PEF2603
Estruturas na Arquitetura III -
- Sistemas Reticulados e Laminares

Deformações na Flexão

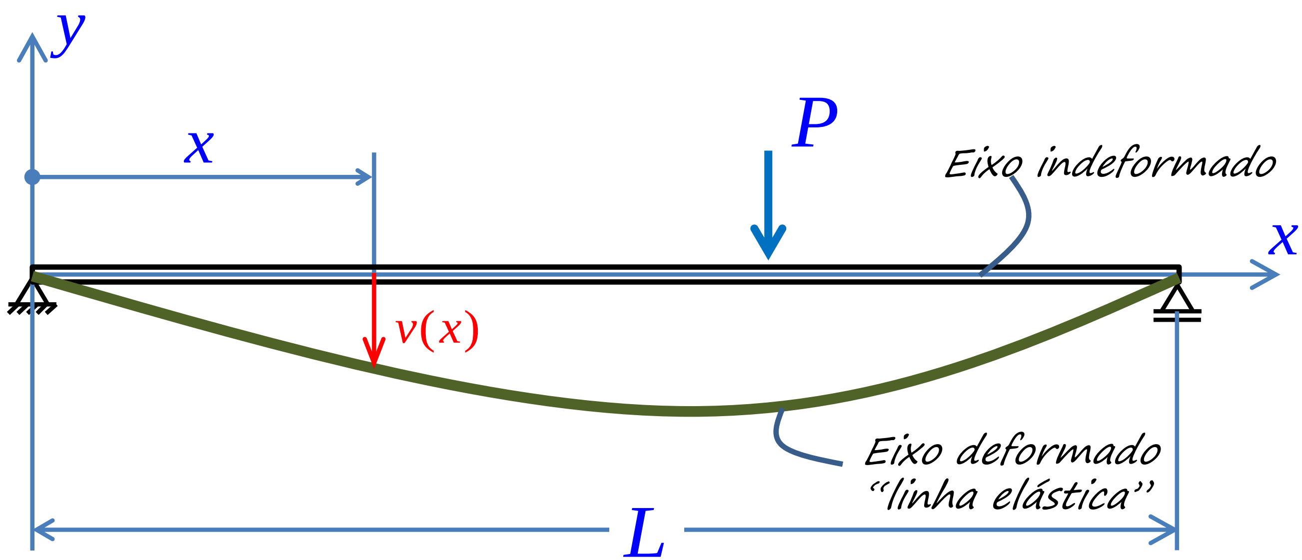
(18/03/2019)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

1º Semestre 2018

Deformações na Flexão

- O conhecimento das deformações de uma estrutura têm um interesse intrínseco, uma vez que essas deformações devem ser limitadas;
- O estudo das deformações permite a resolução de problemas hiperestáticos, para os quais não bastam as equações de equilíbrio;
- Inicialmente, definimos alguma notação, tomando como exemplo o caso da deformação da viga biapoiada de eixo originalmente reto, que se deforma quando sujeita a um carregamento externo:

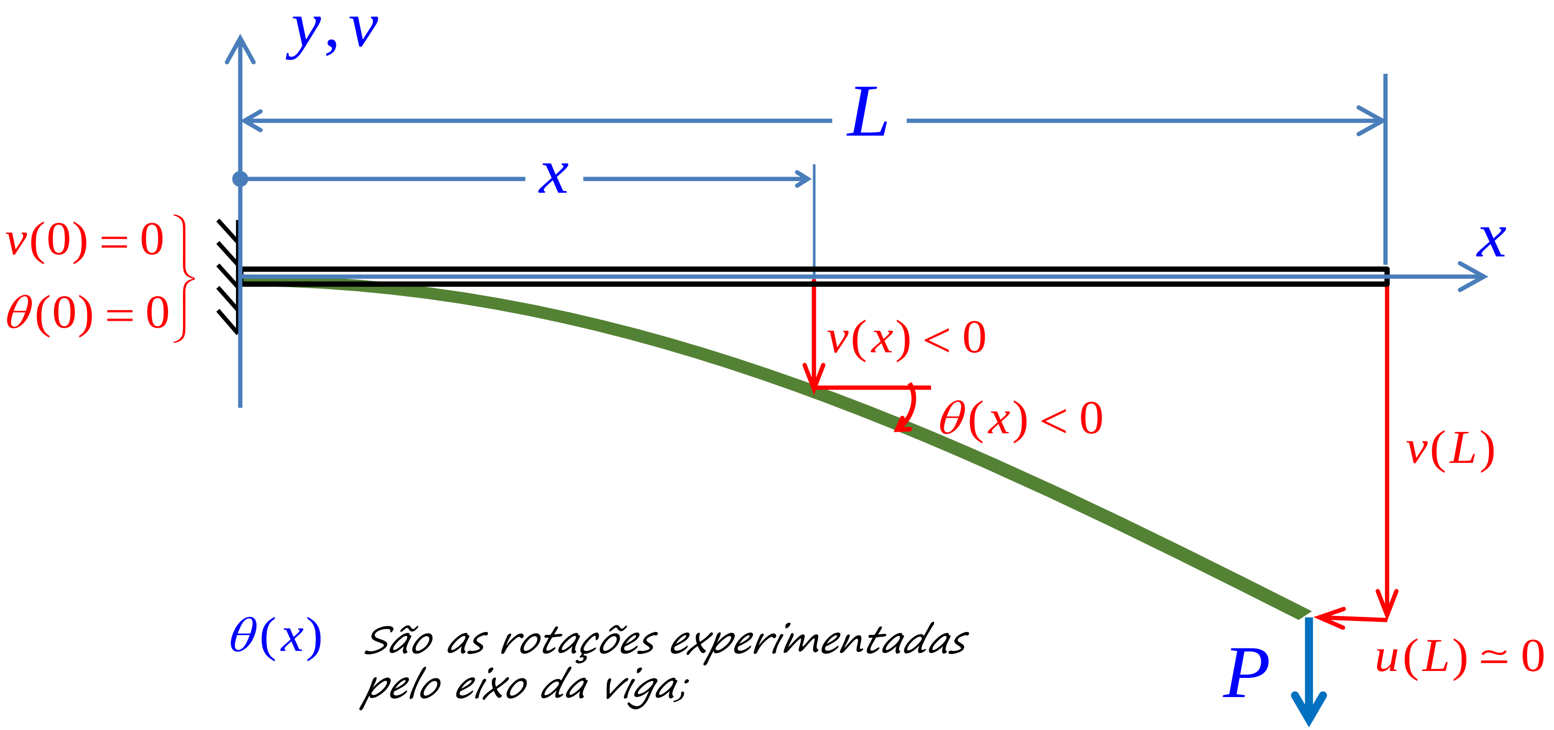


$v(x)$ Descreve os deslocamentos transversais da viga;

No sistema de coordenadas adotado, um deslocamento para baixo corresponde a $v(x) < 0$

Deformações na Flexão

Introduzimos mais alguma notação, e hipóteses cinemáticas, considerando o caso de uma viga em balanço:

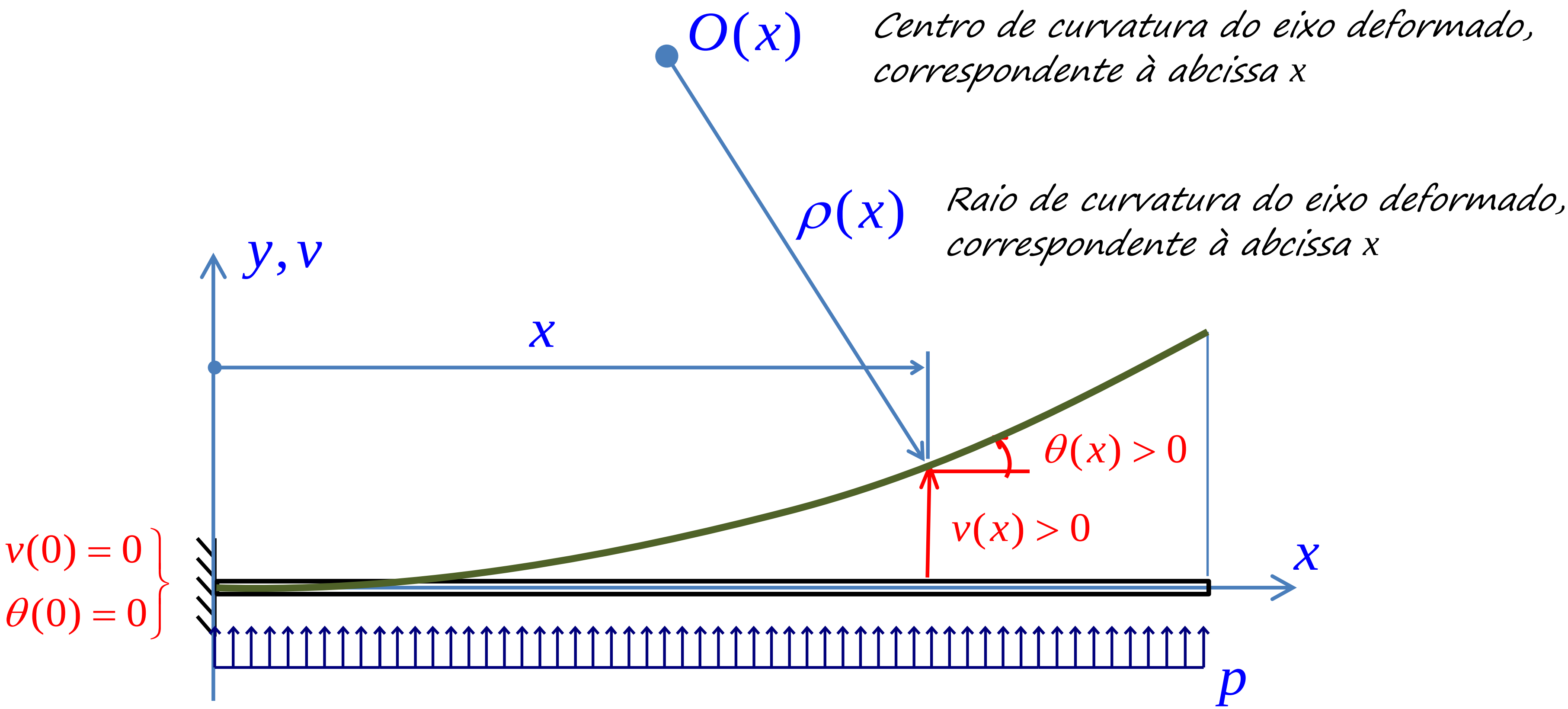


$\theta(x)$ São as rotações experimentadas pelo eixo da viga;

- Vamos desprezar os deslocamentos longitudinais $u(x)$, pois sua consideração leva a um problema não-linear, de resolução complicada;

- Essa é uma simplificação razoável para as vigas de uma edificação, mas não o seria para o caso de uma vara de pesca de fibra de vidro ou carbono, por exemplo.

Deformações na Flexão



$$\boxed{\tan\theta(x) = \frac{dv}{dx}}$$

Deformações na Flexão

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx}$$

é a derivada da função v(x) (ou seja da linha elástica da viga), em relação à abscissa x

(Assunto do cálculo diferencial, pré-requisito para as disciplinas do PEF)

Recordando, por exemplo:

$$f(x) = \sin ax \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a\cos ax$$

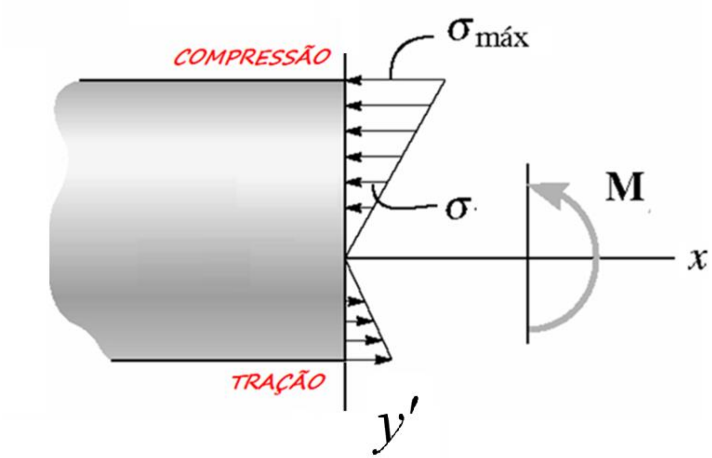
$$f(x) = ax^n + b \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = n \cdot ax^{(n-1)}$$

Nota: Recomenda-se aos alunos uma breve revisão das definições de derivadas e integrais, mas o trabalho de cálculo de nossa disciplina será reduzido ao mínimo necessário para bem definir o problema da linha elástica!

Deformações na Flexão

Em PEF2601, durante o estudo da flexão simples, chega-se à fórmula das tensões normais:

$$\boxed{\sigma(y) = \frac{M}{I} y'}$$



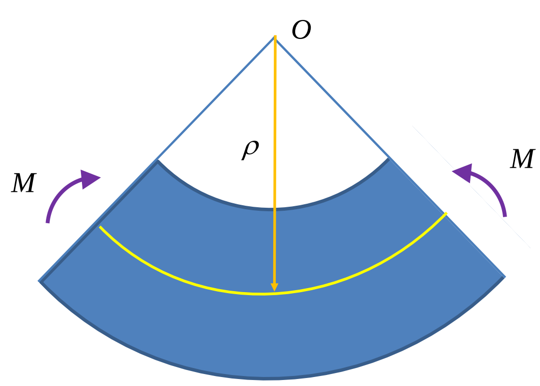
onde $\sigma(y)$ são as tensões normais devidas ao momento M

y' é a distância da fibra considerada ao baricentro da seção transversal

$I = I_{z0}$ é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo baricêntrico z_O

Durante a dedução dessa fórmula, encontra-se um resultado intermediário, relacionando a curvatura da linha elástica da viga com as grandezas acima:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \qquad (✪)$$

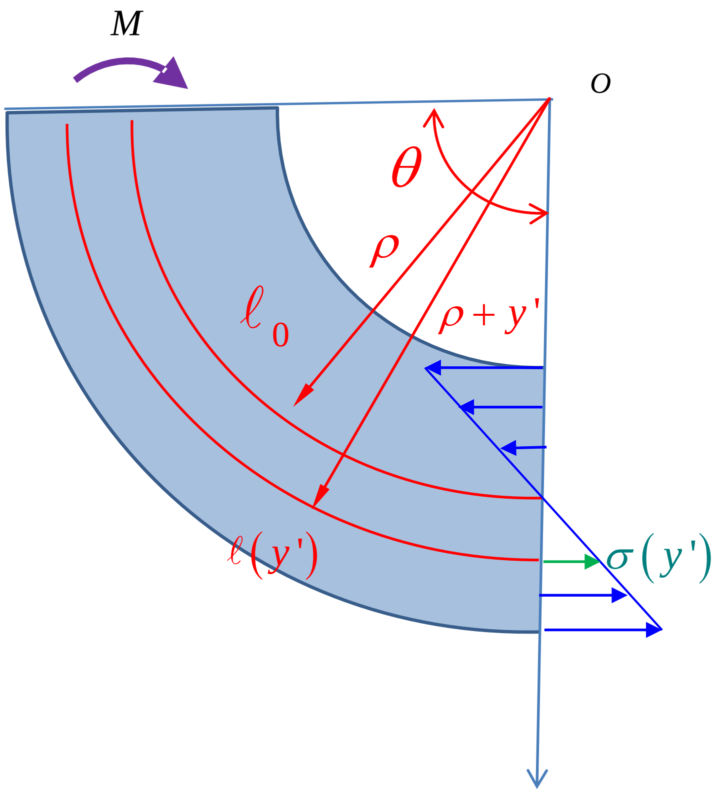


Onde κ é a curvatura da linha elástica

ρ é o raio de curvatura da linha elástica

E é o módulo de elasticidade do material

Recordando (de PEF2601):



Comprimento antes da deformação: ℓ_0

Após a deformação, os comprimentos das fibras longitudinais variam conforme distância à linha neutra (cujo comprimento permanece inalterado):

$$\ell_0 = \rho\theta \quad ; \quad \ell(y') = (\rho + y')\theta$$

Logo, resultam as deformações longitudinais:

$$\varepsilon(y') = \frac{\ell(y') - \ell_0}{\ell_0} = \frac{(\rho + y')\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y'}{\rho}$$

e as correspondentes tensões normais:

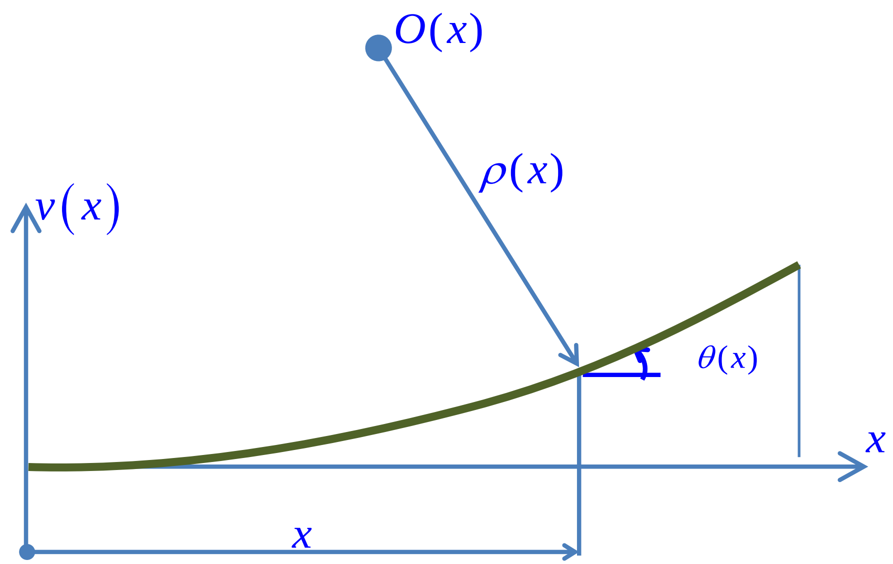
$$\sigma(y') = E\varepsilon(y') = E\frac{y'}{\rho}$$

e o momento resultante:

$$M = \int \sigma(y')y'\,dA = \int E\varepsilon(y')y'\,dA = \int E\frac{y'}{\rho}y'\,dA = M = \frac{E}{\rho}\int (y')^2 dA = \frac{E}{\rho}I_{z0}$$

Logo, $\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_{z0}}}$ *C.Q.D.*

Do estudo das curvas planas, dadas por $v = v(x)$



Sabe-se que a curvatura pode ser calculada pela expressão:

$$\kappa(x) = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left(1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Admitindo a hipótese de pequenas rotações $\theta << 1$

Tem-se ainda que $\tan\theta = \dfrac{dv}{dx} \simeq \theta << 1$

E logo $\kappa\left(x\right) \simeq \dfrac{d^2v}{dx^2}$ (✪ ✪)

Substituindo (✪ ✪) em (✪) chega-se a uma relação entre a segunda derivada da linha elástica v(x) e o momento fletor M(x)

$$\frac{d^2v}{dx^2} \simeq \frac{M}{EI}$$

Sob a hipótese de pequenas rotações, é lícito admitir a igualdade, resultando a

EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes, de integração muito simples para as funções M(x) usuais, requerendo o conhecimento de duas condições de contorno, para determinar as constantes de integração:

Para entendermos melhor essa nomenclatura, vamos considerar, por exemplo, as derivadas da função polinomial

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$$

A sua primeira derivada é dada por: $$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 4x + 3$$

E a sua segunda derivada: $$\frac{d^2 f}{dx^2} = 6x + 4$$

Suponha-se que ao invés de $f\left(x\right)$ conheçamos apenas a segunda derivada $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Como podemos fazer para conhecer a função original?

$$f = \int\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \mathbb{C}$$

Onde $\mathbb{C}$ é uma constante de integração.

Por exemplo para o monômio ax^n tem-se $\displaystyle\int\left(ax^n\right)dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + \mathbb{C}$

Aplicando esta regra para nossa função $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = 6x + 4$

$$\frac{df}{dx} = \int\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)dx = \int(6x+4)dx = \frac{6x^2}{2} + 4x + \mathbb{C}$$

$$f = \int\left(\frac{df}{dx}\right)dx = \int\left(3x^2 + 4x + \mathbb{C}\right)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

$$\boxed{f = x^3 + 2x^2 + \mathbb{C}x + \mathbb{D}}$$

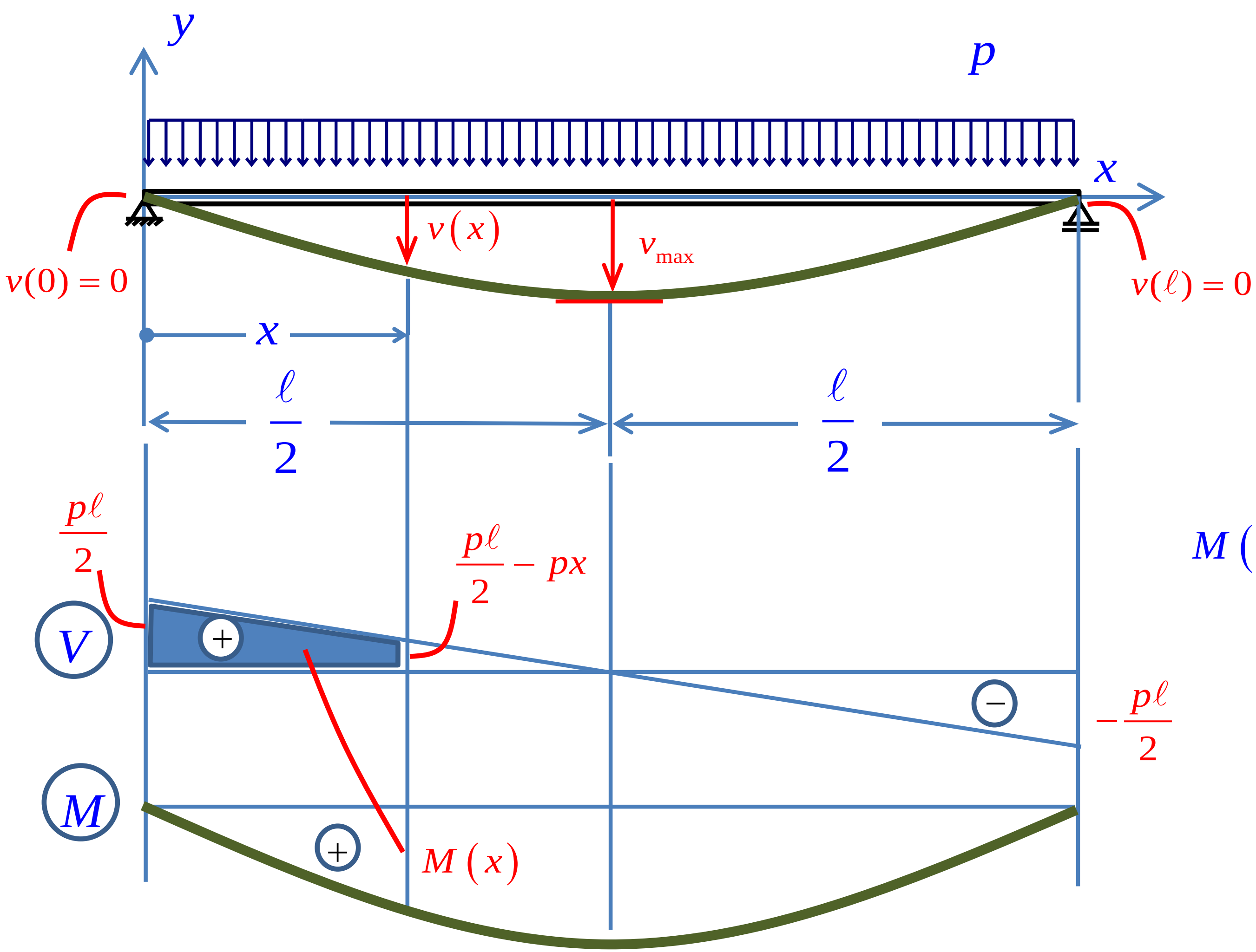
Para f(x) ser integralmente conhecida, precisa-se conhecer duas "condições de contorno", por exemplo

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 9 \end{cases}$$

Ou então

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=0} = 3 \end{cases}$$

Exemplo 1: *Determinar o máximo deslocamento da viga biapoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.*



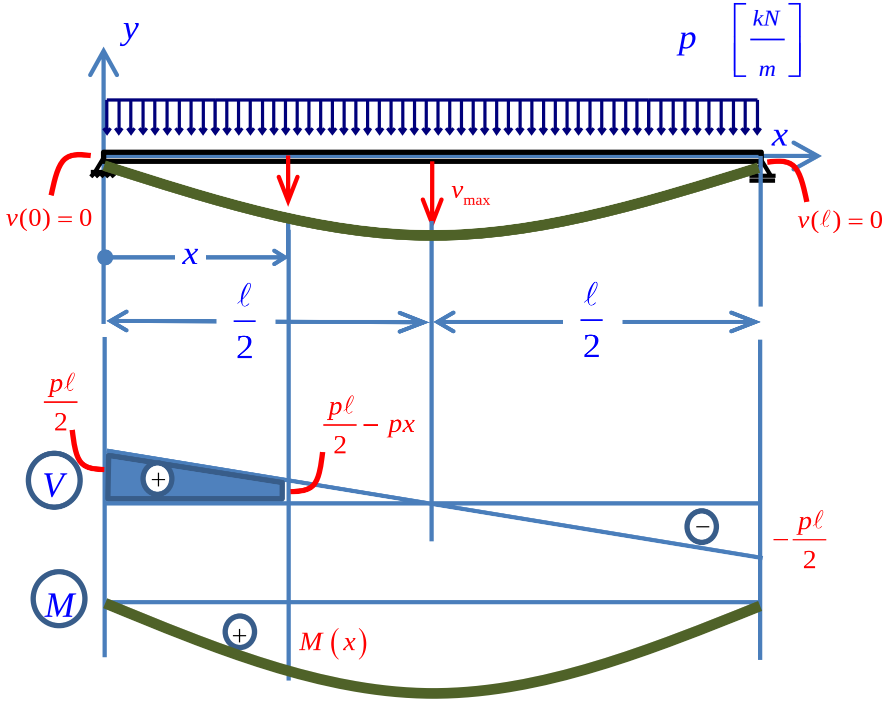
$$\begin{cases} v(0)=0 \\ v(\ell)=0 \\ v_{max}=v\left(\dfrac{\ell}{2}\right) \\ \left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}}=0 \end{cases}$$

$$M(x)=\frac{\left(\dfrac{p\ell}{2}\right)+\left(\dfrac{p\ell}{2}-px\right)}{2}\times x$$

$$\therefore$$

$$\boxed{M(x)=\frac{p\ell}{2}x-\frac{px^2}{2}}$$

Exemplo 1 (continuação):



Equação da linha elástica:

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{2}x-\frac{px^2}{2}\right)}$$

$$\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2-\frac{px^3}{6}\right)+\mathbb{C}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3-\frac{px^4}{24}\right)+\mathbb{C}x+\mathbb{D}$$

Exemplo 1 (continuação):

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3 - \frac{px^4}{24}\right) + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

Condições de contorno:
$$\begin{cases} v(0) = 0 & \therefore \quad v(0) = \mathbb{D} = 0 \\ v(\ell) = 0 & \therefore \quad v(\ell) = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{p\ell^4}{12} - \dfrac{p\ell^4}{24}\right) + \mathbb{C}\ell + \mathbb{D} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{C} = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3 - \frac{px^4}{24} - \frac{p\ell^3}{24}x\right)}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2 - \frac{px^3}{6} - \frac{p\ell^3}{24}\right)}$$

Exemplo 1 (continuação):

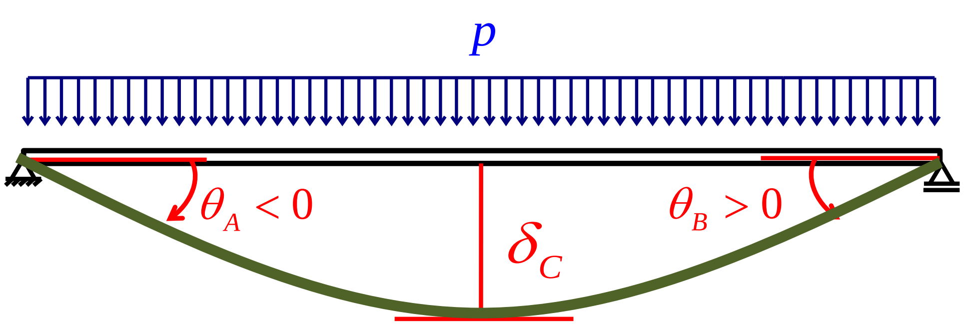
Por simetria, v(x) é máximo para x=l/2:

$$v_{\max} = v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \frac{p}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)^4 - \frac{p\ell^3}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)\right)$$

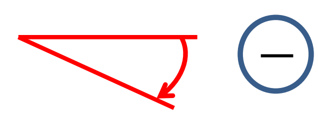
$$\boxed{v_{\max} = -\frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$

É usual expressar a flecha máxima em módulo:

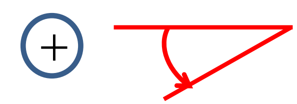
$$\boxed{\delta_C = \left|v_{\max}\right| = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$



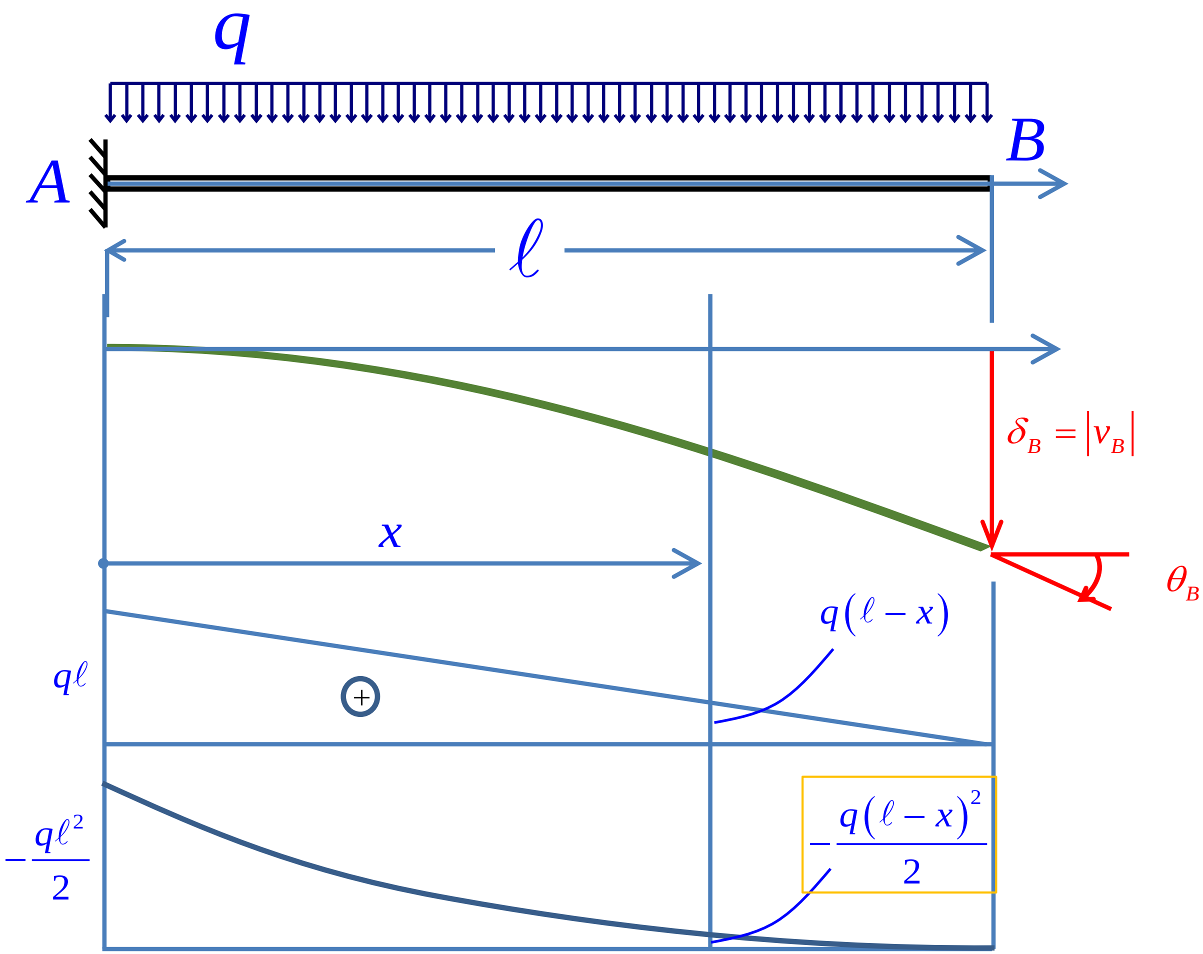
$$\boxed{\theta_A = -\frac{p\ell^3}{24EI}}$$



$$\boxed{\theta_B = +\frac{p\ell^3}{24EI}}$$



Exemplo 2: *Determinar o deslocamento e a rotação da extremidade livre da viga em balanço sujeita a uma carga uniformemente distribuída:*



$$M(x) = -\frac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \frac{qx^2}{2}$$

Exemplo 2 (continuação):

Momentos fletores: $M(x) = -\dfrac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \dfrac{qx^2}{2}$

Equação da Linha Elástica: $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{M(x)}{EI} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \dfrac{qx^2}{2}\right)$

Integrando uma vez: $\dfrac{dv}{dx} = \theta(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}x + \dfrac{q\ell x^2}{2} - \dfrac{qx^3}{6}\right) + \mathbb{C}$

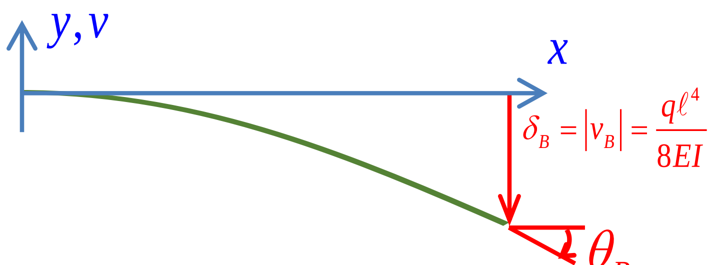
Condição de contorno $\theta(0) = \theta_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = 0$

As rotações ficam determinadas: $\dfrac{dv}{dx} = \theta(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}x + \dfrac{q\ell x^2}{2} - \dfrac{qx^3}{6}\right)$

Integrando uma segunda vez: $v(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{q\ell}{2}\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{q}{6}\dfrac{x^4}{4}\right) + \mathbb{D}$

Condição de contorno $v(0) = v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = 0$

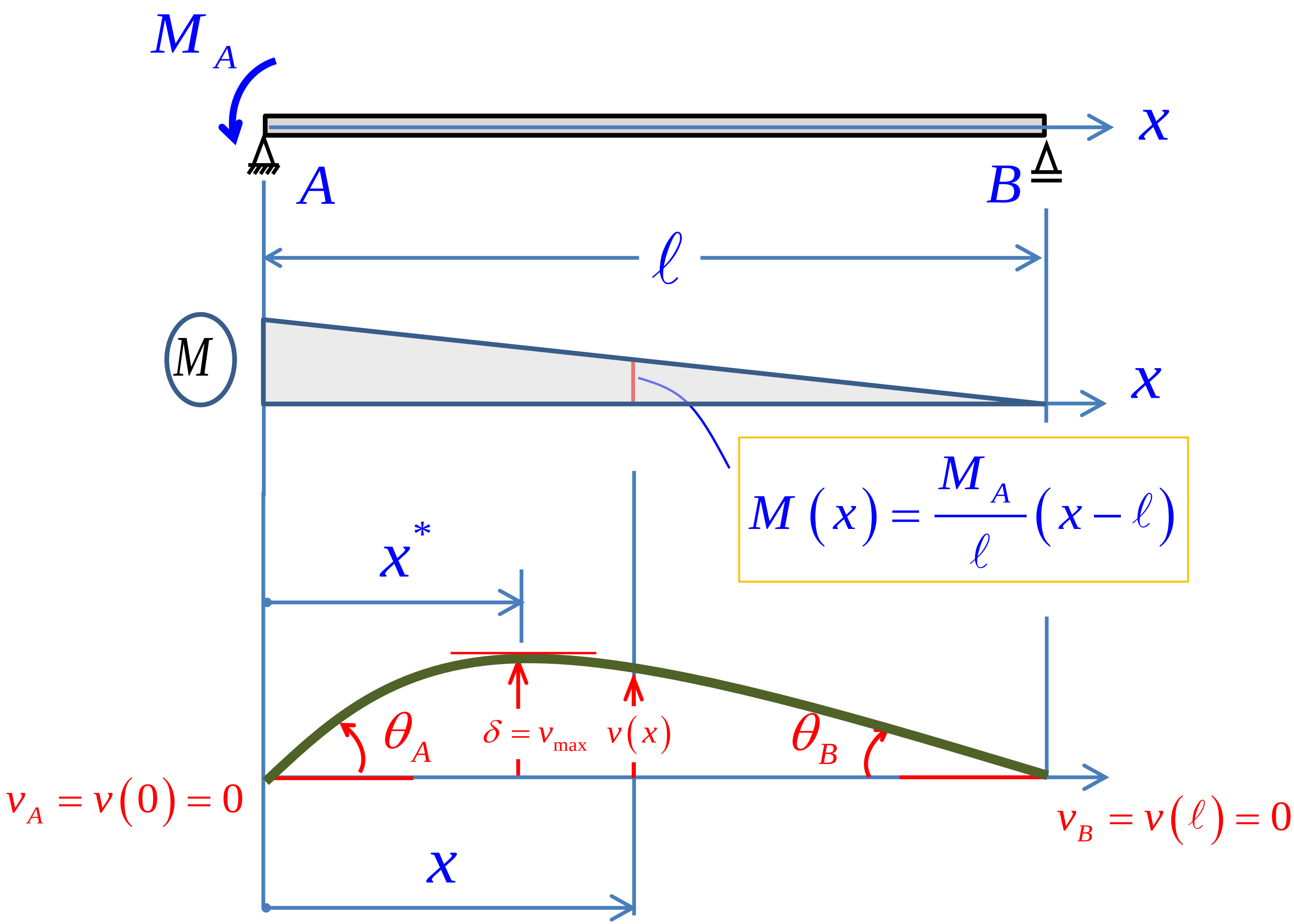
$$\boxed{v(x) = -\dfrac{qx^2}{24EI}\left(x^2 - 4\ell x + 6\ell^2\right)}$$



$$\boxed{\delta_B = |v(\ell)| = \dfrac{q\ell^4}{8EI}}$$

$$\boxed{\theta_B = |\theta(\ell)| = \dfrac{q\ell^3}{6EI}}$$

<u>Exemplo 3:</u> Determinar os deslocamentos e a rotação das extremidades da viga biapoiada esquematizada abaixo, sujeita a um momento concentrado na extremidade A:



Exemplo 3 (continuação):

Equação da Linha Elástica: $$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M_A}{EI\ell}(x-\ell)$$

Integrando uma vez: $$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{M_A}{EI\ell}\left(\frac{x^2}{2} - \ell x\right) + \mathbb{C}$$

Integrando uma segunda vez: $$v(x) = \frac{M_A}{EI\ell}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2}\right) + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

Condição de contorno: $$\begin{cases} v_A = v(0) = \mathbb{D} = 0 \\ v_B = v(\ell) = \dfrac{M_A}{EI\ell}\left(\dfrac{\ell^3}{6} - \dfrac{\ell^3}{2}\right) + \mathbb{C}\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = \dfrac{M_A\ell}{3EI} \end{cases}$$

$$\boxed{v(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^2 x\right)} \qquad \boxed{\theta(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2\right)}$$

Exemplo 3 (continuação):

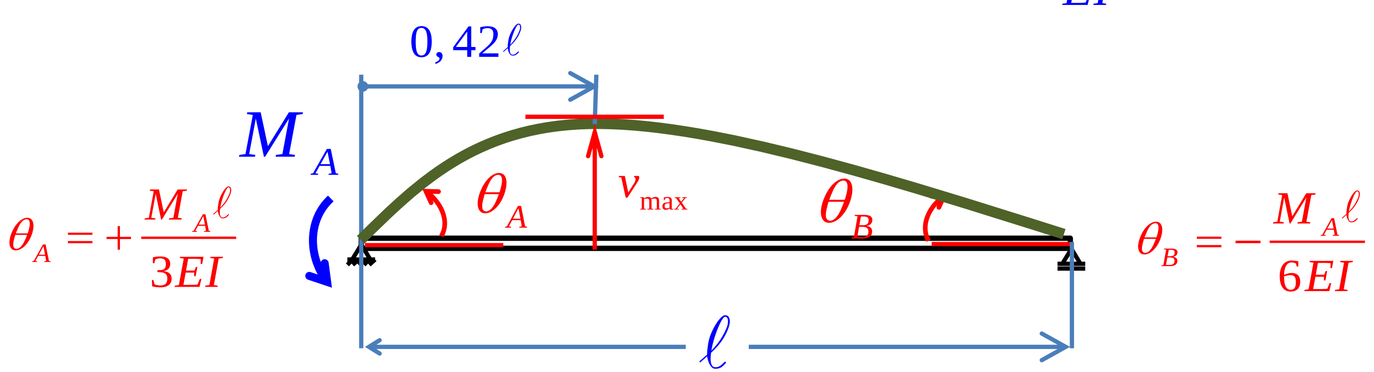
$$\boxed{\theta(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2\right)}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = +\dfrac{M_A \ell}{3EI} \\ \theta(\ell) = -\dfrac{M_A \ell}{6EI} \end{cases}$$

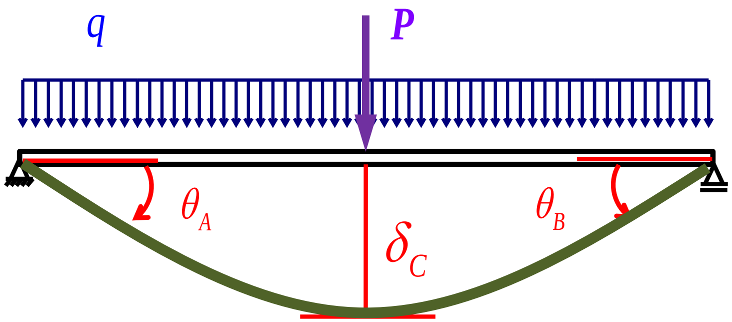
$$\theta(x^*) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(3(x^*)^2 - 6\ell x^* + 2\ell^2\right) = 0$$

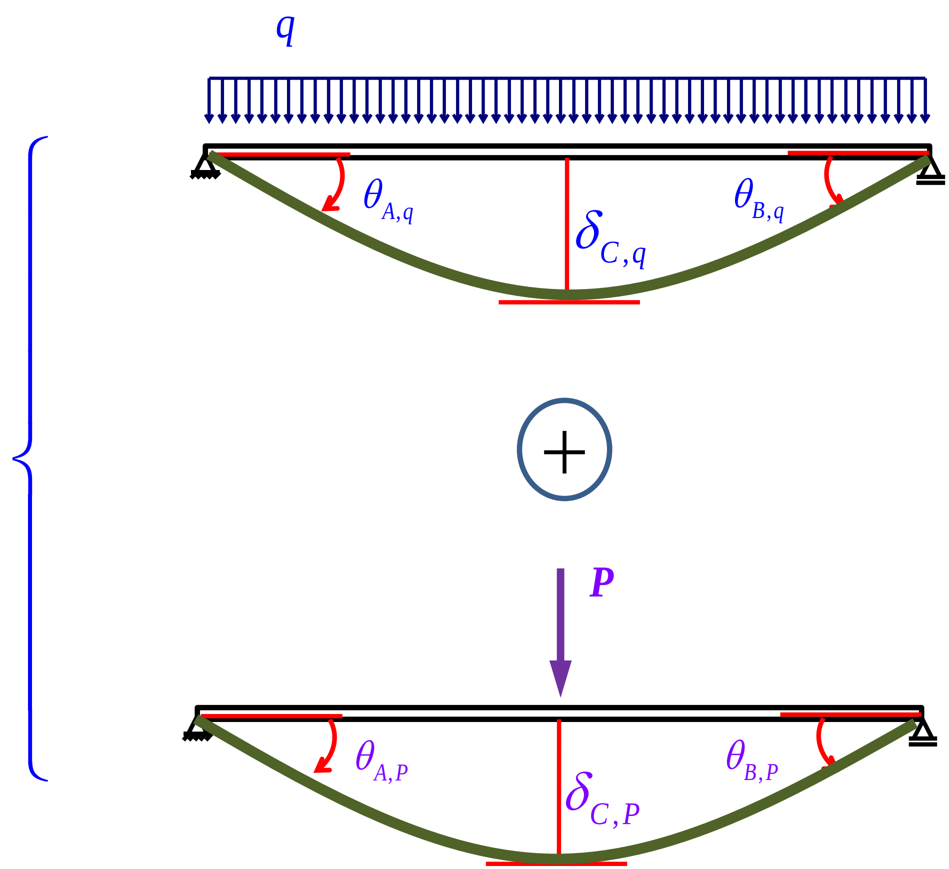
$$3(x^*)^2 - 6\ell x^* + 2\ell^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \begin{cases} 0,42\ell \\ 1,58\ell \end{cases}$$

$$v_{\max} = v(0,42\ell) = 0,064\frac{M_A \ell^2}{EI}$$



Superposição de Efeitos





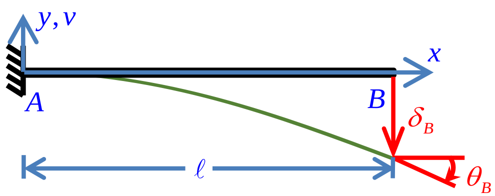
$$\delta_C = \delta_{C,q} + \delta_{C,P}$$

$$\theta_A = \theta_{A,q} + \theta_{A,P}$$

$$\theta_B = \theta_{B,q} + \theta_{B,P}$$

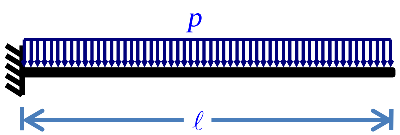
TABELAs DE DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES EM VIGAS

- *Vigas engastadas*



- Deslocamentos transversais: $v(x) = v$
- Rotações: $v'(x) = v'$
- Deslocamento transversal em B: $\delta_B = |v_B|$
- Rotação em B: $\theta_B = |v'_B|$
- EI = constante

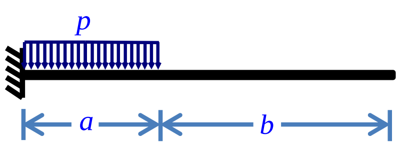
1.



$$v = -\frac{px^2}{24EI}\left(6\ell^2 - 4\ell x + x^2\right) \qquad \delta_B = \frac{p\ell^4}{8EI}$$

$$v' = -\frac{px}{6EI}\left(3\ell^2 - 3\ell x + x^2\right) \qquad \theta_B = \frac{p\ell^3}{6EI}$$

2.



$$v = -\frac{px^2}{24EI}\left(6a^2 - 4ax + x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v' = -\frac{px}{6EI}\left(3a^2 - 3ax + x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{pa^3}{24EI}(4x - a) \qquad (a \le x \le \ell)$$

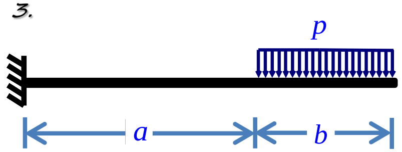
$$v' = -\frac{pa^3}{6EI} \qquad (a \le x \le \ell)$$

Em $x = a$:

$$v = -\frac{pa^4}{8EI} \qquad v' = -\frac{pa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{pa^3}{24EI}(4\ell - a) \qquad \theta_B = \frac{pa^3}{6EI}$$

3.



$$v = -\frac{pbx^2}{12EI}\left(3\ell + 3a - 2x\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v' = -\frac{pbx}{2EI}\left(\ell + a - x\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v = -\frac{p}{24EI}\left(x^4 - 4\ell x^3 + 6\ell^2 x^2 - 4a^3 x + a^4\right) \qquad \left(a \le x \le \ell\right)$$

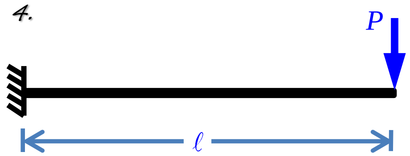
$$v' = -\frac{p}{6EI}\left(x^3 - 3\ell x^2 + 3\ell^2 x - a^3\right) \qquad \left(a \le x \le \ell\right)$$

$$\delta_B = \frac{p}{24EI}\left(3\ell^4 - 4a^3\ell + a^4\right)$$

Em $x = a$:

$$v = -\frac{pa^2 b}{12EI}\left(3\ell + a\right) \qquad v' = -\frac{pab\ell}{2EI} \qquad \theta_B = \frac{p}{6EI}\left(\ell^3 - a^3\right)$$

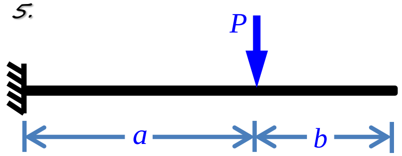
4.



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}\left(3\ell - x\right) \qquad \delta_B = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$v' = -\frac{Px}{2EI}\left(2\ell - x\right) \qquad \theta_B = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

5.



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}\left(3a - x\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v' = -\frac{Px}{2EI}\left(2a - x\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}\left(3x - a\right) \qquad \left(a \le x \le \ell\right)$$

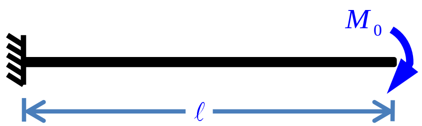
Em $x = a$:

$$v = -\frac{Pa^3}{3EI} \qquad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad \left(a \le x \le \ell\right)$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}\left(3\ell - a\right) \qquad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$

6.



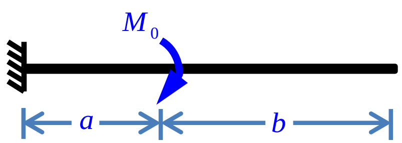
$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI}$$

$$v' = -\frac{M_0 x}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 \ell^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{M_0 \ell}{EI}$$

7.



$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 x}{EI} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{M_0 a}{2EI}(2x - a) \qquad (a \le x \le \ell)$$

$$v' = -\frac{M_0 a}{EI} \qquad (a \le x \le \ell)$$

Em $x = a$:

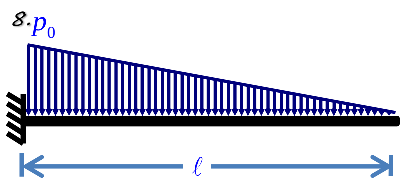
$$v = -\frac{M_0 a^2}{2EI}$$

$$v' = -\frac{M_0 a}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 a}{2EI}(2\ell - a)$$

$$\theta_B = \frac{M_0 a}{EI}$$

8.



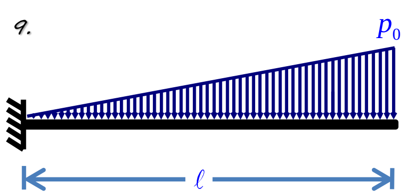
$$v = -\frac{p_0 x^2}{120 \ell EI}\left(10\ell^3 - 10\ell^2 x + 5\ell x^2 - x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p_0 x}{24 \ell EI}\left(4\ell^3 - 6\ell^2 x + 4\ell x^2 - x^3\right)$$

$$\delta_B = \frac{p_0 \ell^4}{30EI}$$

$$\theta_B = \frac{p_0 \ell^3}{24EI}$$

9.



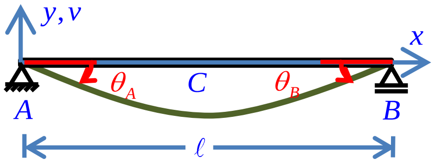
$$v = -\frac{p_0 x^2}{120 \ell EI}\left(20\ell^3 - 10\ell^2 x + x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p_0 x}{24 \ell EI}\left(8\ell^3 - 6\ell^2 x + x^3\right)$$

$$\delta_B = \frac{11 p_0 \ell^4}{120EI}$$

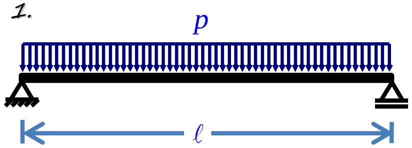
$$\theta_B = \frac{p_0 \ell^3}{8EI}$$

- ## *Vigas simplesmente apoiadas*



- *Deslocamentos transversais:* $v(x) = v$
- *Rotações:* $v'(x) = v'$
- *Distância entre A e o ponto de* $\delta_{máx}$: x_1
- *Deslocamento transversal máximo:* $\delta_{máx} = |v(x_1)|$
- *Deslocamento transversal em C (ponto médio):* $\delta_C = |v_C|$
- *Rotação em A:* $\theta_A = |v'_A|$
- *Rotação em B:* $\theta_B = |v'_B|$
- EI = *constante*

1.

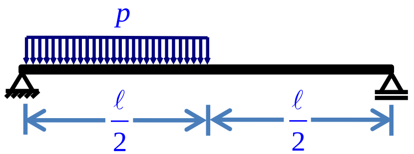


$$v = -\frac{px}{24EI}\left(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p}{24EI}\left(\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{5p\ell^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{p\ell^3}{24EI}$$

2.



$$v = -\frac{px}{384EI}\left(9\ell^3 - 24\ell x^2 + 16x^3\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v' = -\frac{p}{384EI}\left(9\ell^3 - 72\ell x^2 + 64x^3\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v = -\frac{p\ell}{384EI}\left(8x^3 - 24\ell x^2 + 17\ell^2 x - \ell^3\right) \qquad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right)$$

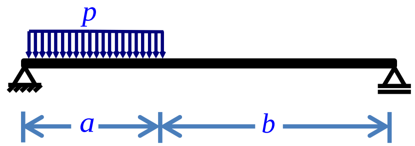
$$v' = -\frac{p\ell}{384EI}\left(24x^2 - 48\ell x + 17\ell^2\right) \qquad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right)$$

$$\delta_C = \frac{5pL^4}{768EI}$$

$$\theta_A = \frac{3p\ell^3}{128EI}$$

$$\theta_B = \frac{7p\ell^3}{384EI}$$

3.



$$v = -\frac{px}{24\ell EI}\left(a^4 - 4a^3\ell + 4a^2\ell^2 + 2a^2x^2 - 4a\ell x^2 + \ell x^3\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

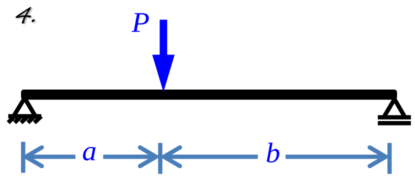
$$v' = -\frac{p}{24\ell EI}\left(a^4 - 4a^3\ell + 4a^2\ell^2 + 6a^2x^2 - 12a\ell x^2 + 4\ell x^3\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(-a^2\ell + 4\ell^2x + a^2x - 6\ell x^2 + 2x^3\right) \qquad (a \le x \le \ell)$$

$$v' = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(4\ell^2 + a^2 - 12\ell x + 6x^2\right) \qquad (a \le x \le \ell)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell - a\right)^2} \qquad \boxed{\theta_B = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell^2 - a^2\right)}$$

4.



$$v = -\frac{Pbx}{6\ell EI}\left(\ell^2 - b^2 - x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

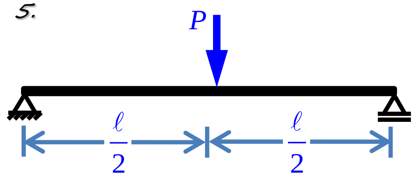
$$v' = -\frac{Pb}{6\ell EI}\left(\ell^2 - b^2 - 3x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{Pab}{6\ell EI}\left(\ell + b\right)} \qquad \boxed{\theta_B = \frac{Pab}{6\ell EI}\left(\ell + a\right)}$$

Se $a \ge b$: $\boxed{\delta_C = \dfrac{Pb(3\ell^2 - 4b^2)}{48EI}}$ Se $a \le b$: $\boxed{\delta_C = \dfrac{Pa(3\ell^2 - 4a^2)}{48EI}}$

Se $a \ge b$: $\boxed{x_1 = \sqrt{\dfrac{\ell^2 - b^2}{3}}}$ *e* $\boxed{\delta_{máx} = \dfrac{Pb(\ell^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\ell EI}}$

5.

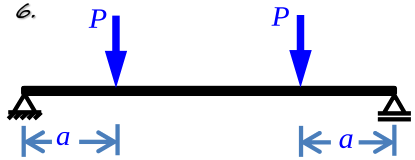


$$v = -\frac{Px}{48EI}\left(3\ell^2 - 4x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v' = -\frac{P}{16EI}\left(\ell^2 - 4x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{P\ell^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

6.



$$v = -\frac{Px}{6EI}\left(3a\ell - 3a^2 - x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v' = -\frac{P}{2EI}\left(a\ell - a^2 - x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

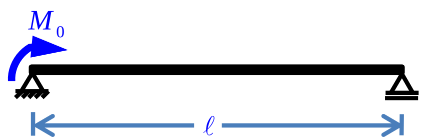
$$v = -\frac{Pa}{6EI}\left(3\ell x - 3x^2 - a^2\right) \qquad \left(a \le x \le \ell - a\right)$$

$$v' = -\frac{Pa}{2EI}\left(\ell - 2x\right) \qquad \left(a \le x \le \ell - a\right)$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{Pa}{2EI}\left(\ell - a\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{Pa}{24EI}\left(3\ell^2 - 4a^2\right)$$

7.



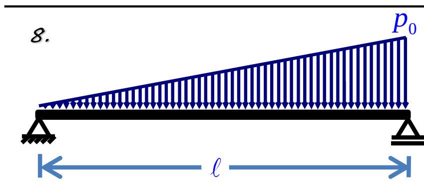
$$v = -\frac{M_0 x}{6\ell EI}\left(2\ell^2 - 3\ell x + x^2\right)$$

$$v' = -\frac{M_0}{6\ell EI}\left(2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2\right)$$

$$\delta_C = \frac{M_0\ell^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0\ell}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0\ell}{6EI}$$

$$x_1 = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad e \quad \delta_{máx} = \frac{M_0\ell^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.



$$v = -\frac{p_0 x}{360\ell EI}\left(7\ell^4 - 10\ell^2x^2 + 3x^4\right)$$

$$v' = -\frac{p_0}{360\ell EI}\left(7\ell^4 - 30\ell^2x^2 + 15x^4\right)$$

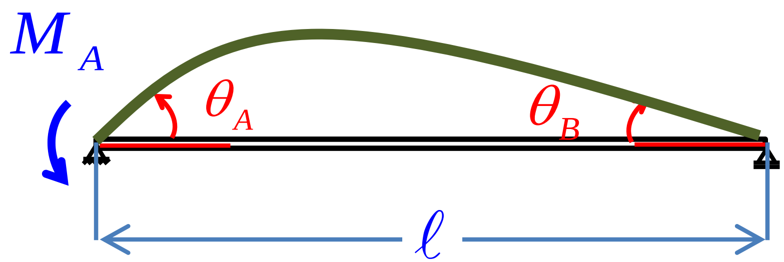
$$\delta_C = \frac{5p_0\ell^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{7p_0\ell^3}{360EI} \qquad \theta_B = \frac{p_0\ell^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0{,}5193\ell \quad e \quad \delta_{máx} = 0{,}00652\frac{p_0\ell^4}{EI}$$

TABELA DE ROTAÇÕES DE APOIO

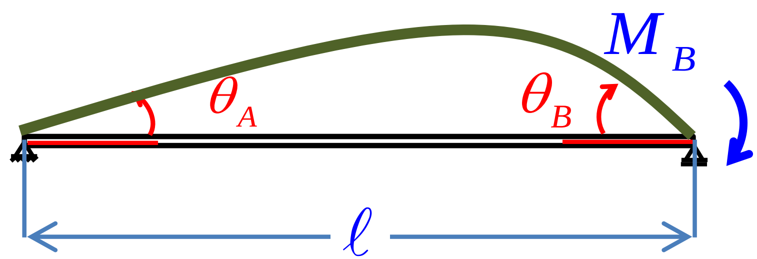
De especial interesse para o estudo de vigas contínuas (assunto da próxima aula) são as rotações de apoio em vigas biapoiadas. Os casos mais usuais são mostrados a seguir:

$$\theta_A = +\frac{M_A \ell}{3EI}$$



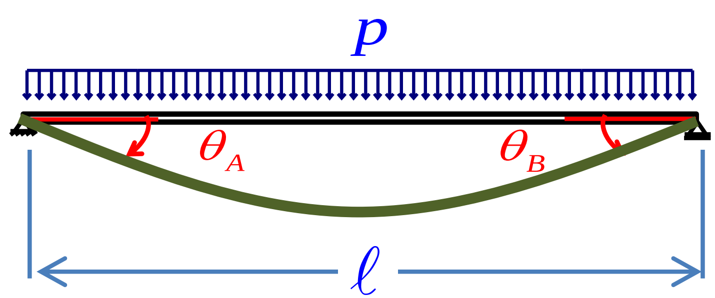
$$\theta_B = -\frac{M_A \ell}{6EI}$$

$$\theta_A = +\frac{M_B \ell}{6EI}$$



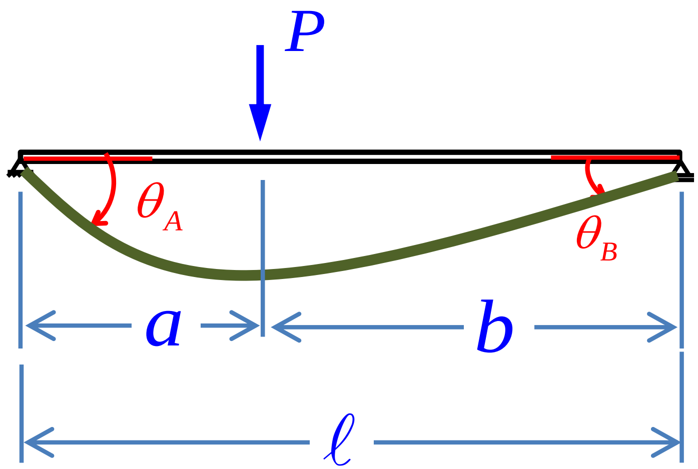
$$\theta_B = -\frac{M_B \ell}{3EI}$$

$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

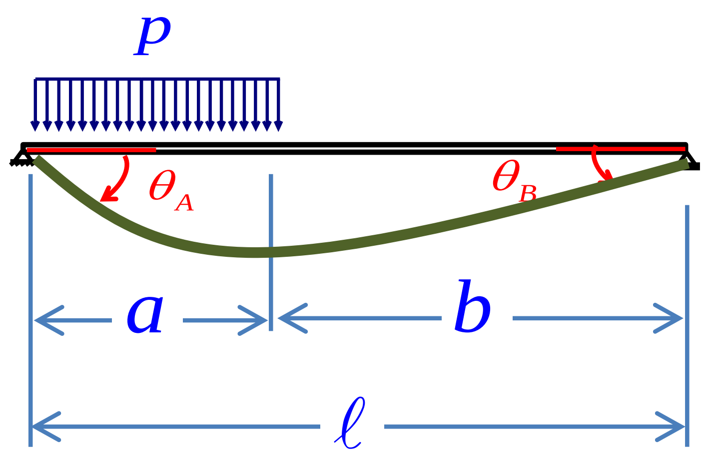


$$\theta_B = +\frac{p\ell^3}{24EI}$$

$$\theta_A = -\frac{Pb\left(\ell^2 - b^2\right)}{6\ell EI}$$



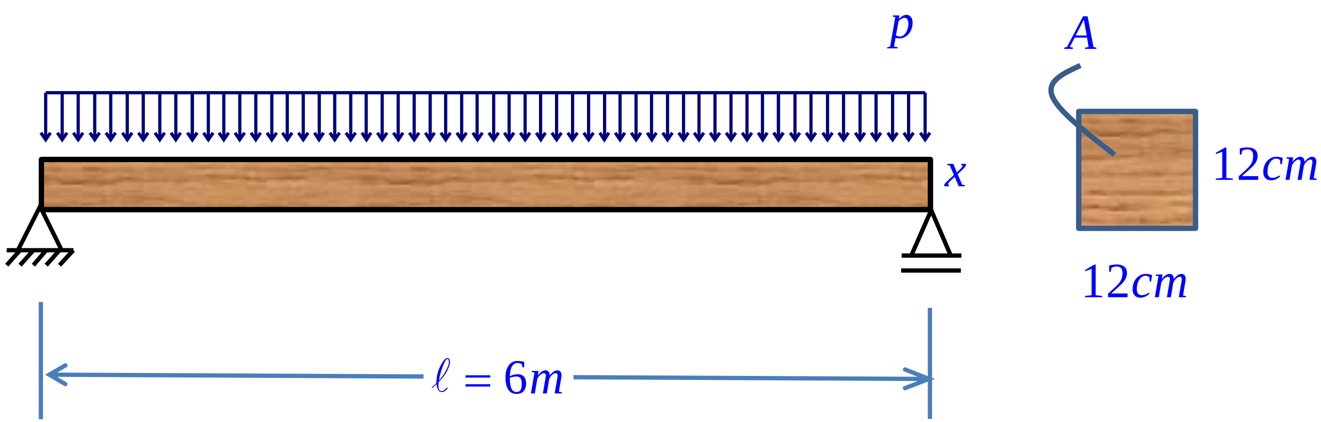
$$\theta_B = \frac{Pa\left(\ell^2 - a^2\right)}{6\ell EI}$$



$$\theta_A = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(a^2 - 4a\ell + 4\ell^2\right)$$

$$\theta_B = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell^2 - a^2\right)$$

Exemplo 4: Determinar a flecha devida ao peso próprio e verificar o limite de utilização $\delta \le \dfrac{\ell}{300}$



Madeira (valores típicos): $E = 10GPa; \quad \rho = 10kN/m^3$

$$p = \rho A = 10\frac{kN}{m^3} \times \left(0{,}12m \times 0{,}12m\right) = 0{,}144\frac{kN}{m}$$

$$E = 10GPa = 10 \times 10^9 \frac{N}{m^2} = 10 \times 10^6 \frac{kN}{m^2} = 10^7 \frac{kN}{m^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{0{,}12^4}{12} = 1{,}728 \times 10^{-5} m^4$$

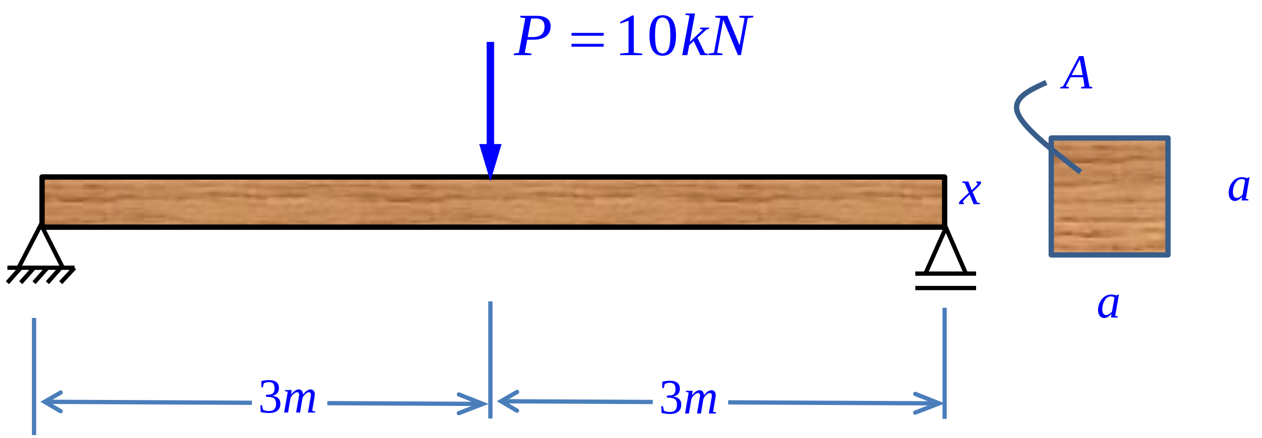
$$\delta = v_{\max} = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}$$

$$\delta = \frac{5}{384} \times \frac{0{,}144 \times 6^4}{10^7 \times 1{,}728 \times 10^{-5}}$$

$$\delta = 1{,}41 \times 10^{-2} m = 1{,}41cm$$

$$\delta_{\lim} = \frac{6}{300} = 2 \times 10^{-2} m > \delta \quad , OK!$$

Exemplo 5 – Dimensionar a seção transversal da viga de madeira (E=10GPa), para atender ao limite $\delta \leq \ell / 300$



$$\delta = \frac{P\ell^3}{48EI} = \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7 \times \left(\frac{a^4}{12}\right)} \leq \frac{6}{300}$$

$$a^4 \geq 12 \times \frac{300}{6} \times \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7} = 2,7 \times 10^{-3} m^4$$

$$a \geq \sqrt[4]{2,7 \times 10^{-3}} = 0,228m \qquad \boxed{a \geq 23cm}$$