



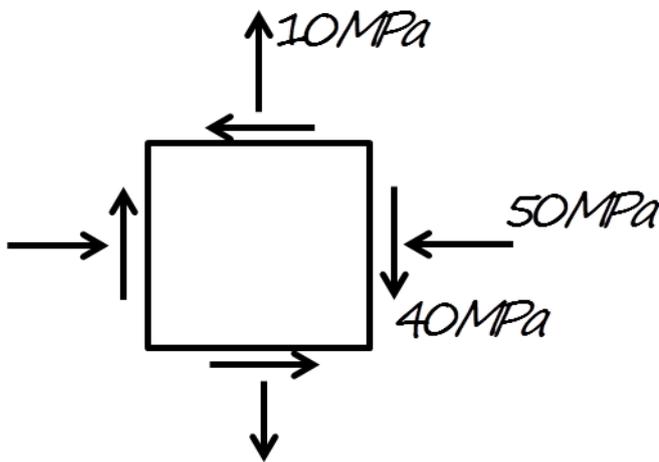
Nome :

N° USP:

Assinatura:

**Exercício 2:** Para um ponto na superfície de um sólido ilustrado abaixo sob estado duplo de tensões, calcule:

- Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de  $45^\circ$
- Tensões principais
- Tensões de cisalhamento máximas
- Construa o círculo de Mohr e verifique os valores obtidos analiticamente nos itens anteriores
- Esquematizar as tensões em elementos infinitesimais orientados a  $45^\circ$  e nos ângulos das tensões principais.



**Resolução:**

$$\begin{cases} \sigma_x = -50 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 10 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 40 \text{ MPa} \end{cases}$$

**a) Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de  $45^\circ$**

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Para  $\theta = 45^\circ$ :

$$\sigma_{45} = \frac{(-50 + 10)}{2} + \left(\frac{-50 - 10}{2}\right) \cdot \cos 90^\circ + 40 \sin 90^\circ = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{45} = -\left(\frac{-50 - 10}{2}\right) \cdot \sin 90^\circ + 40 \cos 90^\circ = 30 \text{ MPa}$$



A outra componente é obtida para  $\theta^* = \theta + 90^\circ = 135^\circ$ :

$$\sigma_{135} = \frac{(-50 + 10)}{2} + \left(\frac{-50 - 10}{2}\right) \cdot \cos 270^\circ + 40 \operatorname{sen} 270^\circ = -60 \text{ MPa}$$

### b) Tensões principais

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{(-50 + 10)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50 - 10}{2}\right)^2 + 40^2} = -20 \pm 50$$

$$\sigma_1 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -70 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{-50 - 10} = -1,333$$

$$2\theta_{p1} = -53,13^\circ \rightarrow \theta_{p1} = -26,57^\circ$$

$$2\theta_{p2} = 126,87^\circ \rightarrow \theta_{p2} = 63,43^\circ$$

### c) Tensões de cisalhamento máximas

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50 - 10}{2}\right)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min} = -\tau_{max} = -50 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{(-50 - 10)}{2 \cdot 40} = 0,75$$

$$2\theta_{s1} = 36,87^\circ \rightarrow \theta_{s1} = 18,43^\circ$$

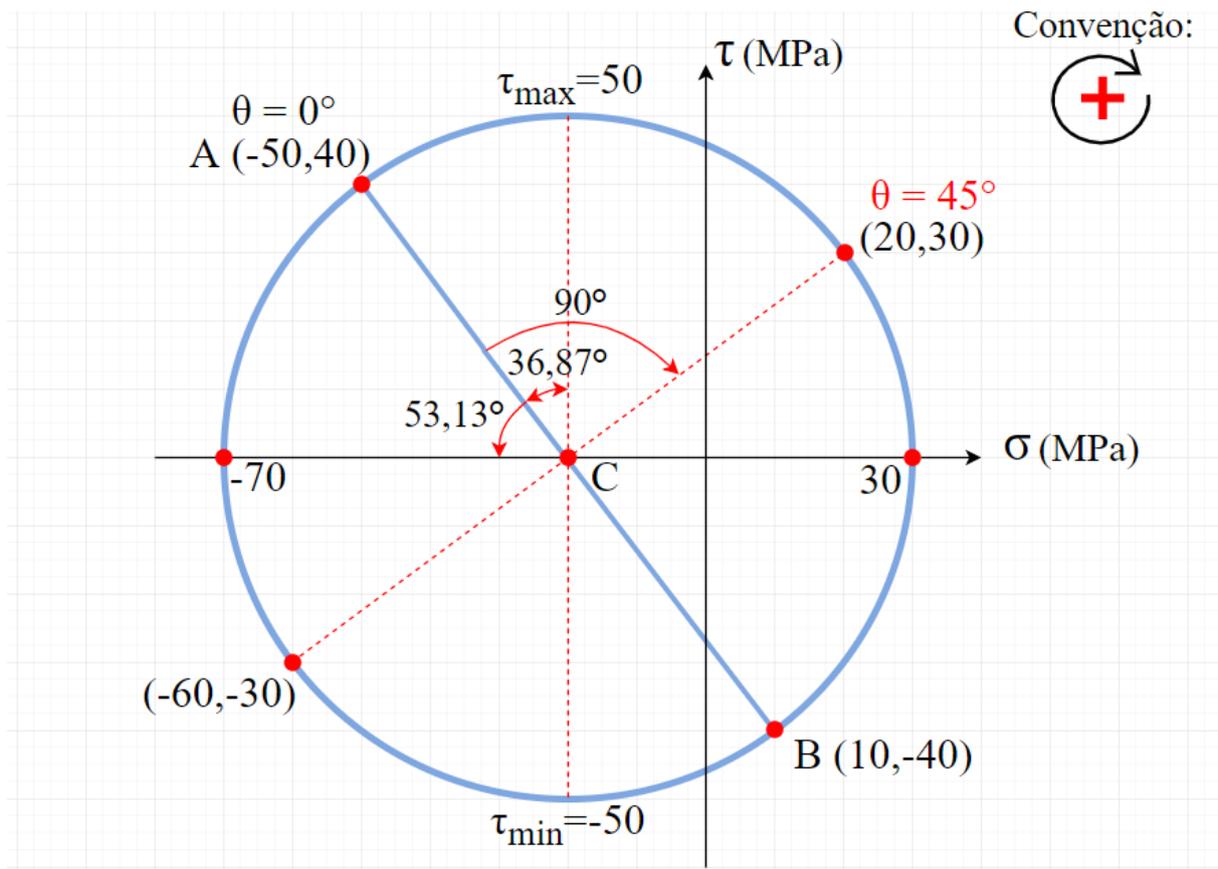
$$2\theta_{s2} = 216,87^\circ \rightarrow \theta_{s2} = 108,43^\circ$$

### d) Construa o círculo de Mohr e verifique os valores obtidos analiticamente nos itens anteriores

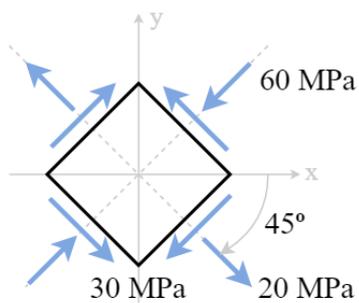
$$C = (\sigma_0, 0) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (-20, 0)$$

$$A = (-50, 40)$$

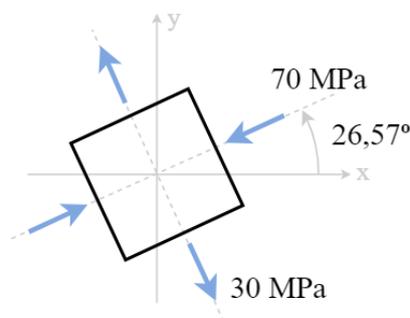
$$B = (10, -40)$$



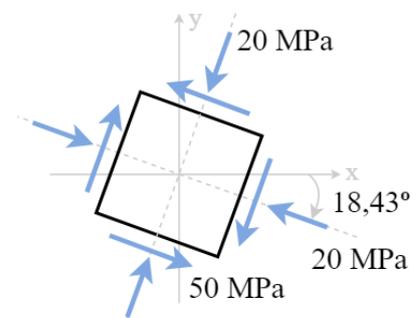
e) Esquematizar as tensões em elementos infinitesimais orientados a  $45^\circ$  e nos ângulos das tensões principais.



Elemento orientado a  $45^\circ$



Tensões Principais



Tensões Máximas de Cisalhamento