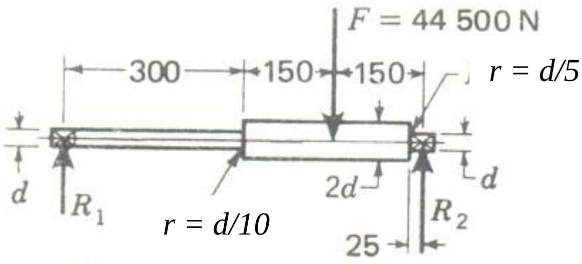
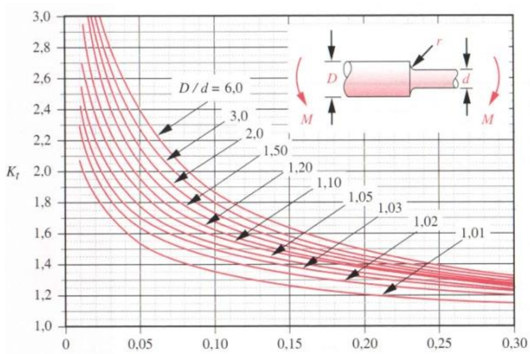
Duração da Prova: 60 min.

Questão única (10,0 pontos) - O eixo mostrado na figura está giando sujeito a um torque constante de 12,4 N m e suporta uma carga de 44500 N. Suas reações de apoio nos mancais são $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$. As especificações pedem um aço com $\boldsymbol{S_y}$ = 620 MPa e $\boldsymbol{S_{ut}}$ = 825 MPa. O eixo deve ser usinado e ter uma vida de 8.10^4 ciclos, correspondendo a uma confiabilidade de 90%. Determinar o diâmetro $\boldsymbol{d}$ baseado num fator de segurança mínimo de 1,6.



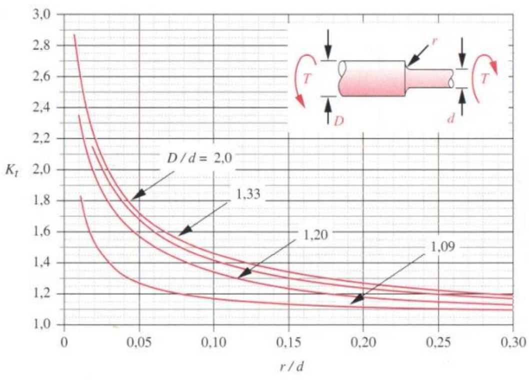
Dimensões em mm



$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$

onde:

D / d	A	b
6,00	0,87868	–0,33243
3,00	0,89334	–0,30860
2,00	0,90879	–0,28598
1,50	0,93836	–0,25759
1,20	0,97098	–0,21796
1,10	0,95120	–0,23757
1,07	0,97527	–0,20958
1,05	0,98137	–0,19653
1,03	0,98061	–0,18381
1,02	0,96048	–0,17711
1,01	0,91938	–0,17032



$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$

onde:

D / d	A	b
2,00	0,86331	–0,23865
1,33	0,84897	–0,23161
1,20	0,83425	–0,21649
1,09	0,90337	–0,12692

Bom trabalho!

Formulário:

Tensões

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x(x)}{A(x)}$$ Tensão normal devido à força normal

$$\sigma_{xy} = \frac{M_x(x)\ r}{J_p}$$ Tensão de cisalhamento devido ao momento torsor

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z(x)\ y}{I_{zz}}$$ Tensão normal devido ao momento fletor

$$\sigma_{xy} = -\frac{V_y(x)\ Q_{zp}(y)}{I_{zz}\ b(y)}$$ Tensão de cisalhamento devido à força cortante

Critérios de falha por fadiga para tensões uniaxiais variadas

Goodman modificado

$$\sigma_a = S_n\left(1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)$$

Gerber

$$\sigma_a = S_n\left(1 - \frac{\sigma_m^{\ 2}}{S_{ut}^{\ 2}}\right)$$

Fadiga dos Materiais

Para o diagrama *S-N*

$$S_n = a\,N^b \qquad \text{com} \qquad b = \frac{1}{\log N_1 - \log N_2}\log\frac{S_m}{S_e} \qquad \log a = \log S_m - b\log N_1$$

$$S_m = 0{,}9\,S_{ut} \quad \Rightarrow \textit{flexão}$$
$$S_m = 0{,}75\,S_{ut} \quad \Rightarrow \textit{força normal}$$

N_1 = 10^3 ciclos $\qquad$ N_2 = 10^6 ciclos

Fatores de Correção

p/ aços:

$$S_{e'} \cong 0{,}5\ S_{ut} \qquad S_{ut} < 1400\ MPa$$
$$S_{e'} \cong 700\,MPa \qquad S_{ut} \geq 1400\ MPa$$

$$S_e = C_{carreg} C_{tamanho} C_{superf} C_{temp} C_{conf} \, S_{e'}$$
$$S_f = C_{carreg} C_{tamanho} C_{superf} C_{temp} C_{conf} \, S_{f'}$$

- Efeito do carregamento

Flexão alternada: $C_{carreg} = 1$
Força normal alternada: $C_{carreg} = 0{,}7$
Torção alternada: $C_{carreg} = 1$

- Efeito do tamanho

Para peças cilíndricas

$d \le 0{,}3\,in\,(8mm)$	$C_{tamanho} = 1$
$0{,}3\,in \le d \le 10\,in$	$C_{tamanho} = 0{,}869\,d^{-0{,}097}$ (em in)
$8\,mm \le d \le 250\,mm$	$C_{tamanho} = 1{,}189\,d^{-0{,}097}$ (em mm)
$d \ge 10\,in$	$C_{tamanho} = 0{,}6$

* Somente esforço axial $C_{tamanho} = 1$
As falhas não são sensíveis ao tamanho

- Efeito da superfície

$C_{superf} \cong A(S_{ut})^b$ Se $C_{superf} > 1{,}0$ utilize $C_{superf} = 1{,}0$

Fonte: Shigley e Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1989, p. 283, com permissão.

	MPa		kpsi	
Acabamento superficial	*A*	*b*	*A*	*b*
Retificado	1,58	–0,085	1,34	–0,085
Usinado ou estirado a frio	4,51	–0,265	2,7	–0,265
Laminado a quente	57,7	–0,718	14,4	–0,718
Forjado	272	–0,995	39,9	–0,995

- Efeito da temperatura

	$T \le 450°C\,(840°F)$	$C_{temp} = 1$
p/ aços:	$450°C < T \le 550°C$	$C_{temp} = 1 - 0{,}0058\,(T - 450)$
	$840°F \le T \le 1020°F$	$C_{temp} = 1 - 0{,}0032\,(T - 840)$

- Efeito de confiabilidade

Fatores de confiabilidade para $S_d = 0{,}08\mu$

Confiabilidade %	C_{conf}
50	1,000
90	0,897
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659

Concentração de Tensão

$$\sigma = K_f\,\sigma_{nom}$$
$$\tau = K_{fs}\,\tau_{nom}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad \text{com} \quad q = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}}$$

Constante de Neuber para aços

S_{ut} (ksi)	$\sqrt{a}$ (in$^{0.5}$)
50	0,130
55	0,118
60	0,108
70	0,093
80	0,080
90	0,070
100	0,062
110	0,055
120	0,049
130	0,044
140	0,039
160	0,031
180	0,024
200	0,018
220	0,013
240	0,009

Material dúctil (Dowling, 1993): define-se K_{fm} - fator de concentração de tensão relativo à tensão média em fadiga

1ª Possibilidade $\sigma_{máx} < S_y$ $$K_{fm} = K_f$$

2ª Possibilidade $\sigma_{máx} > S_y$ e $|\sigma_{mín}| < S_y$ $$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|}$$

3ª Possibilidade $\Delta\sigma_{máx} > 2S_{y'}$ $$K_{fm} = 0$$

Dimensionamento do eixo

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left(K_f M_a\right)^2 + \frac{3}{4}\left(K_{fs} T_a\right)^2}}{S_e} + \frac{\sqrt{\left(K_{fm} M_m\right)^2 + \frac{3}{4}\left(K_{fsm} T_m\right)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

Solução da Prova:

1 Dados do Problema

$$Torque\ constante = 12{,}4\ N.m$$

$$S_y = 620\ MPa; S_{ut} = 825\ MPa$$

$$Usinado; Confiabilidade = 90\%$$

$$F = 44500\ N$$

$$N_f = 1{,}6$$

$$Vida\ \text{útil} = 8\times10^4\ ciclos$$

2 Cálculo das equações de força cortante e momento fletor

A equação do carregamento é (as reações nos apoios não entram no carregamento, pois são condições de contorno):

$$q(x) = -F < x - 450 >^{-1}$$

$$q(x) = -44500 < x - 450 >^{-1}$$

Integrando a equação do carregamento, obteremos a equação da força cortante:

$$V_y(x) = -44500 < x - 450 >^{0} + C_1$$

Integrando, mais uma vez, a equação do carregamento, obteremos a equação do momento fletor:

$$M_z(x) = -44500 < x - 450 >^{1} + C_1 x + C_2$$

Sabe-se que não há momento fletor nos mancais, portanto o momento fletor é nulo quando x=0 e x=600.

$$M_z(0) = C_2 = 0$$

$$M_z(600) = -44500\ (600 - 450)^1 + C_1\times600 = 0$$

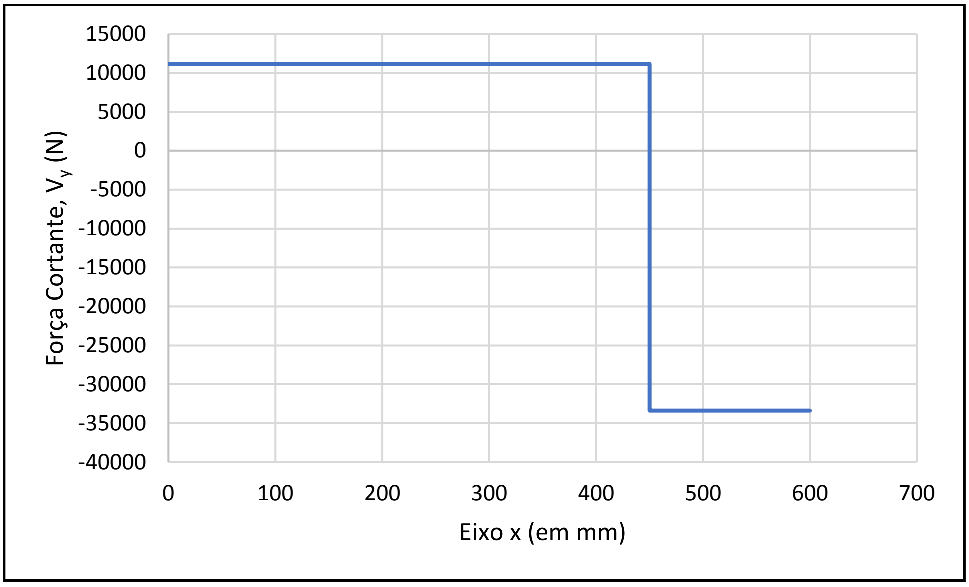
$$C_1 = \frac{44500\times150}{600} = 11125\ N$$

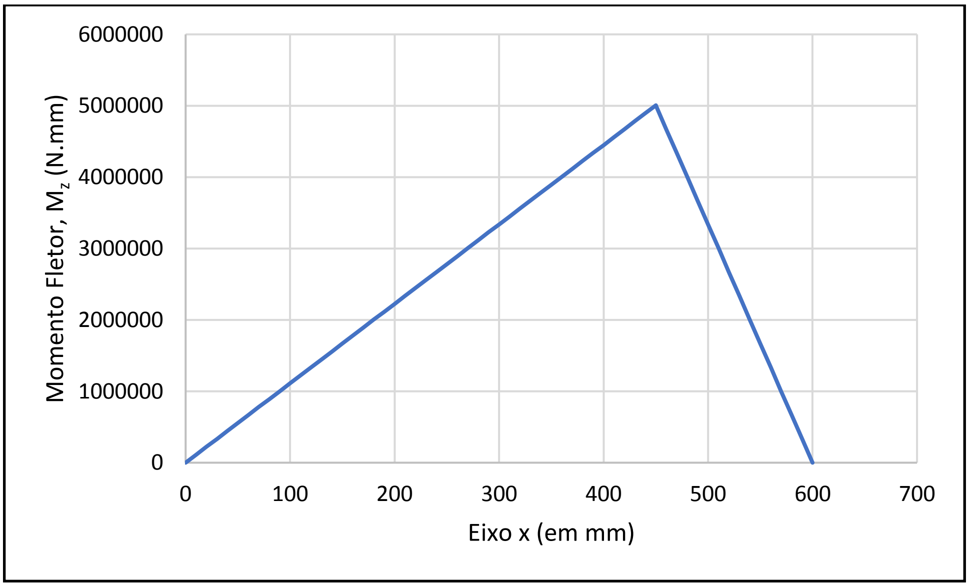
Portanto, as equações são:

$$V_y(x) = -44500 < x - 450 >^0 + 11125$$

$$M_z(x) = -44500 < x - 450 >^1 + 11125x$$

3 Diagramas de força cortante e momento fletor





4 Torque do sistema

O torque do eixo é constante e igual a 12,4 N.m.

5 Cálculo do limite de fadiga

5.1 Limite de fadiga do corpo de prova

$$S_{ut} = 825\ MPa < 1400\ MPa$$

Para esta condição utiliza-se a seguinte expressão para estimar o limite de fadiga do corpo de prova:

$$S'_e = 0{,}5 S_{ut} = 0{,}5 \times 825 = 412{,}5\ MPa$$

5.2 Coeficientes de correção do limite de fadiga

$$C_{carregamento} = 1, pois\ se\ trata\ de\ flexão\ e\ torção$$

$$C_{tamanho} = 1, pois\ ainda\ desconhecemos\ o\ diametro$$

$$C_{temperatura} = 1, pois\ se\ trata\ de\ baixa\ temperatura$$

Para o coeficiente de confiabilidade, devemos seguir a tabela abaixo:

Fatores de confiabilidade para $S_d = 0{,}08\mu$

Confiabilidade %	C_{conf}
50	1,000
90	0,897
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659

Para confiabilidade de 90%:

$$C_{confiabilidade} = 0{,}897$$

Para o coeficiente de superfície: a peça é usinada. Utilizando a tabela abaixo:

Fonte: Shigley e Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1989, p. 283, com permissão.

	MPa		kpsi	
Acabamento superficial	*A*	*b*	*A*	*b*
Retificado	1,58	−0,085	1,34	−0,085
Usinado ou estirado a frio	4,51	−0,265	2,7	−0,265
Laminado a quente	57,7	−0,718	14,4	−0,718
Forjado	272	−0,995	39,9	−0,995

O cálculo do coeficiente de superfície é então feito da seguinte forma:

$$C_{superfície} = 4{,}51 \times S_{ut}^{-0{,}265} = 4{,}51 \times 825^{-0{,}265} = 0{,}76$$

5.3 Calculando o limite de fadiga da peça

$$S_e = S_e' \times C_{carr} C_{tam} C_{superf} C_{temp} C_{conf} = 412{,}5 \times 0{,}897 \times 0{,}76 = 281{,}2\ MPa$$

6 Cálculo da resistência à fadiga do eixo (S_n)

O primeiro passo é calcular a resistência à fadiga do eixo para 1000 ciclos, através da seguinte equação:

$$S_m = 0{,}9\, S_{ut} = 0{,}9 \times 825 = 742{,}5\ MPa$$

Depois, temos que calcular os coeficientes do fit da curva logarítmica, a e b:

$$b = \frac{1}{log10^3 - log10^6} \log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = \frac{1}{3-6} \log\left(\frac{742{,}5}{281{,}2}\right) = -0{,}14$$

$$a = 10^{\log S_m - b.\log 10^3} = 10^{\log(742{,}5) - (-0{,}14) \times 3} = 1953$$

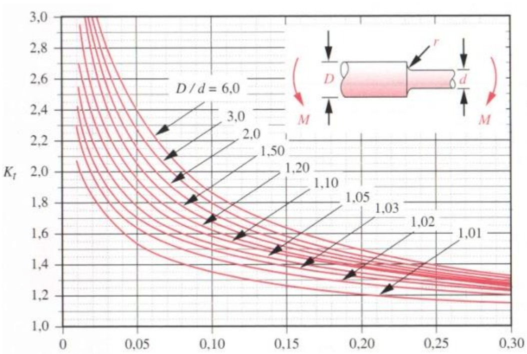
Por fim, acha-se a resistência à fadiga necessária para 8 x 10^4 ciclos.

$$S_n = 1953\ (8 \times 10^4)^{-0{,}14} = 402\ MPa$$

7 Cálculo de concentração de tensão em fadiga

O próximo passo é a obtenção do fator de concentração de tensão (o estático). Para isso, podemos utilizar a figura abaixo:

Flexão:



$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$

onde:

D / d	A	b
6,00	0,87868	−0,33243
3,00	0,89334	−0,30860
2,00	0,90879	−0,28598
1,50	0,93836	−0,25759
1,20	0,97098	−0,21796
1,10	0,95120	−0,23757
1,07	0,97527	−0,20958
1,05	0,98137	−0,19653
1,03	0,98061	−0,18381
1,02	0,96048	−0,17711
1,01	0,91938	−0,17032

Para obtermos o valor de K_t, precisamos de dois fatores dados no enunciado:

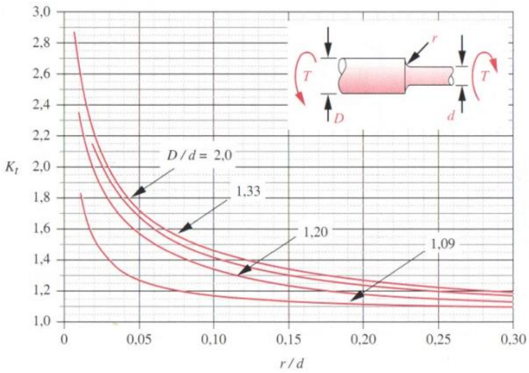
$$\frac{D}{d} = 2$$

$$r = \frac{d}{10} \rightarrow \frac{r}{d} = 0{,}10$$

Para D/d = 2, temos:

$$K_t = 0{,}90879 \left(\frac{r}{d}\right)^{-0{,}28598} = 0{,}90879\,(0{,}10)^{-0{,}28598} = 1{,}76$$

Torção:



$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$

onde:

D / d	A	b
2,00	0,86331	−0,23865
1,33	0,84897	−0,23161
1,20	0,83425	−0,21649
1,09	0,90337	−0,12692

Para D/d = 2, temos:

$$K_t = 0{,}86331 \left(\frac{r}{d}\right)^{-23865} = 0{,}86331\,(0{,}10)^{-23865} = 1{,}50$$

Próximo passo é obter o valor de raiz de a e calcular o valor de q. Para tal, a tabela abaixo deve ser consultada:

Constante de Neuber para aços

S_{ut} (ksi)	$\sqrt{a}$ (in^{0,5})
50	0,130
55	0,118
60	0,108
70	0,093
80	0,080
90	0,070
100	0,062
110	0,055
120	0,049
130	0,044
140	0,039
160	0,031
180	0,024
200	0,018
220	0,013
240	0,009

Para utilizarmos a tabela, devemos transformar o atual valor de S_{ut} para kpsi.

$$1\ ksi = 6{,}894757\ MPa$$

$$S_{ut} = 825\ MPa \frac{1\ ksi}{6{,}894757\ MPa} = 119{,}7\ ksi$$

Pela tabela, de maneira grosseira:

$$\sqrt{a} = 0{,}049\ \sqrt{in}$$

Para aplicarmos a equação de q, assumiremos:

$$r = 0{,}01 \rightarrow \sqrt{r} = 0{,}1\ \sqrt{in}$$

Então:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}049}{0{,}10}} = 0{,}67$$

Aços possuem sensibilidade ao entalhe maior quando submetidos à torção. Por isso, quando calculamos o valor de raiz de a, utilizamos a seguinte convenção:

$$\text{"S}_{\text{ut}}\text{ de torção"} = S_{ut} + 20 = 139{,}7\ kpsi$$

Portanto, para torção:

$$\sqrt{a} = 0{,}039\ \sqrt{in}$$

$$q_s = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}039}{0{,}10}} = 0{,}72$$

Finalmente, calcula-se os fatores de concentração de tensão em fadiga para flexão e torção:

$$K_f = 1 + q\ (K_t - 1)$$

$$K_f = 1 + 0{,}67\ (1{,}76 - 1) = 1{,}51$$

$$K_{fs} = 1 + q_s\ (K_{ts} - 1)$$

$$K_{fs} = 1 + 0{,}72\ (1{,}5 - 1) = 1{,}36$$

Como não estamos trabalhando com tensões acima do limite de escoamento:

$$K_f = K_{fm} = 1{,}51$$

$$K_{fs} = K_{fsm} = 1{,}36$$

8 Dimensionando o eixo

Dados para dimensionamento, no ponto de mudança de diâmetro (x=300mm):

$$M_a = 3337500\ N.mm$$

$$T_m = 12{,}4\ N.m = 12400\ N.mm$$

$$S_n = 402\ MPa$$

$$S_y = 620\ MPa$$

$$K_f = 1{,}51$$

$$K_{fsm} = 1{,}36$$

Aplicando na seguinte equação:

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d = \left\{ \frac{32 \times 1{,}6}{\pi} \left[\left(1{,}51 \frac{3337500}{402} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(1{,}36 \frac{12400}{620} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 58{,}90\ mm$$

Escolhendo o eixo com tamanho comercial, adotaremos:

$$d = 60\ mm$$

9 Consolidação do diâmetro de 60mm

Primeiramente devemos recalcular a resistência à fadiga, agora considerando o coeficiente de tamanho, que anteriormente foi assumido como 1.

<u>Efeito do tamanho</u>

Para peças cilíndricas

$$
\begin{array}{ll}
d \le 0{,}3in\,(8mm) & C_{tamanho} = 1 \\
0{,}3in \le d \le 10in & C_{tamanho} = 0{,}869\,d^{-0{,}097}\,(\text{em } in) \\
8mm \le d \le 250mm & C_{tamanho} = 1{,}189\,d^{-0{,}097}\,(\text{em } mm) \\
d \ge 10in & C_{tamanho} = 0{,}6
\end{array}
$$

Então:

$$C_{tam} = 1{,}189 \times d^{-0{,}097} = 1{,}189 \times 60^{-0{,}097} = 0{,}799$$

O limite de fadiga então:

$$S_e = S_e' \times C_{carr} C_{tam} C_{superf} C_{temp} C_{conf} = 412{,}5 \times 0{,}897 \times 0{,}76 \times 0{,}799 = 224{,}7\ MPa$$

Assim, podemos calcular a resistência em fadiga:

$$b = \frac{1}{log10^3 - log10^6} \log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = \frac{1}{3-6} \log\left(\frac{742{,}5}{224{,}7}\right) = -0{,}17$$

$$a = 10^{\log S_m - b.\log 10^3} = 10^{\log(742{,}5) - (-0{,}17)\times 3} = 2402{,}7$$

$$S_n = 2402{,}7\ (8 \times 10^4)^{-0{,}17} = 352{,}5\ MPa$$

E conseguiremos também ajustar os fatores de concentração em fadiga:

$$r = \frac{d}{10} = \frac{60}{10} = 6mm = \frac{6}{25{,}4}\ in = 0{,}2362\ in$$

$$\sqrt{r} = 0{,}486\ \sqrt{in}$$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}049}{0{,}486}} = 0{,}908$$

$$q_s = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}039}{0{,}486}} = 0{,}926$$

$$K_f = 1 + q\ (K_t - 1)$$

$$K_f = 1 + 0{,}908\ (1{,}76 - 1) = 1{,}686$$

$$K_{fs} = 1 + q_s\ (K_{ts} - 1)$$

$$K_{fs} = 1 + 0{,}926\ (1{,}5 - 1) = 1{,}459$$

Aplicando na fórmula do diâmetro:

$$d = \left\{\frac{32\times 1{,}6}{\pi}\left[\left(1{,}686\frac{3337500}{352{,}5}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1{,}459\frac{12400}{620}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 63{,}84\ mm > 60\ mm$$

Isto significa que o diâmetro de 60mm não é adequado para ser utilizado neste eixo, portanto devemos iterar mais uma vez utilizando um diâmetro maior:

$$d = 65\ mm$$

10 <u>Consolidação do diâmetro de 65mm</u>

$$C_{tam} = 1{,}189\times d^{-0{,}097} = 1{,}189\times 65^{-0{,}097} = 0{,}793$$

O limite de fadiga então:

$$S_e = S_e'\ \times C_{carr} C_{tam} C_{superf} C_{temp} C_{conf} = 412{,}5\times 0{,}897\times 0{,}76\times 0{,}793 = 223\ MPa$$

Assim, podemos calcular a resistência em fadiga:

$$b = \frac{1}{log 10^3 - log 10^6}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = \frac{1}{3-6}\log\left(\frac{742{,}5}{223}\right) = -0{,}17$$

$$a = 10^{\log S_m - b.\log 10^3} = 10^{\log(742{,}5)-(-0{,}17)\times 3} = 2402{,}7$$

$$S_n = 2402{,}7\ (8\times 10^4)^{-0{,}17} = 352{,}5\ MPa$$

E conseguiremos também ajustar os fatores de concentração em fadiga:

$$r = \frac{d}{10} = \frac{65}{10} = 6{,}5mm = \frac{6{,}5}{25{,}4}\ in = 0{,}2559\ in$$

$$\sqrt{r} = 0{,}506\ \sqrt{in}$$

$$q = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1+\frac{0{,}049}{0{,}506}} = 0{,}912$$

$$q_s = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1+\frac{0{,}039}{0{,}506}} = 0{,}928$$

$$K_f = 1 + q\,(K_t - 1)$$

$$K_f = 1 + 0{,}912\,(1{,}76 - 1) = 1{,}689$$

$$K_{fs} = 1 + q_s\,(K_{ts} - 1)$$

$$K_{fs} = 1 + 0{,}928\,(1{,}5 - 1) = 1{,}46$$

Aplicando na fórmula do diâmetro:

$$d = \left\{\frac{32\times 1{,}6}{\pi}\left[\left(1{,}689\frac{3337500}{352{,}5}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1{,}46\frac{12400}{620}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 63{,}88\,mm < 65\,mm$$

Finalmente, o diâmetro de 65 mm prova-se adequado para ser utilizado. Outro modo de afirmar isso (além da maneira de encontrar um diâmetro menor que o comercial escolhido anteriormente) é calcular o coeficiente de segurança, que deve obrigatoriamente ser maior que o mínimo estipulado. Neste caso:

$$65 = \left\{\frac{32\times N_f}{\pi}\left[\left(1{,}689\frac{3337500}{352{,}5}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1{,}46\frac{12400}{620}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$N_f = 1{,}686 > 1{,}6\ (Portanto, está\ aprovado)$$

O eixo deverá ter 65 mm de diâmetro.