LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

1. Motivação e necessidade

1) Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares ⇒ porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.

2) O que fazer?

   Pode-se obter um modelo linear para o sistema não-linear.

   ⇒ A questão se torna: qual a validade do modelo linear do sistema não-linear?

3) Técnicas de projeto de controladores para sistemas não-lineares são:

   - Complicadas e complexas;
   - Somente garantem estabilidade ⇒ não garantem desempenho;
   - Na maioria dos casos não justifica a complexidade ⇒ controle linear em geral funciona bem mesmo para sistemas não-lineares;
   - Quando controle linear não funciona adequadamente tem-se as alternativas de ⇒ usar programação de ganhos ou controle adaptativo.

2. Sistema dinâmico não-linear

Dado um sistema não-linear de ordem n descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de funções da dinâmica dos estados;} \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de equações das saídas.} \tag{2}$$

onde:

$\mathbf{x}(t)$ - vetor de estados, $\in R^n$ (dimensão nx1);

$\mathbf{u}(t)$ - vetor de entrada, $\in R^m$ (dimensão mx1);

$\mathbf{y}$(t) - vetor de saídas, $\in R^p$ (dimensão px1);

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a dinâmica do sistema, $\in R^n$ (dimensão nx1);

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a saída do sistema, $\in R^p$ (dimensão px1).

O vetor de funções da dinâmica dos estados representado pela eq. (1) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \tag{3}$$

O vetor de funções da saída representado pela eq. (2) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ y_2(t) = g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \tag{4}$$

<u>Exemplo</u>: Sistema massa-mola não linear:

Equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = -k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)$$

$\Rightarrow$ modelo de mola usualmente utilizado para suspensão de automóveis.

Escrevendo o sistema na forma de espaço de estados não-linear fica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = f_1(x(t), v(t), F(t)) \\ \dot{v}(t) = -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m = f_2(x(t), v(t), F(t)) \end{cases}$$

3. Condição de linearização

1) **A linearização de um sistema dinâmico não-linear é feita em torno de uma condição de operação $\Rightarrow$ denominada condição de linearização.**

2) O sistema linear é válido para operação em "torno" da condição de linearização.

   Quanto em torno?

   Questão em aberto $\Rightarrow$ depende do sistema!

Condição de linearização:

- Definida por:

$$\begin{cases} \mathbf{x_0}(t) & - \text{vetor de estado na condição de linearização, pode ser variável no tempo;} \\ \mathbf{u_0}(t) & - \text{vetor de entrada na condição de linearização, pode ser variável no tempo;} \\ \mathbf{y_0}(t) & - \text{vetor de saída na condição de linearização, pode ser variável no tempo.} \end{cases}$$

Cálculo da condição de linearização:

- Uma possibilidade é a condição de linearização ser um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)) = \mathbf{0} \tag{5}$$

$$\mathbf{y_0}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)) \tag{6}$$

  - Dessas expressões tem-se $n + p$ equações algébricas não-lineares cuja solução fornece $\mathbf{x_0}(t)$, $\mathbf{u_0}(t)$ e/ou $\mathbf{y_0}(t)$.
  - Nota-se que em geral o número de saídas de um sistema MIMO é igual ao número de entradas ($m = p$).
  - Conhecendo-se, por exemplo, as saídas do sistema na condição de linearização $\Rightarrow$ pode-se a partir das eq. (5) e (6) obter o vetor de estados e o vetor de entradas na condição de linearização.

- Se a condição de linearização não for um ponto de equilíbrio do sistema, tem-se no lugar da eq. (5) o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}(t), \mathbf{u_0}(t)) \tag{7}$$

  - A equação da saída (eq. 6) não se altera.
  - Nesse caso a condição de linearização tem que satisfazer a equação da dinâmica do sistema $\Rightarrow$ pode ser difícil de calcular para alguns casos.
  - Em geral a eq. (7) somente serve para calcular as derivadas temporais dos estados, que nem são necessárias.
  - Dependendo do problema conhecendo-se, por exemplo, as saídas e alguns estados do sistema na condição de linearização $\Rightarrow$ tem-se $n + p$ equações não-lineares cuja solução deve fornecer os vetores $\mathbf{x_0}(t)$, $\mathbf{u_0}(t)$, $\mathbf{y_0}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$.

- **Resumo:**

  - A condição de linearização é definida para qualquer caso genericamente por:

$$\boxed{\mathbf{x_0}(t),\ \mathbf{u_0}(t),\ \mathbf{y_0}(t)} \tag{8}$$

  - A condição de linearização deve sempre satisfazer as equações de estado independente se for de regime estacionário ou não, ou seja:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))} \tag{9}$$

4. Método de linearização da dinâmica

- Define-se pequenos desvios em torno da condição de linearização $\Rightarrow$ $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ e $\delta y(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_{\mathbf{0}}(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \tag{10}$$

- Dada a condição de linearização (eq. 8 e 9), expandindo o vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ em torno de $\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t)$ e $\mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t)$ usando Série de Taylor $\Rightarrow$ cada equação da dinâmica do sistema: $\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, para i =1 ... n, fica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t)) &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \tag{11}$$

onde *T.S.O.* significa termos de ordem superior e o subscrito.

Abrindo a derivada do lado esquerdo da eq. (11) e deseprezando os *T.O.S.* tem-se:

$$\begin{aligned} \cancel{\dot{x}_{0i}(t)} + \delta\dot{x}_i(t) = \cancel{f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))} &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \tag{12}$$

$\Rightarrow$ os *T.S.O.* são de fato desprezíveis desde que $\delta\mathbf{x}(t)$ e $\delta\mathbf{u}(t)$ sejam "pequenos".

Como a condição de linearização deve obedecer a equação dinâmica do sistema (eq. 9) $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo da eq. (12) cancela o 1º termo do lado direito da equação (ver eq. 9). Assim, tem-se:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{x}_i(t) = &\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_{\mathbf{0}}(t), \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) \end{aligned}} \tag{13}$$

Para todas as n equações de estado linearizadas tem-se na forma matricial:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{u}(t) \tag{14}$$

onde os termos $\left(\partial f_i/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial f_i/\partial u_k\right)_0$ representam uma notação mais compacta para $\left(\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial f_i(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t))/\partial u_k\right)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t)\,. \tag{15}$$

onde $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix}_{(nxn)} \tag{16}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(nxm)} \tag{17}$$

- O mesmo processo é repetido para as p equações das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ expandindo cada equação de saída de $\mathbf{x_0}(t)$ e $\mathbf{u_0}(t)$, tem-se:

$$\cancel{y_{0i}(t)}+\delta y_i(t)=\cancel{g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t)+$$
$$+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial u_m}\right)\delta U_m(t)+T.O.S. \tag{18}$$

Como a condição de linearização deve obedecer a equação das saídas do sistema (eq. 4) $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo da eq. (18) cancela o 1º termo do lado direito da equação.

Desprezando os *T.O.S.*:

$$\begin{aligned}\delta y_i(t)=&\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial x_1}\right)\delta x_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial x_n}\right)\delta x_n(t)+\\&+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial u_1}\right)\delta u_1(t)+\ldots+\left(\frac{\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)}{\partial u_m}\right)\delta u_m(t)\end{aligned} \tag{19}$$

Para todas as p equações de saídas do sistema, tem-se:

$$\delta\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0\\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right)_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right)_0\end{bmatrix}\delta\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m}\right)_0\\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m}\right)_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m}\right)_0\end{bmatrix}\delta\mathbf{u}(t) \tag{20}$$

onde os termos $\left(\partial g_i/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial g_i/\partial u_k\right)_0$ representam uma notação mais compacta para $\left(\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)/\partial x_j\right)_0$ e $\left(\partial g_i\left(\mathbf{x_0}(t),\mathbf{u_0}(t)\right)/\partial u_k\right)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\delta\mathbf{u}(t)\,. \tag{21}$$

onde $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxn)} \tag{22}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m}\right)_0 \end{bmatrix}_{(pxm)} \tag{23}$$

- Em resumo as equações dinâmicas linearizadas de um sistema são as seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t) \\ \delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}} \tag{24}$$

Nesse caso, como as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D**, variam no tempo, o sistema é do tipo Linear Variante no Tempo (LVT).

- Se a condição de linearização for uma condição de operação em regime estacionário, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{0}$, então as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D** são constantes e o sistema é do tipo Linear Invariante no Tempo (LIT). Assim a eq. (24) fica:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(t) \\ \delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}} \tag{25}$$

- **Usualmente nas eq. (24) e (25) eliminam-se os termos de variação, "δ" ⇒ mas não se pode esquecer que para uma sistema com dinâmica linearizada os estados, as entradas e as saídas representam as variações dessas grandezas em torno da condição de linearização.**

5. Exemplos

Exemplo 1: Massa-mola não-linear:

- Modelo do sistema não-linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, v, F) = v(t) \\ \dot{v}(t) = f_2(x, v, F) = \dfrac{1}{m}\left[-k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)\right] \end{cases}$$

- Condição de linearização:

Adotada uma condição de regime estacionário $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{v}_0 = 0 \\ F_0 = 0 \end{cases}$

Para a condição de linearização as equações dinâmicas resultam em:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 = 0 \\ \dot{v}_0 = -k_1 x_0 - k_2 x_0^3 = 0 \end{cases}$$

Que resulta na seguinte relação:

$$k_1 x_0 + k_2 x_0^3 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

$\Rightarrow$ Nota-se que x_0 somente existe se k_1 e k_2 tiverem sinais opostos.

- Linearização da dinâmica do sistema:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)_0 = 1 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial F}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{m}\left[-k_1 - 3k_2 x_0^2\right] \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial F}\right)_0 = \frac{1}{m}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(-k_1 - 3k_2 x_0^2\right)/m & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}(t)\\ \delta\dot{v}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \left(-k_1-3k_2x_0^2\right)/m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x(t)\\ \delta v(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}\delta F(t)$$

Se por exemplo: $\begin{cases}k_1=1\text{N/m}\\ \text{k}_2=-0{,}5\text{N/m}\\ m=2\text{kg}\end{cases} \Rightarrow\ x_0=\sqrt{\dfrac{1}{1/2}}=\sqrt{2}\ \text{m}$, então:

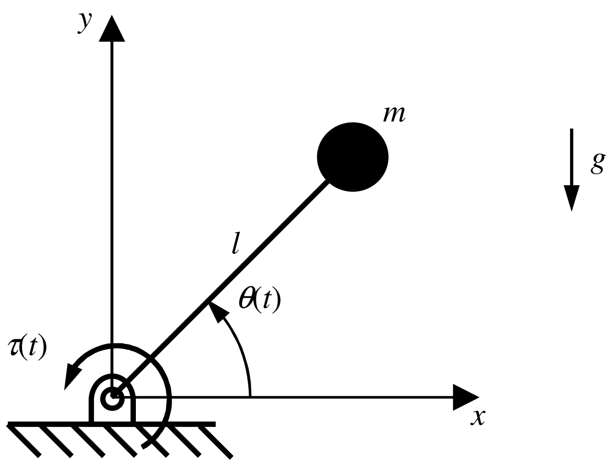
$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}(t)\\ \delta\dot{v}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x(t)\\ \delta v(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0{,}5\end{bmatrix}\delta F(t)$$

<u>Exemplo 2</u>: Pêndulo invertido:

- Seja um pêndulo como mostra a figura a seguir. A massa do pêndulo que é concentrada em sua ponta é *m* e o seu comprimento é *l*. Um torque $\tau(t)$ variável é aplicado no pêndulo na posição de sua articulação.

- Equação dinâmica do pêndulo:

$$ml^2\ddot{\theta}(t)+mgl\cos(\theta(t))=\tau(t)$$



Definindo a velocidade angular do pêndulo $\Rightarrow\ \omega(t)=\dot{\theta}(t)$.

O sistema na forma do espaço dos estados fica:

$$\begin{cases}\dot{\theta}(t)=\omega(t)\\ \dot{\omega}(t)=-\dfrac{g}{l}\cos(\theta(t))+\dfrac{\tau(t)}{ml^2}\end{cases}$$

- Condição de linearização:

Na condição de linearização desejada o pêndulo deve estar inclinado de 45º em relação à horizontal ⇒ existem duas condições de linearização possíveis:

a) A condição linearização é um ponto de equilíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ ⇒ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \tau_0 = mgl\cos(\theta_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}mgl \end{cases}$$

b) A condição de linearização não é um ponto de equlíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 \neq 0$ ⇒ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \omega_0 \\ \dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) + \dfrac{1}{ml^2}\tau_0 \end{cases}$$

Para definir completamente a condição de linearização deve-se adotar ω_0 e $\dot{\omega}_0$, ou ω_0 e τ_0:

⇒ Adotando $\omega_0 = \tau_0 = 0$ ⇒ $\dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) = -\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}$.

⇒ Observa-se que nessa condição de linearização o pêndulo está parado mas iniciando o movimento de queda devido à aceleração da gravidade.

- Dinâmica Linearizada:

Utilizando a condição de linearização (b) para linearizar o sistema, tem-se:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega}\right)_0 = 1 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{g}{l}\sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}g}{2l} \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial \tau}\right)_0 = \frac{1}{ml^2}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t)$$

6. Método da perturbação para linearização

Um método alternativo para linearizar a dinâmica de um sistema é assumir pequenas variações em torno da condição de linearização, como foi definido na eq. (10), repetida abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \tag{10}$$

A derivada temporal dos estados são obtidas a partir da derivação da eq. (10), resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \tag{26}$$

Observa-se que a derivada dos estados na condição de linearização não é necessariamente zero, pois a condição de linearização, como visto, não necessita ser uma condição estacionária.

Substituindo as eqs. (10) e (26) nas equações dinâmicas dos estados e nas equações de saída do sistema e desprezando termos de ordem superior obtém-se as equações linearizadas do sistema.

- **Por termos de ordem superior entende-se o seguinte:**
  - **Qualquer variação ao quadrado ⇒ δx_i^2 (seja de variável de estado, de saída ou de entrada);**
  - **Qualquer produto de duas variações ⇒ $\delta x_i \delta x_j$ (seja de variável de estado, de saída ou de entrada).**

<u>Exemplo 3</u>: Pêndulo invertido:

- Equação dinâmica do pêndulo na forma de espaço dos estados:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\dfrac{g}{l}\sin\big(\theta(t)\big) + \dfrac{\tau(t)}{ml^2} \end{cases}$$

- Condição de linearização (condição (b) do exemplo 2):

⇒ Adotando: $\theta_0 = 45^\circ$, $\omega_0 = \tau_0 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_0 = -\dfrac{g}{l}\cos(\theta_0) = -\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}$.

- Dinâmica Linearizada:

Substituindo as eq. (10) e (26) nas equações dinâmicas do sistema tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0(t) + \delta\dot{\theta}(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t) \\ \dot{\omega}_0(t) + \delta\dot{\omega}(t) = -\dfrac{g}{l}\cos\big(\theta_0(t) + \delta\theta(t)\big) + \dfrac{1}{ml^2}\big(\tau_0(t) + \delta\tau(t)\big) \end{cases}$$

Aplicando a relação trigonométrica do cosseno da soma de dois ângulos,

$$\cos\big(\theta_0 + \delta\theta(t)\big) = \cos\big(\theta_0(t)\big)\cos\big(\delta\theta(t)\big) - \sin\big(\theta_0(t)\big)\sin\big(\delta\theta(t)\big)$$

porém como $\delta\theta$ é pequeno $\Rightarrow \begin{cases} \cos(\delta\theta) \approx 1 \\ \sin(\delta\theta) \approx \delta\theta \end{cases}$

que resulta em $\Rightarrow \cos\big(\theta_0 + \delta\theta(t)\big) = \cos\big(\theta_0(t)\big) - \delta\theta(t)\sin\big(\theta_0(t)\big)$

Substituindo nas equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \cancel{\dot{\theta}_0(t)} + \delta\dot{\theta}(t) = \cancel{\omega_0(t)} + \delta\omega(t) \\ \cancel{\dot{\omega}_0(t)} + \delta\omega(t) = -\dfrac{g}{l}\cancel{\cos\big(\theta_0(t)\big)} + \dfrac{g}{l}\delta\theta(t)\sin\big(\theta_0(t)\big) + \cancel{\dfrac{1}{ml^2}\tau_0(t)} + \dfrac{1}{ml^2}\delta\tau(t) \end{cases}$$

Nota-se que a condição de linearização obedece as equações dinâmicas, assim:

- Na 1ª expressão $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º termo do lado direito;
- Na 2ª expressão $\Rightarrow$ o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º e o 3ª termos do lado direito.

Portanto,

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta}(t) = \delta\omega(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) = \dfrac{g}{l}\delta\theta(t)\sin\big(\theta_0(t)\big) + \dfrac{1}{ml^2}\delta\tau(t) \end{cases}$$

que usando a condição de linearização fica na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

7. Exercícios

1) Considere a Equação de Van der Pol que representa um oscilador com amortecimento não-linear.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \mu\left[1 - x(t)^2\right]\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t),$$

onde $x(t)$ representa a coordenada de posição, μ é uma grandeza que representa a quantidade de amortecimento presente no sistema e $u(t)$ é o termo forçado ou a entrada do sistema.

Essa equação foi muito utilizada na engenharia elétrica/eletrônica para o estudo de válvulas e na dinâmica dos sistemas não-lineares.

Pede-se:

a) Coloque o sistema na forma de espaço de estados não-linear.

b) Defina uma condição de linearização de forma que seja uma condição de regime permanente. Você tem que escolher uma condição numérica. Utilize $\mu = 0{,}2$.

c) Linearize o sistema utilizando um dos métodos vistos em aula.

d) Calcule as matrizes do sistema linear utilizando os resultados dos itens (b) e (c).

e) Defina uma função no Simulink para descrever a Equação de Van der Pol e do sistema linearizado.

f) Utilizando as ferramentas do Matlab verifique se a condição de linearização definida em (b) está correta.

g) Utilizando as ferramentas do Matlab linearize o sistema em torno da condição de linearização calculada em (b) e (f) e verifique o resultado do item (d).

h) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial igual à condição de linearização e para um degrau na entrada de pequena amplitude e compare os resultados.

i) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial diferente da condição de linearizão e compare os resultados.

2) Considere o sistema composto por um pêndulo invertido sobre um carro, cujo modelo dinâmico é dado abaixo.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ ml\cos\big(\theta(t)\big)\dot{v}(t) + ml^2\dot{\omega}(t) - mgl\sin\big(\theta(t)\big) = 0 \\ (M+m)\dot{v}(t) + ml\cos\big(\theta(t)\big)\dot{\omega}(t) - ml\sin\big(\theta(t)\big)\omega(t)^2 = f(t) \end{cases}$$

onde θ é a posição angular do pêndulo, ω é a velocidade angular do pêndulo, v é a velocidade do carro, f é a força aplicada no carro, M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo e l é o comprimento do pêndulo.

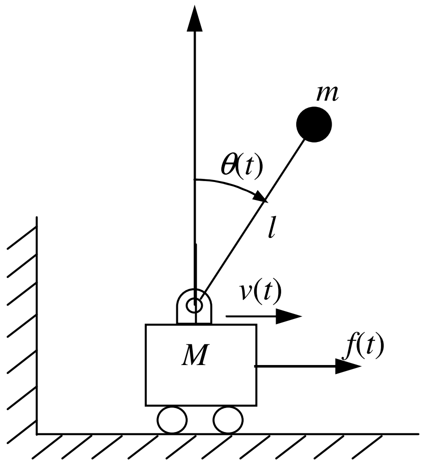


Figura. Esquema do pêndulo invertido sobre o carro.

Pede-se:

a) Determine a condição de linearização onde o pêndulo permanece parado na posição vertical npara cima.

b) Linearize a dinâmica do sistema.

c) Calcule as matrizes do sistema linearizado.

d) Defina uma função no Simulink para descrever a dinâmica do sistema não lienar e do sistema linearizado.

e) Utilizando as ferramentas do Matlab verifique se a condição de linearização definida em (b) está correta.

f) Utilizando as ferramentas do Matlab linearize o sistema em torno da condição de linearização calculada em (b) e (e) e verifique o resultado do item (d).

g) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial igual à condição de linearização e para pequenos degraus na entrada e compare os resultados.

h) Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial θ_0 = 0,1 rad e v_0 = 0 e compare os resultados.