

Resp.: R$ 4.480,94

03 - Fiz uma aplicação de R$ 750,00 e, após 3 meses, resgatei R$ 868,22. Qual foi a taxa mensal proporcionada pela aplicação?

Resp.: 5% a.m.

04 - Se aplicar R$ 800,00, irei resgatar R$ 912,93; isso porque a taxa prefixada foi de 4,5% a.m. Qual é o prazo para que isso ocorra?

Resp.: 3 meses

Taxas Equivalentes

Dizemos que duas taxas são equivalentes se, considerados o mesmo prazo da aplicação e o mesmo capital, produzirem o mesmo montante.

Lembrete:
Já vimos em capitalização simples o conceito de taxa proporcional, o que não deve ser confundido com taxas equivalentes.

Fórmula genérica

$$iq = \left[(1 + it)^{q/t} - 1 \right] \times 100$$

Em que:

iq = Taxa para o prazo que eu quero

it = Taxa para o prazo que eu tenho

Lembre-se*: como vamos trabalhar com uma fórmula algébrica, a taxa deve estar na forma decimal (dividida por 100)*

q = Prazo que eu quero

t = Prazo que eu tenho

Os prazos serão informados em números de dias, meses, anos etc.

Exemplo 1:

Tenho a taxa de 26,8242% a.a. (360 dias) e **quero** a taxa mensal (30 dias).

Vamos transportar os dados para a fórmula:

$$i_m = \left[\left(1 + 0{,}268242\right)^{30/360} - 1\right] . 100 \quad \textbf{ou} \quad i_m = \left[\left(1 + 0{,}268242\right)^{1/12} - 1\right] . 100$$

Digitando na HP

1	E	1	E
0,268242	+	0,268242	+
30	E	1	E
360	÷	12	÷
	y^x		y^x
1	−	1	−
100	x	100	x
	➔ 2% a.m.		➔ 2% a.m.

Exemplo 2:

Temos a taxa de 2% a.m. e queremos a taxa equivalente para 35 dias.

Vamos montar a fórmula:

$$i_{35d} = \left[\left(1 + 0{,}02\right)^{35/30} - 1\right] . \; 100$$

Digitando na HP:

1	$\boxed{E}$
0,02	$\boxed{+}$
35	$\boxed{E}$
30	$\boxed{\div}$
	$\boxed{y^x}$
1	$\boxed{-}$
100	$\boxed{x}$
	➔ 2,3372% a.p.

Obs.: *Neste caso, um dos períodos é de 35 dias, não correspondendo a mês cheio, portanto temos de trabalhar, necessariamente, com quantidade de dias.*

Seguindo o mesmo raciocínio, faça alguns exercícios de fixação e veja como é fácil!

Exercícios de Fixação

01 - Calcule as taxas equivalentes:

A) tenho:

i = 2,48% a.m.

quero: 12 meses

Resp.: 34,17% a.a.

B) tenho:

i = 153,24% a.a.

❶ *quero*: 1 mês

Resp.: 8,05% a.m.

❷ *quero*: $i_{33\ dias}$

Resp.: 8,89% a.p.

❸ *quero*: $i_{90\ dias}$

Resp.: 26,15% a.p.

C) tenho:

$i_{35\ dias}$ = 7,95% a.p.

❶ *quero:* $i_{360\ dias}$

Resp.: 119,64% a.a.

❷ *quero*: $i_{30\ dias}$

Resp.: 6,78% a.m.

❸ *quero*: $i_{1\ dia}$

Resp.: 0,22% a.d.

Para que a sua HP-12C funcione de maneira correta, quando o prazo (n) não for inteiro, é necessário que ela esteja ajustada para a convenção exponencial (juros compostos), isso quer dizer que precisa constar do visor a letra "c". Caso ela não esteja ajustada, pressione as teclas STO EEX *seqüencialmente. Quando a letra "c" não aparece no visor, a HP não capitaliza prazos fracionários.*

A empresa XY Ltda. solicita um empréstimo no valor de R$ 12.500,00, pelo prazo de 33 dias, a uma taxa de 89,5976% ao ano. Qual o valor a ser pago?

Fórmula Algébrica:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^{n}$$
$$FV = 12.500,00 \cdot (1 + 0,895976)^{33/360}$$
$$FV = 13.254,95$$

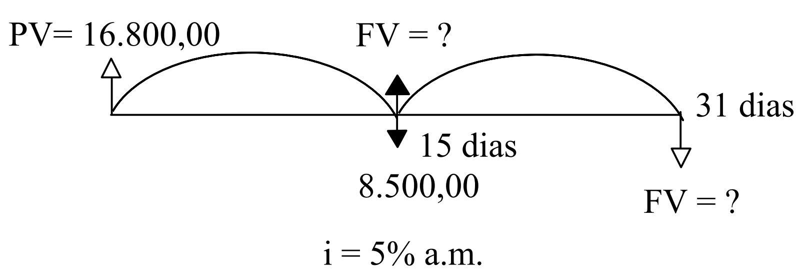
Teclado financeiro:

	$\boxed{f}$	$\boxed{CLX}$
12.500	$\boxed{CHS}$	$\boxed{PV}$
89,5976		$\boxed{i}$
33		$\boxed{E}$
360	$\boxed{\div}$	$\boxed{n}$
		$\boxed{FV}$ ➔ 13.254,95

Vamos conhecer um empréstimo com pagamento intermediário utilizando também taxas equivalentes

Exemplo:

Determinada empresa fez um empréstimo no valor de R$ 16.800,00 pelo prazo de 31 dias, a uma taxa de 5% a.m. Se, 15 dias depois, ela fizer um pagamento de R$ 8.500,00, de quanto será a dívida no vencimento?



1º Passo: *Calcular o montante da dívida (FV) até 15º dia:*

Pelas teclas financeiras: **ou** **pela fórmula:**

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{CLX}}$

16.800 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

5 $\boxed{\text{i}}$

15 $\boxed{\text{E}}$

30 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{FV}}$ ➔ 17.214,88

$$FV = 16.800{,}00 \,.\, (1 + 0{,}05)^{15/30}$$

$$FV = 17.214{,}88$$

O montante (saldo devedor) no 15º dia é de R$ 17.214,88; deste valor devemos deduzir o pagamento efetuado neste dia (R$ 8.500,00). O que sobra é o saldo devedor remanescente, que será atualizado e pago no próximo período; no nosso exemplo será no 31º dia (ou seja, 16 dias depois). Portanto, quando existirem várias amortizações parciais, será necessário que, a cada pagamento, primeiro seja calculado o saldo devedor até aquele dia para depois abater o valor pago.

Voltemos ao nosso exemplo:

Saldo devedor no 15º dia ⇒ R$ 17.214,88

Pagamento no 15º dia ⇒ R$ 8.500,00

Saldo devedor remanescente ⇒ R$ 8.714,88, que será o valor presente (PV) do próximo período.

2º Passo: *Calcular o montante (FV) no 31º dia;*

Teclado financeiro:

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{CLX}}$

8.714,88 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

5 $\boxed{\text{i}}$

16 $\boxed{\text{E}}$

30 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{FV}}$ ➔ 8.944,63

ou

$$FV = 8.714{,}88 \,.\, (1 + 0{,}05)^{16/30}$$

$$FV = R\$\ 8.944{,}63$$

Resp.*: No vencimento do empréstimo, a dívida será de R$ 8.944,63.*

Exercícios

1) Uma empresa fez um empréstimo no valor de R$ 5.700,00, por um prazo de 35 dias, a uma taxa de 3,5% a.m. Foi feita uma amortização no 20º dia no valor de R$ 2.500,00. Qual o valor da dívida no vencimento?

Resp.: R$ 3.390,05

2) Qual o valor de resgate de um investimento, no valor de R$ 7.000,00, à taxa de 1,07% a.m., pelo prazo de 32 dias?

Resp.: R$ 7.079,92

3) Calcule o valor presente de uma aplicação efetuada há 33 dias, à taxa de 4,05% ao bimestre, que tem como valor de resgate R$ 3.781,68.

Resp.: R$ 3.700,00

Prestações/Rendas

Observação:
Veremos aqui o funcionamento de outra tecla financeira → $\boxed{PMT}$

- Conceito

A série de pagamentos nada mais é do que uma sucessão de capitais exigíveis periodicamente, seja para amortizar uma dívida, seja para formar um fundo de reserva.

As séries de pagamentos podem ser:

- Constantes
Se os valores forem iguais.

- Periódicas
Se todos os períodos forem iguais.

Os pagamentos ou recebimentos podem ser:

- ***Postecipados***
Se os valores são exigíveis no final do primeiro período.

- Antecipados
Se os valores são exigíveis no início do período.

Uma série uniforme caracteriza-se por uma sucessão de capitais iguais (pagamentos ou recebimentos).

Bradesco

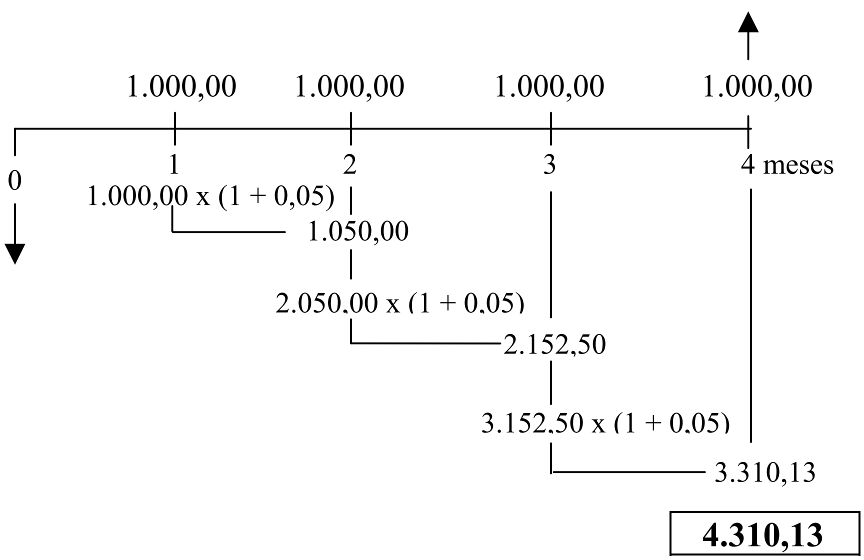
Prestações Postecipadas

(Montante de uma Renda)

Para encontrarmos o valor futuro de uma série de pagamentos ou recebimentos iguais, de forma composta, observemos o exemplo abaixo:

O Sr. Pedro deposita R$ 1.000,00, mensalmente, em um fundo de investimento, durante 4 meses, à taxa de 5% ao mês. Qual o montante a ser recebido pelo Sr. Pedro?

Fluxo de Caixa



Comentário

Sobre o 1º depósito de R$ 1.000,00 são calculados juros do 1º mês, soma-se o 2º depósito e calcula-se mais um mês de juros, e assim sucessivamente até o último depósito, que simplesmente será somado. Sobre esse último não haverá juros, pois o montante é calculado exatamente nesta data.

Observe a seqüência dos cálculos:

Fórmula ⟶ $FV = PV\,(1 + i)^n$

*O **n** neste caso será 1, pois estamos calculando mês a mês.*

1º mês ⟶ FV = 1.000,00 (1+ 0,05) = 1.050,00

Depósito da 2º parcela = ⟶ 1.000,00

2.050,00

2º mês ⟶ FV = 2.050,00 (1+ 0,05) = 2.152,50

Depósito da 3º parcela = ⟶ 1.000,00

3.152,50

3º mês ⟶ FV = 3.152,50 (1+ 0,05) = 3.310,13

Depósito da 4º parcela = ⟶ 1.000,00

4.310,13

O cálculo foi feito mês a mês apenas para entendimento, pois existe a fórmula específica para se chegar ao montante de uma série de parcelas iguais, que é a seguinte:

Fórmula

$$\boxed{FV = PMT \ . \left\{ \frac{\left[(1+i)^n - 1 \right]}{i} \right\}}$$

$$FV = 1.000,00 \ . \left\{ \frac{\left[(1+0,05)^4 - 1 \right]}{0,05} \right\}$$

FV = R$ 4.310,13

Digitando na HP:

1.000	ENTER
1	ENTER
0,05	+
4	y^x
1	−
0,05	÷
	x ➔ 4.310,13

Usando as teclas financeiras da HP, o cálculo ficará ainda mais fácil.

PMT = Valor das Prestações

Teclado financeiro:

1.000	**CHS**	**PMT**
4		**n**
5		**i**
FV	→	**R$ 4.310,13**

Valor Presente de uma Renda

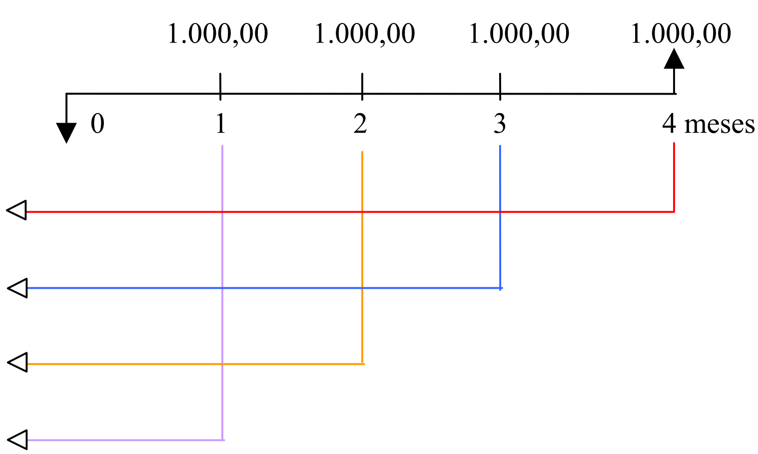
O objetivo é trazer todos os pagamentos ou prestações para o momento inicial.

Veja como é fácil

Exemplo:

Quanto o Sr. Pedro precisará aplicar hoje, para que receba mensalmente R$ 1.000,00, durante 4 meses, à taxa de 5% ao mês?

Fluxo de Caixa



$$PV = \frac{1.000,00}{(1+0,05)^4} = 822,70$$

$$PV = \frac{1.000,00}{(1+0,05)^3} = 863,84$$

$$PV = \frac{1.000,00}{(1+0,05)^2} = 907,03$$

$$PV = \frac{1.000,00}{(1+0,05)^1} = 952,38$$

PV = R$ 3.545,95

Note que, calcular o valor presente significa extrair da prestação a taxa de juros nela embutida. Quando falamos em prestações, devemos lembrar que cada uma vence em um período diferente. Portanto, os juros embutidos são diferentes em cada período. Para efetuarmos os cálculos demonstrados no gráfico, aplicamos a fórmula: $\boxed{PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}}$ a cada parcela, conforme abaixo:

$$PV = \frac{1.000,00}{(1 + 0,05)} + \frac{1.000,00}{(1 + 0,05)^2} + \frac{1.000,00}{(1 + 0,05)^3} + \frac{1.000,00}{(1 + 0,05)^4}$$

$$PV = 952,38 + 907,03 + 863,84 + 822,70$$

$$PV = 3.545,95$$

Da mesma forma, como no cálculo do montante, o cálculo do valor presente pode ser feito com a fórmula abaixo ou pelas funções financeiras da HP.

Fórmula

$$\boxed{PV = PMT \cdot \left\{ \frac{[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \right\}}$$

$$PV = 1.000,00 \cdot \left\{ \frac{[1 - (1 + 0,05)^{-4}]}{0,05} \right\}$$

PV = R$ 3.545,95

Teclado financeiro:

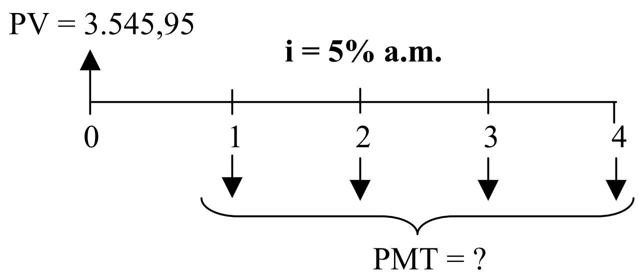
1.000	**CHS**	**PMT**
4		**n**
5		**i**
PV	→	**R$ 3.545,95**

Na HP:

1.000	E	
1	E	
1	E	
0,05	+	
4	CHS	
	y^x	
	−	
0,05	÷	
	x	→ 3.545,95

Valor da Prestação ou Renda

O Sr. Pedro efetuou um empréstimo no valor de R$ 3.545,95, para pagamento em 4 vezes, a uma taxa de juros de 5% a.m. Qual o valor das prestações?



Fórmula

$$\boxed{PMT = PV \left\{ \frac{i}{[\,1 - (1+i)^{-n}\,]} \right\}}$$

$$PMT = 3.545,95 \left\{ \frac{0,05}{[\,1 - (1+0,05)^{-4}\,]} \right\}$$

PMT = 1.000,00

Na HP:

0,05 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

1 $\boxed{E}$

0,05 $\boxed{+}$

4 $\boxed{CHS}$ $\boxed{y^x}$

$\boxed{-}$ $\boxed{\div}$

3.545,95 $\boxed{x}$ ➔ 1.000,00

ou

Teclado financeiro:

3.545,95 $\boxed{\textbf{CHS}}$ $\boxed{\textbf{PV}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ $\boxed{\textbf{n}}$

$\boxed{\textbf{5}}$ $\boxed{\textbf{i}}$

R$ 1.000,00 ⟵ $\boxed{\textbf{PMT}}$

Exercícios:

01) Ao vender uma televisão, o vendedor propôs os seguintes planos:

- Pagamento à vista de R$ 1.300,00 ou
- Em 3 parcelas de R$ 468,45 (sem entrada)

Qual é a taxa cobrada no financiamento?

Resp.: 4% a.m.

02) Qual o capital que será necessário aplicar hoje em Caderneta de Poupança para que uma pessoa receba mensalmente uma parcela de R$ 150,00, durante 10 anos, sabendo que a poupança paga juros reais de 0,5% a.m. ?

Resp.: R$ 13.511,02

03) Certo cliente financiou um veículo no valor de R$ 18.900,00 em 4 parcelas iguais e mensais. Se a taxa de juros foi de 5% ao mês, qual o valor das parcelas?

Resp.: R$ 5.330,02

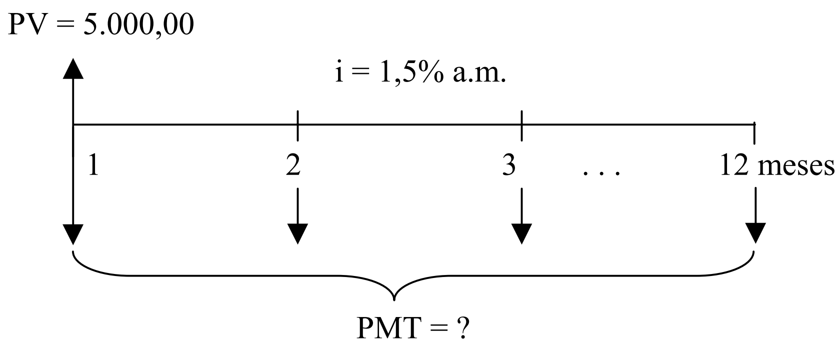
Prestações Antecipadas *(Valor da Prestação ou Renda)*

As prestações são ditas antecipadas quando o primeiro pagamento é efetuado no ato do financiamento, considerando-se como entrada.

Exemplo:

Dona Maria fez um financiamento de R$ 5.000,00 por 12 meses, à taxa de 1,5% ao mês. Qual o valor das prestações, considerando-se que a primeira foi paga antecipadamente?

Fluxo de Caixa



Exemplo pelo teclado financeiro:

Considerações importantes:

Antes de utilizar as teclas financeiras, verificar se a sua máquina contém no visor: "Begin". Caso não tenha, digite as teclas $\boxed{g}$ $\boxed{7}$ BEG .

O que significa?

"Begin" significa início do período, ou seja, quando a prestação é antecipada, ela é paga no início do período.

Utilizando esse recurso, você não precisa descontar a parcela de entrada, porém precisará informar a quantidade de parcelas, incluindo a entrada. Vale lembrar que as teclas $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$ devem ser usadas somente em caso de prestações iguais, quando a parcela de entrada for igual às demais.

Sua máquina, então, estará programada para cálculos com prestações antecipadas, e esta informação estará no visor, não sendo necessário repetir o comando a cada cálculo. Quando as prestações forem postecipadas, retirar este recurso do visor, com o comando: $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{8}}$ END

Podemos, agora, usar o teclado financeiro, para resolver o exemplo anterior.

Teclado financeiro

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$

5.000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$

12 $\boxed{\text{n}}$

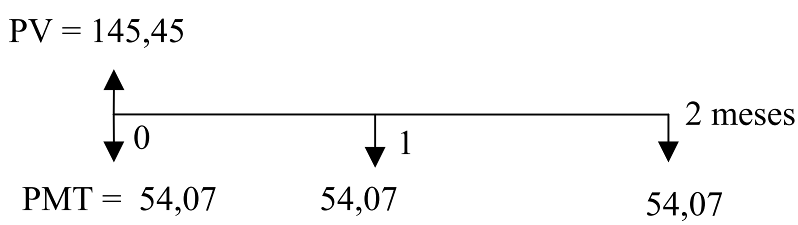
1,5 $\boxed{\text{i}}$

$\boxed{\text{PMT}}$ → R$ 451,63

Lembre-se:
No Banco, a maior parte das operações são postecipadas (empréstimos, financiamentos etc.), tenha o hábito de tirar o "begin" do visor, após o seu uso.

Para entender melhor o conceito de prestação antecipada, acompanhe o desenvolvimento do exemplo abaixo:

Uma calculadora HP-12C estava custando R$ 145,45 à vista ou em três pagamentos de R$ 54,07. Considerando-se que o primeiro pagamento é no ato da compra, qual é a taxa de juros mensal cobrada pela loja?



Se a 1ª parcela foi paga no ato, podemos entender que a loja não financiou o valor total, e sim o valor R$ 145,45 menos a entrada R$ 54,07, portanto o valor R$ 91,38. É somente sobre o valor financiado que incidem juros.

Vamos alimentar a HP (sem "Begin") ou utilizando a função "Begin"

Sem "Begin"			Com "Begin"		
				$\boxed{g}$	$\boxed{BEG}$
91,38	$\boxed{CHS}$	$\boxed{PV}$	145,45	$\boxed{CHS}$	$\boxed{PV}$
2		$\boxed{n}$	3		$\boxed{n}$
54,07		$\boxed{PMT}$	54,07		$\boxed{PMT}$
12%	←	$\boxed{i}$	12%	←	$\boxed{i}$

Obs.: Como as parcelas são mensais, a taxa de 12% é ao mês.

Você percebeu que pode resolver um exercício com prestação antecipada sem o uso do $\boxed{g}$ $\boxed{BEG}$ *, mas lembre-se que neste caso, deverá diminuir do valor à vista, a entrada.*

Tente resolver o exercício abaixo:

- Uma máquina de lavar custa à vista R$ 1.300,00. Uma loja oferece duas opções de parcelamento:

  - Plano A – 6 parcelas iguais, sem entrada;
  - Plano B – 6 parcelas iguais, com a primeira no ato da compra.

  - Calcule o valor das prestações, para os dois planos, considerando uma taxa de 4% a.m.

Resp.: Plano A = R$ 247,99; Plano B = R$ 238,45

Coeficientes de Prestações

Com o conceito de valor presente para rendas de termos constantes ou anuidades, pode-se determinar o valor de uma prestação por meio da construção de coeficientes de financiamento.

Exemplo:
- *Taxa mensal*: 5% (i)
- *Prazo*: 4 meses (n)

Cálculo do coeficiente:

$$\boxed{CF = \left\{ \frac{i}{\left[1 - (1 + i)^{-n}\right]} \right\}}$$

$$CF = \left\{ \frac{0,05}{1 - (1 + 0,05)^{-4}} \right\} = 0,282012$$

Na HP:

0,05 $\boxed{E}$
1 $\boxed{E}$
1 $\boxed{E}$
0,05 $\boxed{+}$
4 $\boxed{CHS}$ $\boxed{y^x}$
$\boxed{-}$
$\boxed{\div}$ → 0,282012

Teclado financeiro

1 $\boxed{\textbf{CHS}}$ $\boxed{\textbf{PV}}$
5 $\boxed{\textbf{i}}$
4 $\boxed{\textbf{n}}$
$\boxed{\textbf{PMT}}$ → **0,282012**

Resolva os seguintes exemplos:

1) Com os dados abaixo, encontrar o coeficiente:

- Taxa mensal = 3,5% a.m.
- Prazo = 12 meses

Resp.: 0,103484

2) Encontre o coeficiente:

- Taxa mensal = 6% a.m.
- Prazo = 24 meses

Resp.: 0,079679

Taxa Interna de Retorno (TIR)

TIR é a taxa que mede o retorno do investimento.

Como?
Retornando todas as parcelas (entradas e saídas) de um fluxo de caixa para o “momento zero” (hoje) e igualando ao valor presente.

A equação que nos dá a taxa interna de retorno é a seguinte:

$$CF_0 = \frac{Fc1}{(1+i)} + \frac{Fc2}{(1+i)^2} + \frac{Fc3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Fcn}{(1+i)^n}$$

A solução algébrica desse tipo de cálculo é bastante trabalhosa. Perceba que a solução da incógnita (i) só será possível por tentativa e erro. Faríamos a substituição dos termos e por meio de tentativas iríamos nos aproximando da taxa (i).

Portanto, demonstraremos a resolução de forma mais objetiva, utilizando as funções financeiras da HP.

Para melhor visualizar o problema, será necessário esquematizar um fluxo de caixa para cada situação.

Exemplo:

Um investidor recebeu uma proposta para entrar como sócio numa empresa que fez a seguinte previsão de lucro:

1º mês - R$ 5.700,00

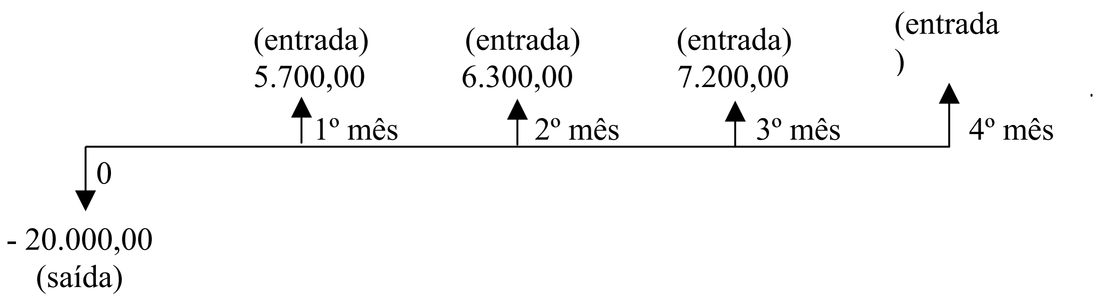
2º mês - R$ 6.300,00

3º mês - R$ 7.200,00

4º mês - R$ 7.200,00

Sabendo-se que o capital inicial investido por ele seria de R$ 20.000,00, calcule a taxa interna de retorno desse investimento.

- ***Fluxo de Caixa:***



Inserir os dados na HP-12C

		$\boxed{f}$	$\boxed{CLX}$	
20.000,00	$\boxed{CHS}$	$\boxed{g}$	$\boxed{CF_0}$	(armazena o capital investido com sinal negativo, pois é um desembolso para o investidor)
5.700,00		$\boxed{g}$	$\boxed{CFj}$	(valor da parcela – entrada de caixa)
6.300,00		$\boxed{g}$	$\boxed{CFj}$	(valor da parcela – entrada de caixa)
7.200,00		$\boxed{g}$	$\boxed{CFj}$	(valor da parcela – entrada de caixa)
2		$\boxed{g}$	$\boxed{Nj}$	(número de vezes que a parcela anterior ocorre)
		$\boxed{f}$	$\boxed{IRR}$	(nos traz a Taxa Interna de Retorno)
		➔	11,57% a.m.	

***Obs**.: A taxa encontrada foi a mensal, pois informamos os valores das parcelas em períodos mensais.*

Para avaliação de fluxos de caixa, foram usadas as funções a seguir:

$\boxed{CF_0}$ Significa fluxo de caixa do momento zero (fluxo de caixa inicial)

$\boxed{CFj}$ Fluxo de caixa nos períodos seguintes

$\boxed{Nj}$ Repete fluxos iguais e consecutivos

$\boxed{IRR}$ Taxa interna de retorno (ou TIR)

$\boxed{NPV}$ Valor presente líquido

Nota: Observar as funções de cada tecla, as de cor azul devem ser precedidas de $\boxed{g}$ e as de cor amarela de $\boxed{f}$.

A capacidade da HP-12C no fluxo de caixa é de 20 memórias, isto significa dizer que somente podemos calcular fluxos limitados a 20 valores informados nas $\boxed{CF_0}$ $\boxed{CF_i}$

E , pois, quando temos valores iguais na seqüência, podemos utilizar a função $\boxed{N_i}$ que não conta como memória.

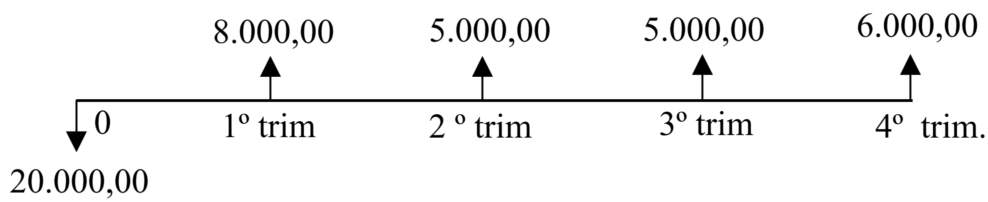
Outro detalhe importante é que, como nem sempre utilizamos todas as memórias disponíveis, é necessário que antes de iniciar os cálculos sejam zeradas as memórias

$\boxed{f}$ $\boxed{CLX}$

A taxa interna de retorno é muito utilizada para avaliação da viabilidade de projetos, daí o nome Taxa Interna de Retorno, porém é pelo mesmo critério que se calcula a taxa de juros quando temos um fluxo irregular, ou seja, parcelas desiguais ou períodos desiguais, quando não podemos mais usar as funções financeiras normais (PV, PMT, FV, i e n).

Vamos calcular a taxa de juros de um empréstimo no valor de R$ 20.000,00, que será pago em 4 parcelas trimestrais nas seguintes condições:

1º trimestre: R$ 8.000,00
2º trimestre: R$ 5.000,00
3º trimestre: R$ 5.000,00
4º trimestre: R$ 6.000,00

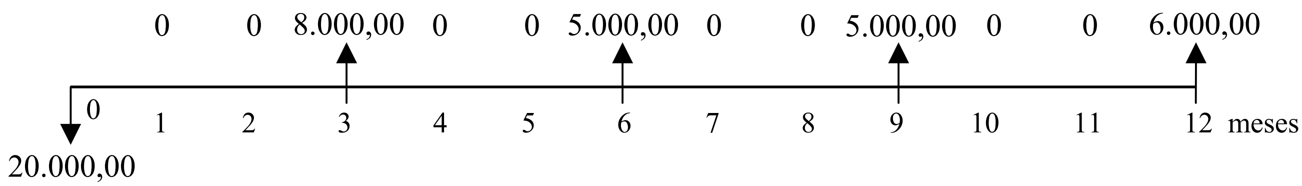


Digitando na HP:

		f	CLX
20.000	CHS	g	CF_0
8.000		g	CFj
5.000		g	CFj
2		g	Nj
		g	CFj
6.000			
		f	IRR → 8,1745% a.t.

Resp.: *A taxa de juros cobrada no empréstimo é de 8,17% ao trimestre.*

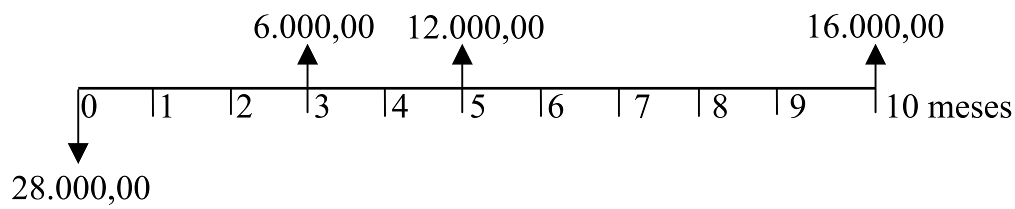
Para que você obtenha a taxa ***mensal***, é necessário informar as entradas e saídas ***mensais***. Os períodos que não têm entrada nem saída deverão ser alimentados com zero. Veja a seguir, utilizando os mesmos dados do exemplo anterior.



		f	CLX
20.000	CHS	g	CF_0
0		g	CFj
2		g	Nj
8.000		g	CFj
0		g	CFj
2		g	Nj
5.000		g	CFj
0		g	CFj
2		g	Nj
5.000		g	CFj
0		g	CFj
2		g	Nj
6.000		g	CFj
		f	IRR → 2,65% a.m.

Exercícios:

01 - Um carro custa à vista R$ 28.000,00 ou pelo plano:



Qual a taxa de juros?

Resp.: IRR ou TIR = 2,86% a.m.

02 - Num financiamento, o preço à vista do bem é R$ 15.000,00. O lojista propôs a seguinte forma de parcelamento:

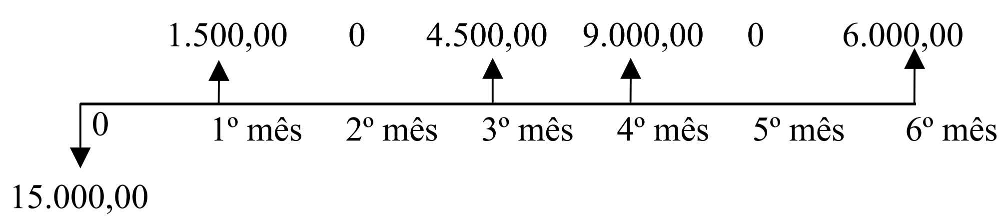
R$ 1.500,00 no 1º mês

R$ 4.500,00 no 3º mês

R$ 9.000,00 no 4º mês

R$ 6.000,00 no 6º e último mês.

Calcule a taxa de juros (IRR) cobrada pelo lojista:



Resp.: TIR ou IRR 8,64% a.m.

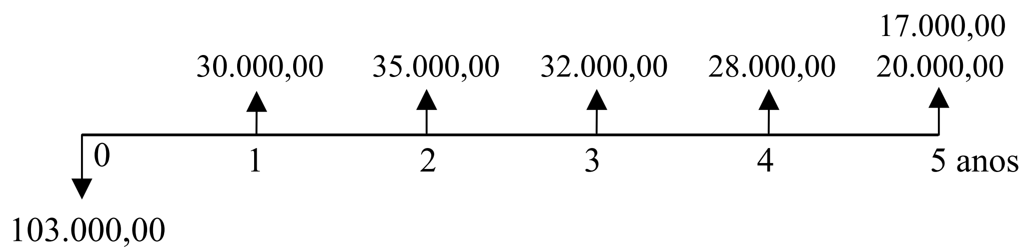
Valor Presente Líquido (NPV)

O valor presente líquido (VPL) é uma técnica de análise de fluxos de caixa que consiste em calcular o valor presente de uma série de pagamentos (ou recebimentos) iguais ou diferentes, a uma taxa conhecida.

O critério deste método estabelece que, enquanto o valor presente das entradas for maior que o valor presente das saídas, o projeto deve ser recomendado do ponto de vista econômico.

Exemplo:

Uma transportadora está analisando a compra de um caminhão no valor de R$103.000,00. A utilização desse veículo nos próximos cinco anos deverá gerar receitas líquidas estimadas em R$30.000,00, R$35.000,00, R$32.000,00, R$28.000,00 e R$20.000,00 respectivamente. No final do 5º ano, espera-se vender esse caminhão por R$ 17.000,00. Se a empresa espera uma taxa de retorno de 15% a.a., qual o valor presente líquido?



Fórmula:

$$VPL = \frac{Fc1}{(1+i)} + \frac{Fc2}{(1+i)^2} + \frac{Fc3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Fcn}{(1+i)^n} - CF_0$$

Solução:

$$VPL = \frac{30.000,00}{1,15} + \frac{35.000,00}{1,15^2} + \frac{32.000,00}{1,15^3} + \frac{28.000,00}{1,15^4} + \frac{37.000,00}{1,15^5} - 103.000,00$$

$$VPL = 26.086,95 + 26.465,03 + 21.040,52 + 16.009,09 + 18.395,54 - 103.000,00$$

$$VPL = 107.997,13 - 103.000,00 = 4.997,13$$

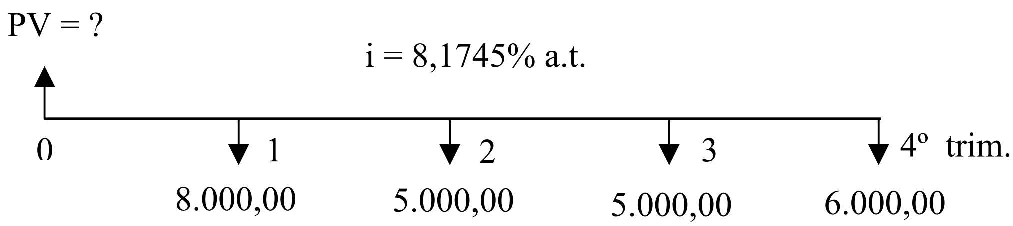
Solução pela HP - 12C:

103.000,00	CHS	g	CF_o	
30.000,00		g	CFj	
35.000,00		g	CFj	
32.000,00		g	CFj	
28.000,00		g	CFj	
37.000,00		g	CFj	
15			i	
		f	NPV	➔ R$ 4.997,13

Obs.: *Para cálculo do Valor Presente Líquido deve ser respeitado o sinal dos números, negativo para saídas e positivo para entradas. Isto é necessário para interpretar o resultado, pois ele poderá ser positivo ou negativo. O resultado sempre será em valor monetário.*

➠ Como o valor presente líquido é positivo, a taxa efetiva de retorno é superior à taxa mínima de 15% a.a., portanto, o investimento é viável.
Da mesma forma que a Taxa Interna de Retorno, o recurso do Valor Presente Líquido, além de avaliar projetos, tem outras utilidades. Acompanhe o exemplo a seguir:

Retornando ao fluxo do empréstimo utilizado para cálculo da Taxa Interna de Retorno (pág. 53), vamos agora calcular o valor presente (valor do empréstimo com base na taxa de juros encontrada que foi de 8,1745% ao trimestre).



Digitando na HP:

	f	CLX
8.000	g	CFj
5.000	g	CFj
2	g	Nj
6.000	g	CFj
8,1745		i
	f	NPV → 20.000,00

Exercícios:

01 - Um cliente fez um financiamento em que as parcelas foram pagas da seguinte maneira.

1º mês R$ 5.000,00

2º mês R$ 1.200,00

3º mês R$ 3.500,00

4º mês R$ 2.000,00

Sabendo que a taxa é de 6,5% a.m., calcule o Valor Presente Líquido (NPV).

Resp.: *NPV = R$ 10.204,94 (este foi o valor financiado)*

Desconto

É a parcela que o Banco cobra por descontar (antecipar recursos), para os clientes que possuem duplicatas ou títulos a receber.

A operação de Desconto é realizada quando se conhece o valor futuro de um título (o valor do título no seu vencimento) e se quer determinar o seu valor presente (quero saber quanto esse título vale hoje).

Cálculo para se obter o valor do Desconto:

$$D = FV \cdot \frac{d}{30} \cdot n$$

Em que:

D = Valor Monetário do Desconto
FV = Valor do Título no seu Vencimento
d = Taxa de Desconto (será dividida por 30, pois o Banco divulga a taxa mensal)
n = Prazo (número de dias corridos entre a data da operação e do vencimento da duplicata).

Exemplo:

Um cliente quer saber quanto será descontado de uma duplicata no valor de R$ 30.000,00 (FV) apresentada ao Banco hoje, com vencimento para 25 dias (n). A taxa de desconto (d) é de 3,80% a.m..

Substituindo os dados na fórmula:

$$D = R\$\ 30.000,00 \cdot \frac{0,0380}{30} \cdot 25$$

Resp.: D = R$ 950,00

Na HP

30.000	$\boxed{E}$
0,0380	$\boxed{E}$
30	$\boxed{\div}$
25	$\boxed{x}$
	$\boxed{x}$ ➔ 950,00

Obs.: *Nesta fórmula, a taxa (d), tem de ser apresentada na forma decimal, bastando dividir a taxa expressa por 100.*

Cálculo para se obter o Valor Presente de um título descontado:

Numa operação de Desconto, chamamos de Valor Presente ou Valor Atual o valor que será creditado na conta do cliente.

Temos: $\boxed{PV = FV - D}$

Em que:

PV = Valor Presente (valor que o título assume hoje)
FV = Valor Futuro (valor do título no vencimento)
D = Valor Monetário do Desconto

Retomando o exemplo anterior, temos:

PV = 30.000,00 – 950,00
PV = R$ 29.050,00 (este é o valor que será creditado na conta do cliente)

Agora é a sua vez!

1) *Calcule o valor do Desconto e o valor que será creditado ao cliente na seguinte operação:*

- Valor da duplicata (FV) = R$ 38.000,00
- Prazo de vencimento da duplicata (n) = 16 dias
- Taxa de Desconto (d) = 4,20% a.m.

Resp.: *Valor do Desconto: R$ 851,20. Valor que será creditado ao cliente: R$ 37.148,80.*

2) *Calcule o valor do Desconto e o valor que será creditado ao cliente na seguinte operação:*

- Valor da Duplicata: R$ 15.000,00
- Taxa de desconto: 4% a.m.
- Prazo: 37 dias.

Resp.: *Valor do Desconto: R$ 740,00. Valor creditado ao cliente: R$ 14.260,00*

Cálculo para se obter a Taxa Efetiva numa Operação de Desconto:

Quando dizemos taxa efetiva, estamos nos referindo à taxa de juros de uma operação de desconto.

A taxa efetiva de juros é calculada com base no valor que será creditado ao cliente (PV), enquanto a taxa de desconto é encontrada a partir do valor do título no seu vencimento (FV), portanto numa operação de desconto, a taxa de desconto é sempre menor que a taxa efetiva de juros, considerando um mesmo prazo.

$$\boxed{i = \frac{D}{PV} \times 100}$$

Em que:

i = Taxa Efetiva de Juros
D = Valor do Desconto (já sabemos calcular)
PV = Valor que será creditado ao cliente

Exemplo:

Seu cliente deseja saber qual é a taxa efetiva mensal de juros que ele pagou numa operação de desconto nas seguintes condições:

Valor do título: R$ 17.000,00
Prazo de vencimento do título: 45 dias
Taxa de desconto: 4% a.m.

1º Passo: *Encontrar o valor do Desconto e o quanto será creditado ao cliente:*

Substituindo na fórmula do Desconto e Valor Presente:

$D = 17.000,00 \cdot \frac{0,04}{30} \cdot 45$ ➔ Valor do Desconto: R$ 1.020,00

$PV = 17.000,00 - 1.020,00$ ➔ Valor creditado ao cliente: R$ 15.980,00

2º Passo: *Encontrar a taxa efetiva de juros do período:*

Substituindo na fórmula:

$$\boxed{i = \frac{D}{PV} \times 100} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1.020,00}{15.980,00} \times 100$$

Resp.: *6,38% a.p.. Esta é a taxa de juros do **período**, mas o seu cliente quer saber a **mensal**. Vamos calcular a Taxa Equivalente.*

3º Passo: *Tenho a taxa efetiva de juros de 6,38% para o período de 45 dias, mas quero encontrar a mensal.*

Substituindo na fórmula de taxas equivalentes:

$$\boxed{iq = \left[(1 + i\,t)^{q/t} - 1 \right] \times 100} \quad \Rightarrow \quad im = \left[(1 + 0,0638)^{30/45} - 1 \right] \times 100$$

Resp.: *A taxa efetiva mensal nesta operação é de R$ 4,21% a.m.*

Exercícios:

1) Calcule a taxa efetiva numa operação de Desconto, sabendo-se que o valor do título é de R$ 35.000,00.

Prazo: 30 dias
Taxa de desconto: 3,80% a.m.

Resp.: *3,95% a.m.*

2) Encontre a taxa efetiva de juros do período e mensal numa operação de Desconto cujo valor da duplicata é de R$ 9.500,00, por um prazo de 21 dias, a uma taxa de desconto de 3,5% a.m.

Resp.: *3,61% a.m. e 2,51% a.p.*

Nos exercícios a seguir podemos ter uma noção bastante clara da diferença entre a taxa de juros e a taxa de desconto. Para tal, utilizamos exemplos comuns ao nosso dia-a-dia.

01 - Determinada mercadoria custa R$ 500,00 para pagamento em 30 dias, se comprada à vista a loja concede um desconto de 8%. Calcular o valor a ser pago na compra à vista.

Resp.: *D = R$ 460,00*

02 - Com base no preço à vista do exercício anterior, *calcular a taxa de juros que a loja cobra sobre o preço à vista* para chegar nos R$ 500,00 na venda a prazo.

Resp.: *i = 8,70% a.m.*

Conceito de Taxa de Juros

Taxa Nominal

É a taxa que encontramos nas operações correntes. Ex.: Contratos de Empréstimos e Financiamentos, Aplicações Financeiras etc.

Normalmente, vem escrita em um documento, como por exemplo um contrato ou título de crédito.

Nela há uma expectativa de inflação e o ganho estimado pelo agente financeiro.

Fórmula:

$iN = [(1 + iR) \times (1 + INFL) - 1] \times 100$

Em que:

iN = Taxa Nominal
iR = Taxa Real
INFL = Índice de Inflação

Exemplo:

Dada uma taxa de juros real de 3,80% a.m. e um índice de inflação de 3,22% no mês, calcule a taxa nominal.

Substituindo na fórmula:

$iN = [(1 + 0{,}038) \times (1 + 0{,}0322) - 1] \times 100$

Obs.: *Lembrando que para serem usadas em fórmulas algébricas as taxas foram divididas por 100.*

Digitando na HP:

1	$\boxed{E}$
0,038	$\boxed{+}$
1	$\boxed{E}$
0,0322	$\boxed{+}$
	$\boxed{x}$
1	$\boxed{-}$
100	$\boxed{x}$ ➔ 7,14% a.m.

> ***Importante:***
>
> *Esta mesma fórmula será usada quando quisermos acumular taxas de juros compostas.*

Por exemplo:

Calcule o rendimento acumulado de uma aplicação financeira que rendeu no primeiro quadrimestre do ano:

Janeiro: 2,02%	*Março: 3,16%*
Fevereiro: 2,24%	*Abril: 2,17%*

Substituindo na fórmula:

$$i = [(1 + 0{,}0202) \times (1 + 0{,}0224) \times (1 + 0{,}0316) \times (1 + 0{,}0217) - 1] \times 100$$

Digitando na HP:

1	$\boxed{E}$
0,0202	$\boxed{+}$
1	$\boxed{E}$
0,0224	$\boxed{+}$
	$\boxed{x}$
1	$\boxed{E}$
0,0316	$\boxed{+}$
	$\boxed{x}$
1	$\boxed{E}$
0,0217	$\boxed{+}$
	$\boxed{x}$
1	$\boxed{-}$
100	$\boxed{x}$ ➔ 9,94% a.p.

Resp.: *O rendimento acumulado do período foi de 9,94%.*

Exercícios:

01 - Em 24.10.1997, foi efetuado um depósito em uma caderneta de poupança no valor de R$ 1.800,00, para resgate em 24.01.1998.

Índices

1º Período => 1,863%

2º Período => 1,991%

3º Período => 2,95%

Calcule:

. Índice acumulado no período.

. Valor de Resgate.

Resp.: 6,9559% a.p. e R$ 1.925,21

02 - Calcule as taxas nominais da Caderneta de Poupança, acumulando a taxa real com a T.R.

T.R.	Taxa Real	Taxa Nominal
1,83%	0,5%	________
1,36%	0,5%	________

Resp.: 2,3392% a.p.
1,8668% a.p.

Taxa Real

É calculada a partir da taxa nominal, descontando-se os efeitos inflacionários. O objetivo é determinar o quanto se ganhou ou perdeu, desconsiderando a inflação.

Fórmula:

$$iR = \left[\left(\frac{1 + i\,N}{1 + INFL} \right) - 1 \right] \text{ x } 100$$

Em que:

iR = Taxa Real
iN = Taxa Nominal
INFL = Índice de Inflação

Exemplo:

Considerando uma taxa nominal de 7,14% a.m. e um índice de inflação de 3,22% no mês, calcule a taxa real.

Substituindo na fórmula:

$$iR = \left[\left(\frac{1 + 0{,}0714}{1 + 0{,}0322} \right) - 1 \right] \text{ x } 100$$

Digitando na HP:

1	$\boxed{E}$
0,0714	$\boxed{+}$
1	$\boxed{E}$
0,0322	$\boxed{+}$
	$\boxed{\div}$
1	$\boxed{-}$
100	$\boxed{x}$ ➔ 3,80% a.m.

Importante:

Esta mesma fórmula será usada sempre que quisermos "tirar" uma taxa qualquer de uma taxa nominal.

Por exemplo:

Calcule a inflação contida na taxa nominal de 7,14% a.m., sabendo-se que a taxa real é de 3,80% a.m.

Substituindo na fórmula:

$$i = \left[\left(\frac{1 + 0{,}0714}{1 + 0{,}0380}\right) - 1\right] \text{x } 100$$

Digitando na HP:

1	$\boxed{\text{E}}$
0,0714	$\boxed{+}$
1	$\boxed{\text{E}}$
0,0380	$\boxed{+}$
	$\boxed{\div}$
1	$\boxed{-}$
100	$\boxed{\text{x}}$ ➔ 3,22% a.m.

Exercicícios:

1) Se uma aplicação financeira rendeu 2,58% no mês e a inflação do mesmo período foi 0,38%, qual foi o ganho real obtido?

***Resp**.: A taxa real foi de 2,19% a.m.*

2) Calcule a inflação contida na taxa nominal 17,21% a.p., sabendo-se que a taxa real é de 15,32% a.p..

Resp.: *A inflação no período foi de 1,64%.*

B I B L I O G R A F I A

I - LAPPONI, Juan Carlos
Matemática Financeira - Uma Abordagem Moderna
Lapponi Editora Ltda, 2ª Edição, 1994.

II - MATHIAS, Washington Franco
Gomes, José Maria
Matemática Financeira
Editora Atlas, 1996.

III - NETO, Alexandre Assaf
Martins, Eliseu
Administração Financeira
Editora Atlas, 2000.

IV - SOBRINHO, José Dutra Vieira
Matemática Financeira
Ed. Atlas 4ª. Edição 2001. S.Paulo.

Especificações de Publicação

a. Documento: **Apostila de Matemática Financeira**

b. Válido até: Indeterminado

c. Responsabilidade: 4636-1/Dep.de Treinamento

d. Seção/ramal do responsável: 4-2870 Maria Betania

e. Homologado por: Antonia Clarice de Oliveira/5004454/4636.clarice@bradesco.com.br

f. Restrições de reprodução. *Exemplos:*
   x **Restrito aos participantes do Curso TreiNet Matemática Financeira**
   Proibida impressão
   Proibida cópia em arquivo

g. Público alvo:
   Agências
   Departamentos
   Usuários específicos (contas de e-mail)
   x Todos os usuários

h. Classificação*:*
   Confidencial
   x Uso interno
   Uso público

i. Tamanho do arquivo: 1.691 Kb (em pdf)

Criado no MS Word 97 e convertido em PDF