

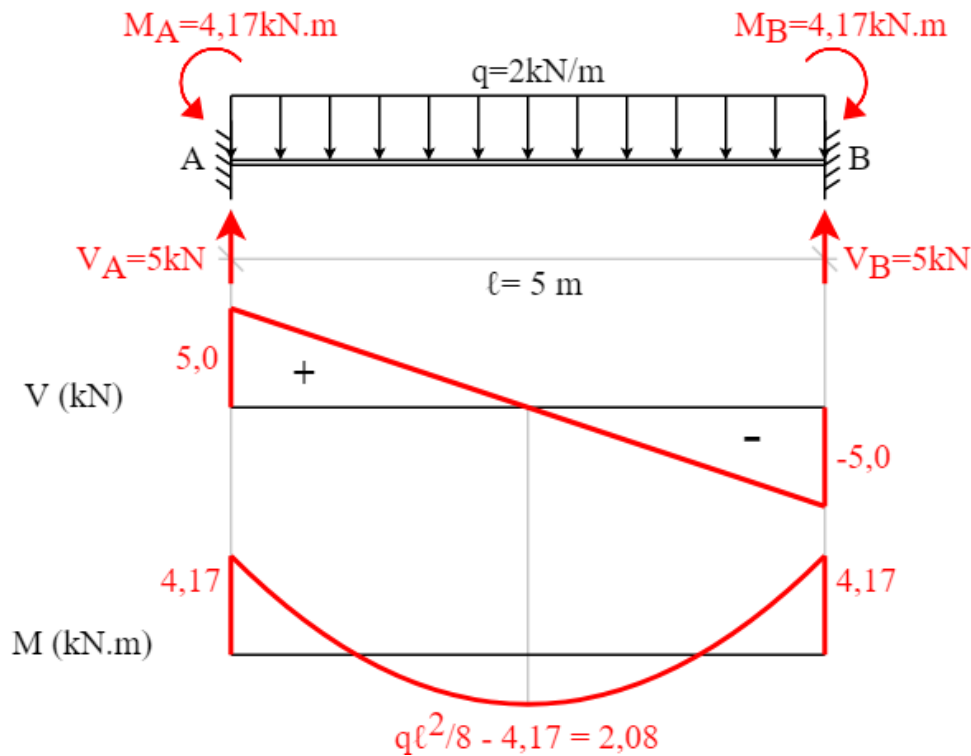
Nome :

N° USP:

Assinatura:

Exercício 4a: Para a viga bi-engastada mostrada na figura abaixo, pede-se:

- As reações de apoio;
- Os diagramas de momento fletor e esforço cortante.



Resolução:

a) Reações de apoio

Viga 3x hiperestática. Porém, fazendo o somatório $\sum F_x = H_A + H_B = 0$ pode-se reduzir uma vez o grau de hiperestaticidade.

No caso de uma viga bi-engastada com carga uniformemente distribuída em toda a sua extensão, tem-se que:

$$V_A = V_B \text{ (Simetria)}$$

$$\uparrow \sum F_y = V_A = V_B = \frac{q\ell}{2} = \frac{2 \times 5}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$M_A = M_B \text{ (Simetria)}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad \therefore \quad M_A + \frac{q\ell^2}{2} - M_B + V_B \times \ell = 0$$

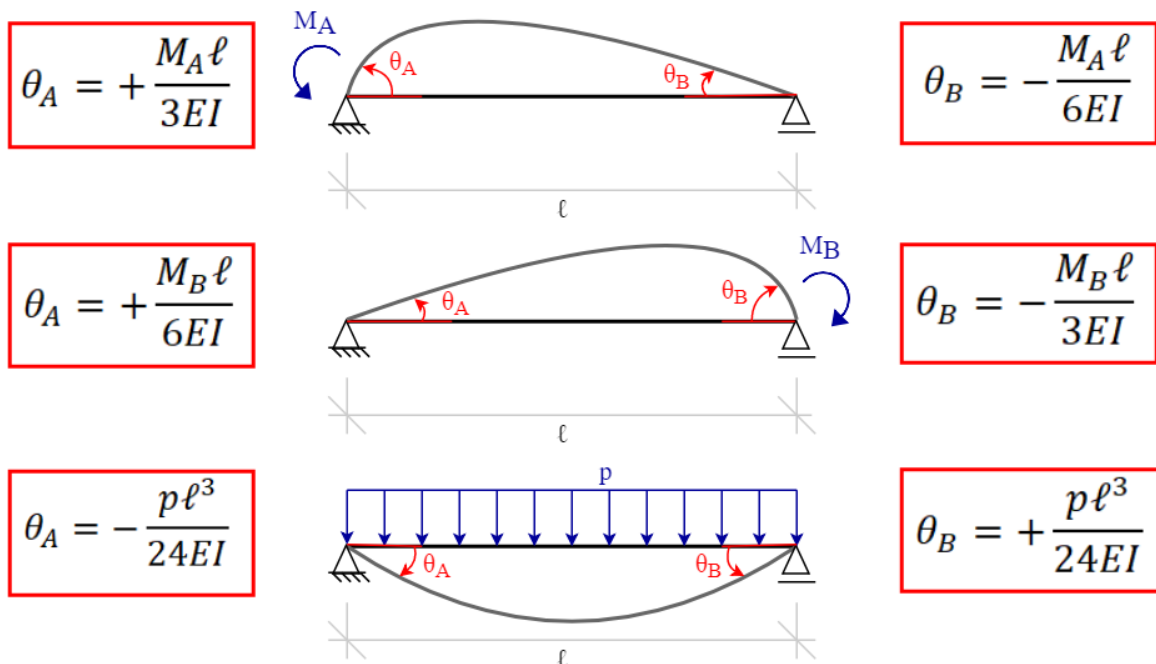
$$V_B = \frac{q\ell}{2} = 5 \text{ kN}$$

Pode-se confirmar o valor de V_B .



Para calcular M_A e M_B , é necessária uma equação de compatibilidade.

A estrutura isostática fundamental é a seguinte (liberando os hiperestáticos das rotações em A e B):



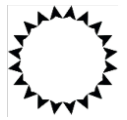
$$\theta_A = \theta_{A,q} + \theta_{A,M_A} + \theta_{A,M_B} = 0$$

$$-\frac{q \ell^3}{24EI} + \frac{M_A \ell}{3EI} + \frac{M_B \ell}{6EI} = 0 \rightarrow -q \ell^3 + 8M_A \ell + 4M_B \ell = 0 \rightarrow 8M_A + 4M_B = 50$$

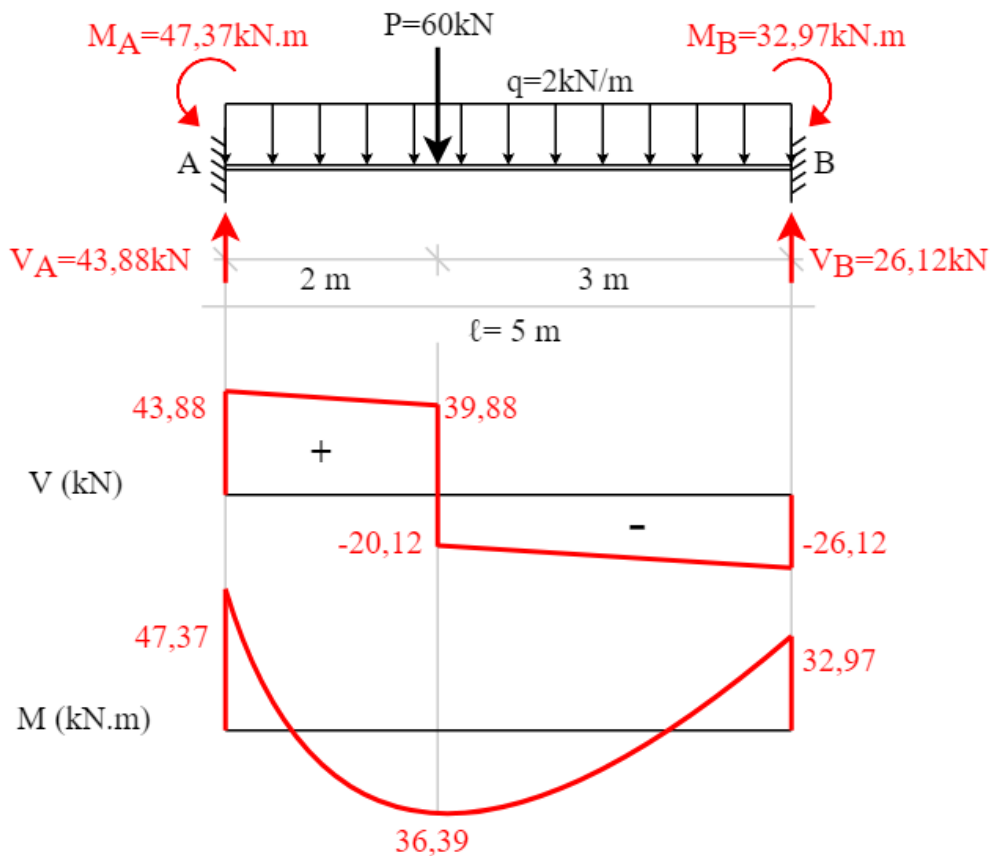
Levando-se em conta que $M_A = M_B$:

$$M_A = M_B = 4,17 \text{ kN.m}$$

A partir dos dados obtidos, é possível traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor.



Exercício 4b: Utilizando o princípio da superposição de efeitos, determine as reações de apoio e os diagramas de momento fletor e esforço cortante da viga mostrada na figura abaixo.

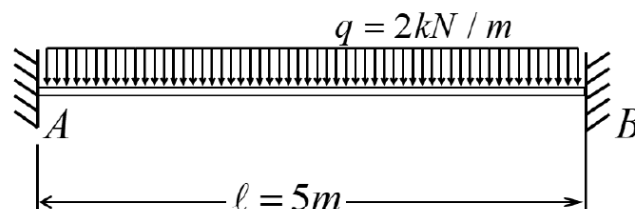


Resolução:

Viga 3x hiperestática. Porém, fazendo o somatório $\sum F_x = H_A + H_B = 0$ pode-se reduzir uma vez o grau de hiperestaticidade.

É possível obter os diagramas de esforços solicitantes por meio da combinação dos efeitos da viga bi-engastada submetida a uma carga uniformemente distribuída (1) e da viga bi-engastada submetida a uma carga pontual (2).

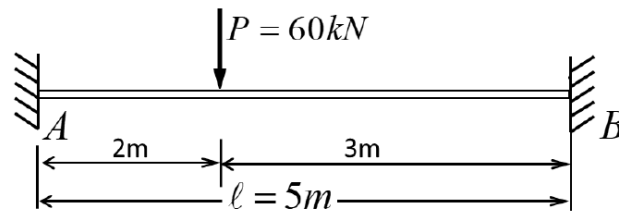
1) Viga bi-engastada submetida a uma carga uniformemente distribuída:



Como calculado no exercício 4a:

$$V_{A,q} = V_{B,q} = 5 \text{ kN}$$

$$M_{A,q} = M_{B,q} = 4,17 \text{ kN.m}$$

**2) Viga bi-engastada submetida a uma carga pontual:**

$$\uparrow \sum F_y = V_{A,P} + V_{B,P} - P = 0 \quad \therefore V_{A,P} + V_{B,P} = 60 \quad (\text{I})$$

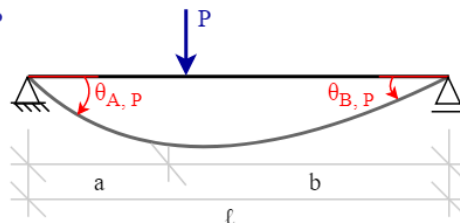
$$\sum M_{(A)} = 0 \quad \therefore M_{A,P} - M_{B,P} + V_{B,P} \times \ell - P \times a = 0 \quad \therefore M_{A,P} - M_{B,P} + 5V_{B,P} = 120 \quad (\text{II})$$

Para calcular as reações de apoio, são necessárias equações de compatibilidade.

Estrutura Isostática Fundamental: Viga biapoiada. $M_{A,P}$ e $M_{B,P}$ são as incógnitas hiperestáticas da viga submetida ao carregamento pontual P.

1. Carregamento Externo P

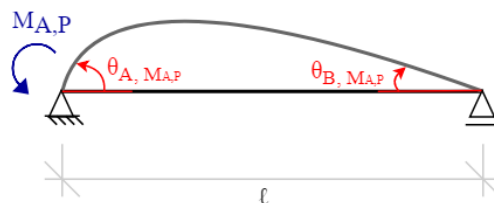
$$\theta_{A,P} = -\frac{Pb(\ell^2 - b^2)}{6\ell EI}$$



$$\theta_{B,P} = +\frac{Pa(\ell^2 - a^2)}{6\ell EI}$$

2. Incógnita hiperestática $M_{A,P}$

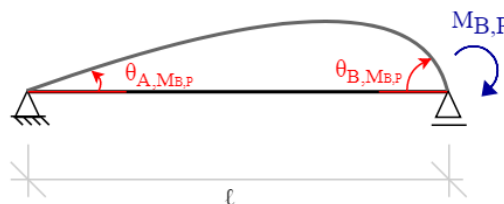
$$\theta_{A,M_{A,P}} = +\frac{M_{A,P}\ell}{3EI}$$



$$\theta_{B,M_{A,P}} = -\frac{M_{A,P}\ell}{6EI}$$

3. Incógnita hiperestática $M_{B,P}$

$$\theta_{A,M_{B,P}} = +\frac{M_{B,P}\ell}{6EI}$$



$$\theta_{B,M_{B,P}} = -\frac{M_{B,P}\ell}{3EI}$$

A combinação dos carregamentos internos com o esforço hiperestático deve recuperar as condições de contorno da estrutura original. Equações de compatibilidade:

$$\theta_A = \theta_{A,P} + \theta_{A,M_{A,P}} + \theta_{A,M_{B,P}} = 0$$

$$\theta_A = -\frac{Pb(\ell^2 - b^2)}{6\ell EI} + \frac{M_{A,P}\ell}{3EI} + \frac{M_{B,P}\ell}{6EI} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3}M_{A,P} + \frac{5}{6}M_{B,P} = 96$$

$$\therefore 10M_{A,P} + 5M_{B,P} = 576 \quad (\text{III})$$



$$\theta_B = \theta_{B,P} + \theta_{B,M_{A,P}} + \theta_{B,M_{B,P}} = 0$$

$$\theta_B = \frac{Pa(\ell^2 - a^2)}{6\ell EI} - \frac{M_{A,P}\ell}{6EI} - \frac{M_{B,P}\ell}{3EI} = 0 \rightarrow \frac{5}{6}M_{A,P} + \frac{5}{3}M_{B,P} = 84$$

$$\therefore 5M_{A,P} + 10M_{B,P} = 504 \quad (\text{IV})$$

Resolvendo (III) e (IV), chega-se aos valores:

$$M_{A,P} = 43,2 \text{ kN.m}$$

$$M_{B,P} = 28,8 \text{ kN.m}$$

Substituindo-se os valores na equação (II):

$$43,2 - 28,8 + 5V_{B,P} = 120 \quad \therefore V_{B,P} = 21,12 \text{ kN}$$

Dessa forma, em (I), chega-se a:

$$V_{A,P} = 38,88 \text{ kN}$$

3) Superposição de efeitos

As reações de apoio são dadas por:

$$V_A = V_{A,q} + V_{A,P} = 5 + 38,88 \quad \therefore V_A = 43,88 \text{ kN}$$

$$V_B = V_{B,q} + V_{B,P} = 5 + 21,12 \quad \therefore V_B = 26,12 \text{ kN}$$

$$M_A = M_{A,q} + M_{A,P} = 4,17 + 43,2 \quad \therefore M_A = 47,37 \text{ kN}$$

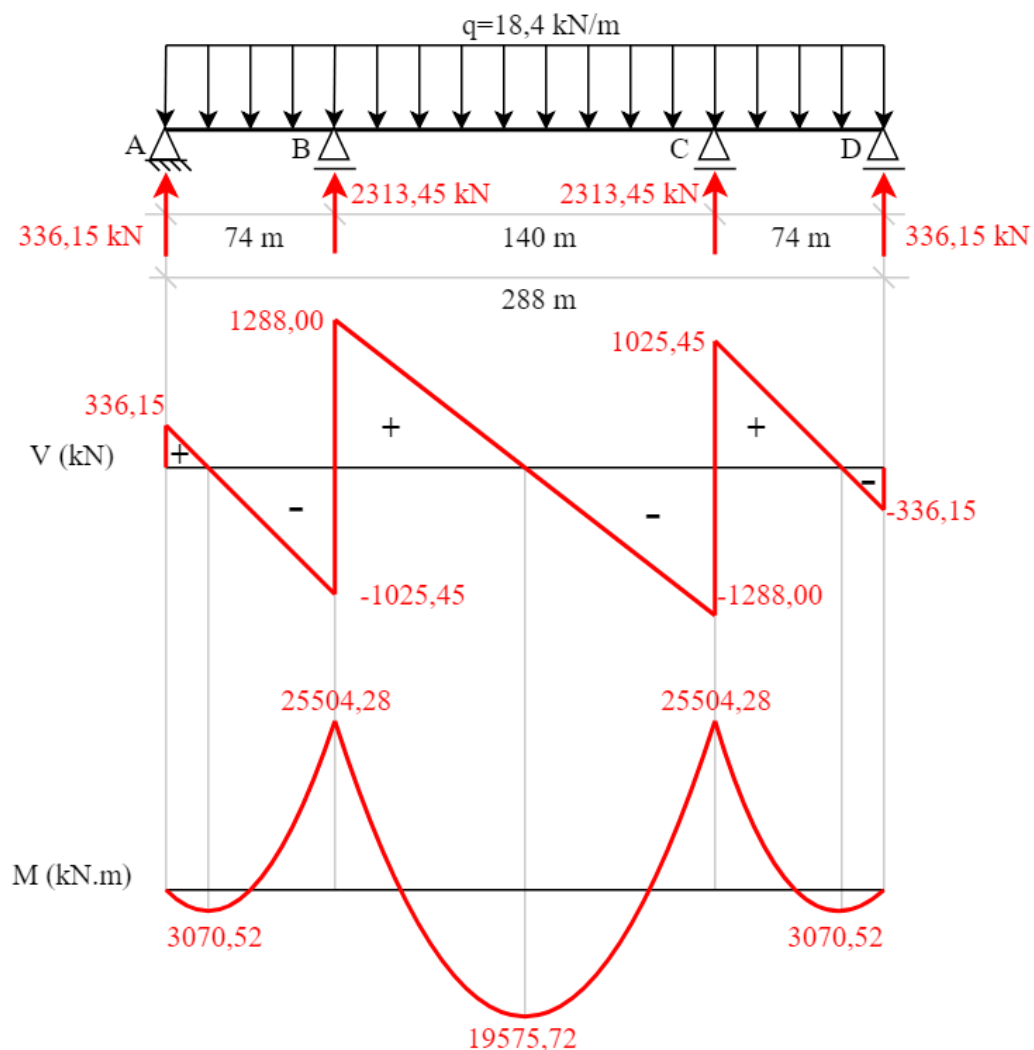
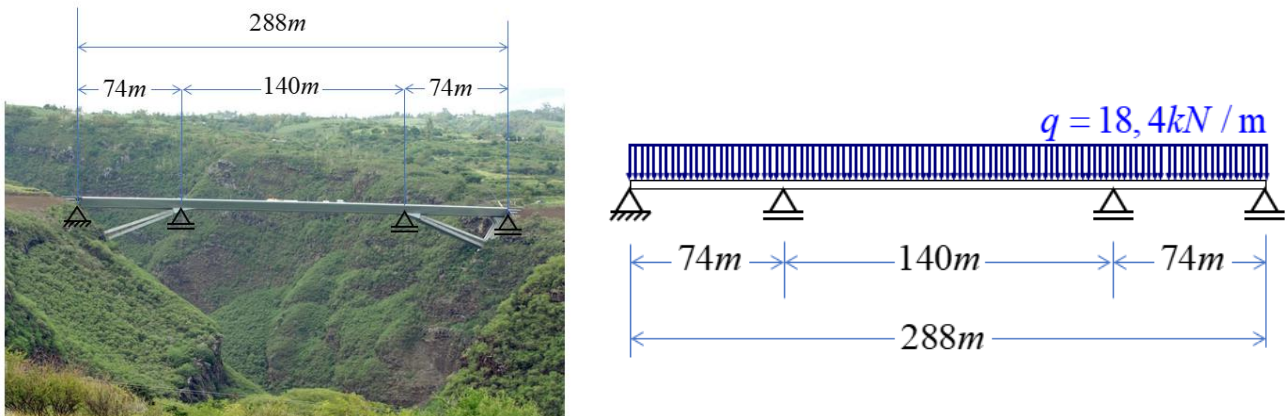
$$M_B = M_{B,q} + M_{B,P} = 4,17 + 28,8 \quad \therefore M_B = 32,97 \text{ kN}$$

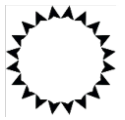
Obs.: Fique atento à nomenclatura!

A partir dos dados obtidos, é possível traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor.

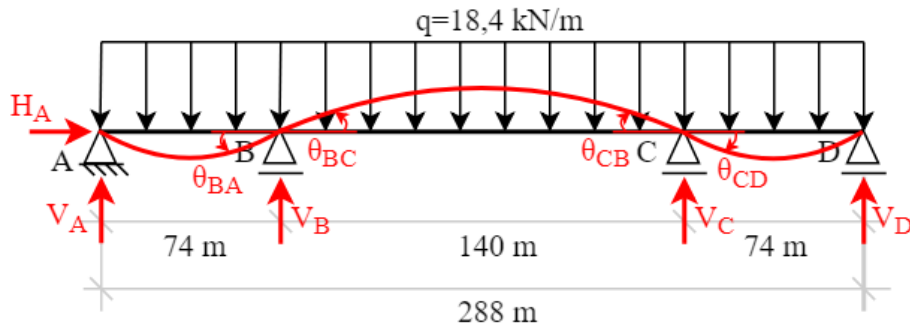


Exercício 4c: O viaduto *Grande Ravine* foi construído na Ilha francesa de La Réunion, no Oceano Índico, para conectar as localidades de Saint-Paul e Étang-Salé. O viaduto possui 288m de comprimento e 20m de largura. Conforme ilustra a figura abaixo, podemos considerar de forma simplificada seu sistema estrutural como uma viga contínua com três tramos. Calcule as reações de apoio e desenhe os diagramas de esforços solicitantes considerando uma carga de projeto $q=18,4$ kN/m.



**Resolução:**

Viga de três tramos (5 reações de apoio): 2x hiperestática. A rotação sobre cada um dos apoios intermediários oferece uma equação de compatibilidade.

**1) Equações de equilíbrio**

$$\rightarrow \sum F_x = H_A = 0$$

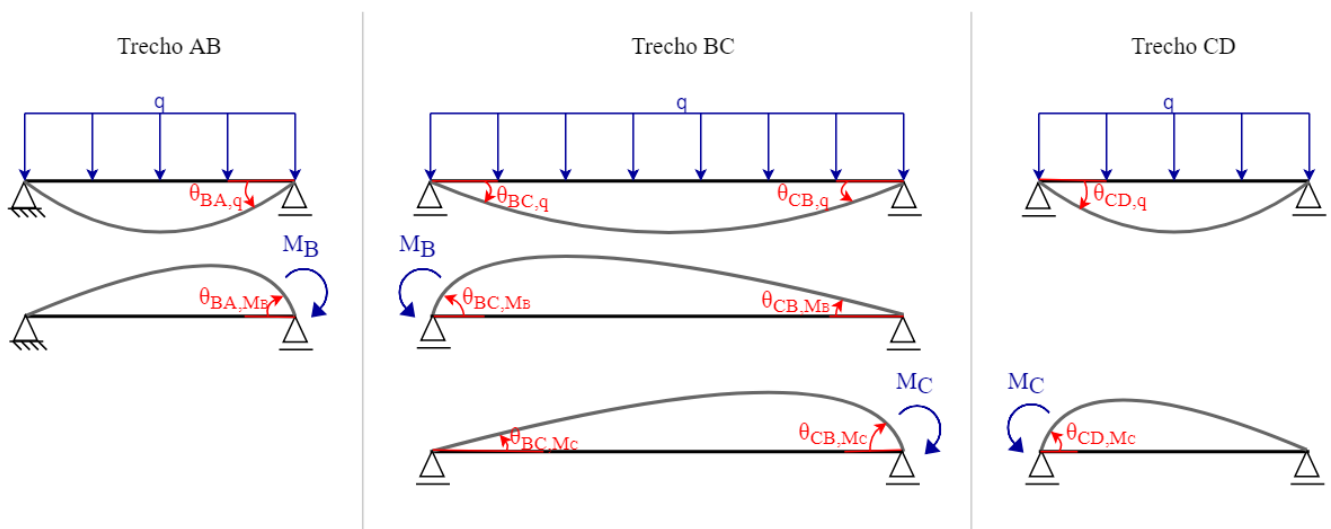
$$\uparrow \sum F_y = V_A + V_B + V_C + V_D - q\ell = 0 \quad \therefore V_A + V_B + V_C + V_D = 5.299,2 \text{ (I)}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad \therefore 74V_B + 214V_C + 288V_D - \frac{q\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore 37V_B + 107V_C + 144V_D = 381.542,4 \text{ (II)}$$

2) Equações de compatibilidade

$$\theta_{BA} = \theta_{BC}$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CD}$$



$$\theta_{BA,q} + \theta_{BA,M_B} = \theta_{BC,q} + \theta_{BC,M_B} + \theta_{BC,M_C}$$

Pelas tabelas:

$$\frac{q\ell_{BA}^3}{24EI} - \frac{M_B\ell_{BA}}{3EI} = -\frac{q\ell_{BC}^3}{24EI} + \frac{M_B\ell_{BC}}{3EI} + \frac{M_C\ell_{BC}}{6EI}$$



$$\frac{18,4 \times (74)^3}{24} - \frac{M_B \times 74}{3} = -\frac{18,4 \times (140)^3}{24} + \frac{M_B \times 140}{3} + \frac{M_C \times 140}{6}$$

$$107M_B + 35M_C = 3.621.607,6 \text{ (III)}$$

$$\theta_{CB,q} + \theta_{CB,M_B} + \theta_{CB,M_C} = \theta_{CD,q} + \theta_{CD,M_C}$$

$$\frac{q\ell_{CB}^3}{24EI} - \frac{M_B\ell_{CB}}{6EI} - \frac{M_C\ell_{CB}}{3EI} = -\frac{q\ell_{CD}^3}{24EI} + \frac{M_C\ell_{CD}}{3EI}$$

$$\frac{18,4 \times (140)^3}{24} - \frac{M_B(140)}{6} - \frac{M_C(140)}{3} = -\frac{18,4 \times (74)^3}{24} + \frac{M_C \times 74}{3}$$

$$107M_C + 35M_B = 3.621.607,6 \text{ (IV)}$$

Resolvendo (III) e (IV), temos que

$$M_B = M_C = 25.504,28 \text{ kN.m}$$

3) Reações de apoio

No trecho AB:

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad \therefore \quad 74V_{BA} - \frac{18,4 \times (74)^2}{2} - 25.504,28 = 0 \quad \therefore \quad V_{BA} = 1.025,45 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = V_A + V_{BA} - q\ell_{AB} = 0 \quad \therefore \quad V_A = 336,15 \text{ kN}$$

No trecho BC:

$$\sum M_{(B)} = 0 \quad \therefore \quad 140V_{CB} - \frac{18,4 \times (140)^2}{2} - 25.504,28 + 25.504,28 = 0 \quad \therefore \quad V_{CB} = 1.288,00 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = V_{BC} + V_{CB} - q\ell_{BC} = 0 \quad \therefore \quad V_{BC} = 1.288,00 \text{ kN}$$

No trecho CD:

$$\sum M_{(C)} = 0 \quad \therefore \quad 74V_D - \frac{18,4 \times (74)^2}{2} + 25.504,28 = 0 \quad \therefore \quad V_D = 336,15 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = V_{CD} + V_D - q\ell_{CD} = 0 \quad \therefore \quad V_{CD} = 1.025,45 \text{ kN}$$

$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = 2.313,45 \text{ kN}$$

$$V_C = V_{CB} + V_{CD} = 2.313,45 \text{ kN}$$

Os valores calculados podem ser verificados em (I) e (II).

A partir dos dados obtidos, é possível traçar os diagramas de esforço cortante e de momento fletor.