**Lista 3 de exercícios de Economia da Informação**

1. Considere a seguinte função de utilidade CES (Constant Elasticity) $u(x_1, x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho}$ com 0≠ρ<1. Maximize a utilidade deste consumidor sujeita a sua restrição orçamentária *y*. (Jehle e Reny, 2000 capítulo 1)

2. Suponha que um consumidor apresente preferências Cobb-Douglas. Se os preços são p1 e p2 e a renda R, encontre a função demanda para estes bens. $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$

3. Uma função é homogênea de grau r se $f(jx_1, \ldots, jx_n) = j^r \times f(x_1, \ldots, x_n)$. Em aplicações de economia j>0. (Chiang e Wainwright, 2005, capítulo 12).
Verifique qual o grau de homogeneidade nas seguintes funções:
a) $f(x, y, w) = \frac{x}{y} + \frac{2w}{3x}$
b) $g(x, y, w) = \frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x}$
c) $g(x, y, w) = 2y^2 + 3yw - w^2$
d) Função de Produção Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, sendo A uma constante, Q a quantidade produzida do bem, K a quantidade de estoque de capital físico e L a quantidade de mão de obra.
e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
f) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^{1/2}$

4. Seja a seguinte função Utilidade Cobb-Douglas: $u(x1,x2) = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ . Faça uma transformação monotônica logarítmica e calcule as funções demandas marshallianas associadas:

5. Otimize a função gasto e obtenha a função demanda hicksiana de preferências Cobb-Douglas e CES

a) Cobb-Douglas

$$\min_{x_1, x_2} \; p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$\text{s.t. } U = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

b) CES

$$\min_{x_1, x_2} \; p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$\text{s.t. } U = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{1/\rho}$$

6. Dados U(x,y) = xy, $p_x$ = \$1, $p_y$ = \$4 e m = \$200
Resolva: Max U(x,y)
s.a. $p_x x + p_y y = m$

7. Considere as seguintes funções utilidade e responda se poderiam representar a estrutura de preferências do mesmo indivíduo? Por que?

$U(x_1, x_2) = x_1x_2$
$U(x_1, x_2) = 10\, x_1x_2$
$U(x_1, x_2) = (x_1x_2)^3$

8. Derive a função demanda para o bem 1 e o bem 2, a partir das seguintes funções utilidade e restrição orçamentária:

$$\mathbf{U(x_1,x_2) = 100x_1^2x_2^3}$$
$$\mathbf{p_1x_1 + p_2x_2 = M}$$

a) Calcule a quantidade demandada de $x_1$ para $p_1$=\$30 e $p_2$ = \$20 e M = \$50.000.

8'. Derive a função demanda para o bem 1 e o bem 2, a partir das seguintes funções utilidade e restrição orçamentária:

$$\mathbf{U(x_1,x_2) = 100x_1^2x_2^2}$$
$$\mathbf{p_1x_1 + p_2x_2 = M}$$

a) Calcule a quantidade demandada de $x_1$ para $p_1$=\$30 e $p_2$ = \$20 e M = \$50.000.

b) Supondo que $p_1$ se reduza para \$20, quais as variações nas quantidades demandadas de cada um dos bens?

c) Repita o item (a) supondo uma redução de renda para \$40.000.

d) O que você pode afirmar sobre a elasticidade-preço e renda do bem 1 e a elasticidade-cruzada. Voce diria que o bem 1 e 2 são complementares?

9. Ester recebe uma renda mensal de R\$ 200, como estagiária, e utiliza sua renda para a compra de dois bens: carne de frango e carne bovina. Suponha que o preço da carne de frango é R\$2,00/kg e da carne bovina R\$4,00/kg. e que a função utilidade é dada por U (F, B) = B + 2F. (a) Qual a combinação ótima dos produtos? (b) E se o preço do frango aumentar para R\$3,00/kg? O que você poderia afirmar sobre a relação entre esses dois produtos?

10. Suponha que a função utilidade seja dada por $U(x_1,x_2) = x_1^b\, x_2^d$ .(a) Calcule a função demanda de $x_1$ e $x_2$. (b) Calcule a curva de demanda para a função utilidade dada por $U(x_1,x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$. (c) O que voce tem a dizer sobre as curvas de demanda e as funções utilidade?

11. Seja um indivíduo com uma função de utilidade U (X,Y) = X1/2 Y1/2, onde X e Y são as quantidades dos bens relevantes para suas decisões de consumo. Admita que o indivíduo dispõe de R$ 200 e que os preços relevantes são px = 10 e py = 20. Sob tais condições determine a cesta que o indivíduo consumirá. Admita, em seguida, que o governo impõe um racionamento do bem x, de tal forma que a quantidade máxima disponível para consumo por indivíduo seja 5 e que o consumidor continue gastando a totalidade de sua dotação orçamentária. Determine a nova cesta de consumo do indivíduo dizendo se houve melhora em seu bem estar.

12. Como o sistema de preços aloca recursos escassos numa economia capitalista? Explique por que as cidades fantasmas da China pode ser o resultado da maneira como os recursos foram alocados no sistema comunista centralizado de produção.

**Respostas**

1. $u(x_1 x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{1/\rho}$, $0 \neq \rho < 1$

$$\max_{x_1 x_2}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{1/\rho} \text{ s.t. } p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

$$£(x_1, x_2, \lambda) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{1/\rho} + \lambda(y - p_1x_1 - p_2x_2),$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{(1/\rho)-1}\rho x_1^{\rho-1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{(1/\rho)-1}\rho x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1}}{p_1} = \lambda \quad (1')$$

$$\frac{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1}}{p_2} = \lambda \quad (2')$$

Igualando (1') e (2'): $\frac{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_1^{\rho-1}}{p_1} = \frac{(x_1^\rho + x_2^\rho)^{(1/\rho)-1} x_2^{\rho-1}}{p_2} \rightarrow \frac{x_1^{\rho-1}}{p_1} = \frac{x_2^{\rho-1}}{p_2} \rightarrow$

$x_1^{\rho-1} = \frac{x_2^{\rho-1}p_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2(\frac{p_1}{p_2})^{1/(\rho-1)}$ (4)

Substituindo (4) em (3)

$$y - p_1x_2(\frac{p_1}{p_2})^{1/(\rho-1)} - p_2x_2 = 0 \rightarrow p_1x_2(\frac{p_1}{p_2})^{1/(\rho-1)} + p_2x_2 = y$$

$$x_2(p_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} + p_2) = y \rightarrow x_2(p_1^{\left(\frac{\rho-1}{\rho-1}\right)}\left(\frac{p_1^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{p_2^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}\right) + p_2) = y$$

$$\rightarrow x_2\left(\frac{p_1^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}}{p_2^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}} + p_2\right) = y \rightarrow x_2\left(\frac{p_1^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + p_2^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}.p_2^{\left(\frac{\rho-1}{\rho-1}\right)}}{p_2^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}\right) = y$$

$$\boldsymbol{x_2^*} = \frac{\boldsymbol{y p_2}^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{\boldsymbol{p_1}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + \boldsymbol{p_2}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}}$$ (5) Substituindo em (4)

$$x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \rightarrow x_1 = \frac{y p_2^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{p_1^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + p_2^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \rightarrow \boldsymbol{x_1^*} = \frac{\boldsymbol{y p_1}^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{\boldsymbol{p_1}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + \boldsymbol{p_2}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}}$$

Ou seja, as demandas Marshallianas são:

$$\boldsymbol{x_2^*} = \frac{\boldsymbol{y p_2}^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{\boldsymbol{p_1}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + \boldsymbol{p_2}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_1^*} = \frac{\boldsymbol{y p_1}^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)}}{\boldsymbol{p_1}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)} + \boldsymbol{p_2}^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}}$$

De agora em diante, vamos definir um novo parâmetro r = ρ/(ρ-1), de modo a expressar a demanda de forma mais enxuta:

$$x_1(\boldsymbol{p}, y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \quad \text{e} \quad x_2(\boldsymbol{p}, y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \quad r = \rho/(\rho - 1)$$

Note que $\left(\frac{1}{\rho-1}\right) - 1 = r$ , pois $\left(\frac{1}{\rho-1}\right) - 1 = \frac{1-(\rho-1)}{\rho-1} = \left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)$

2. $\max_{x_1, x_2} L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^a x_2^b - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad a.x_1^{a-1} x_2^b - \lambda p_1 = 0$ (1)

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad d.x_1^a x_2^{b-1} - \lambda p_2 = 0$ (2)

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 - R = 0$ (3)

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (1) $\lambda = \frac{a.x_1^{a-1} x_2^b}{p_1}$ (4)

De (2) $\lambda = \frac{b.x_1^a x_2^{b-1}}{p_2}$ (5)

Igualando: $\frac{a.x_1^{a-1} x_2^b}{p_1} = \frac{b.x_1^a x_2^{b-1}}{p_2} \rightarrow : \frac{a.x_2}{p_1} = \frac{b.x_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2 \frac{a.p_2}{b.p_1}$, (6) substituindo em (3)

$p_1 \left(x_2 \frac{a.p_2}{b.p_1}\right) + p_2 x_2 = R \quad \rightarrow \quad (1 + \frac{a}{b}) p_2 x_2 = R;$

$x_2^* = \frac{bR}{(a+b)p_2} \quad ; \quad x_1^* = \frac{aR}{(a+b)p_1}$ (Note que estas são as demandas resultantes de quaisquer funções utilidades do tipo Cobb-Douglas, e podem ser usadas diretamente para calcular as demandas Marshallianas resultantes de maximização de utilidades sujeitas a restrições orçamentárias de acordo com os parâmetros *a* e *b* neste caso)

3. a) $f(x,y,w) = \frac{x}{y} + \frac{2w}{3x}$

Resp. $f(jx,jy,jw) = \frac{jx}{jy} + \frac{2jw}{3jx} \rightarrow f(jx,jy,jw) = j^0\left(\frac{x}{y} + \frac{2w}{3x}\right)$

Homogênea de grau zero.

b) $g(x,y,w) = \frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x} \rightarrow g(jx,jy,jw) = \frac{(jx)^2}{jy} + \frac{2(jw)^2}{jx} \rightarrow$

$g(jx,jy,jw) = j^1\left(\frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x}\right)$

Homogênea de grau um.

c) $g(x,y,w) = 2y^2 + 3yw - w^2 \rightarrow g(jx,jy,jw) = 2(jy)^2 + 3jyjw - (jw)^2 \rightarrow$

$g(jx,jy,jw) = j^2(2y^2 + 3yw - w^2)$

Homogênea de grau dois.

d) Função de Produção Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, sendo A uma constante, Q a quantidade produzida do bem, K a quantidade de estoque de capital físico e L a quantidade de mão de obra.

$Q = A(jK)^{\alpha}(jL)^{\beta} \rightarrow Q = (j)^{\alpha+\beta}.AK^{\alpha}L^{\beta}$

Homogênea de grau $\alpha+\beta$.

e) $f(x,y) = \sqrt{xy} \rightarrow f(jx,jy) = \sqrt{jxjy} \rightarrow f(jx,jy) = j\sqrt{xy}$

Homogênea de grau um.

f) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^{1/2} \rightarrow f(jx,jy) = ((jx)^2 - (jy)^2)^{1/2} \rightarrow$

$f(jx,jy) = (j^2(x^2 - y^2))^{1/2} \rightarrow f(jx,jy) = j^1(x^2 - y^2)^{1/2}$

Homogênea de grau um.

a) 0; b)1; c)2; d)$\alpha+\beta$; e)1; f)1

4. $u(x1,x2) = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ .

max $\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$

$x_1, x_2$ s.t. $p_1x_1 + p_2x_2 \le y$

Resp. $\max_{x_1,x_2} L(x_1,x_2,\lambda) = k\alpha \ln x_1 + k(\alpha-1)\ln x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad \alpha.\frac{k}{x_1} - \lambda p_1 = 0$ (1)

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad (\alpha-1).\frac{k}{x_2} - \lambda p_2 = 0$ (2)

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0$ (3)

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (2) $\lambda = \frac{d}{p_2x_2}$ e (1) $\lambda = \frac{c}{p_1x_1}$ (5)

Igualando: $\frac{k(1-\alpha)}{p_2x_2} = \frac{k\alpha}{p_1x_1} \rightarrow : \frac{\alpha.x_2}{p_1} = \frac{(1-\alpha).x_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2\frac{\alpha.p_2}{(\alpha-1).p_1}$, (6) substituindo

em (3)

$p_1\left(x_2\frac{\alpha.p_2}{(\alpha-1).p_1}\right) + p_2x_2 = y \rightarrow (\frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\alpha-1})p_2x_2 = y; \rightarrow (\frac{1}{\alpha-1})p_2x_2 = y$

$$x_2^* = \frac{(\alpha-1)y}{p_2} \quad ; \quad x_1^* = \frac{\alpha y}{p_1}$$

Como u( ) é crescente, a restrição é atendida como igualdade. Como ln 0 = - ∞, a solução é interior. Como é estritamente quase-côncava, a solução é um máximo do problema: Max £ = $\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2 + \lambda(y - p_1 x_1 + p_2 x_2)$

Note que gasta-se proporções fixas da renda na aquisição de cada bem.
- Verifique as propriedades acima, em especial note que as funções demanda são homogêneas de grau zero.

5. a) Cobb-Douglas

$$\min_{x_1,x_2} \; p_1\, x_1 + \, p_2\, x_2$$

$$\text{s.t. } U = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

$$\min_{x_1,x_2} L(x_1,x_2,\lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda\left(kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} - U\right)$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \;\; p_1 - \lambda\alpha k x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \;\; p_2 - \lambda(1-\alpha)kx_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \;\; kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} - U = 0 \qquad (3)$$

| Condições de Primeira Ordem (CPO) |
|---|

De (1) $\lambda = \frac{p_1}{\alpha k x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}$ e (2) $\lambda = \frac{p_2}{(1-\alpha)kx_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}}$ (5)

Igualando: $\frac{p_1}{\alpha k x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}} = \frac{p_2}{(1-\alpha)kx_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}} \rightarrow \frac{p_1}{\alpha x_1^{-1}x_2^{1}} = \frac{p_2}{(1-\alpha)} \rightarrow x_1 = x_2\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}$, (6)
substituindo em (3)

$$k\left(x_2\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}\right)^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - U = 0 \rightarrow k\left(\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}\right)^{\alpha} x_2^{1} - U = 0 \;\; \square \;\; x_2^* = \frac{U}{k\left(\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}\right)^{\alpha}}$$

Ou

$$h_2^*(\boldsymbol{p},u) = {p_1}^{\alpha}{p_2}^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} k^{-1}U$$

De (6) $x_1 = \frac{U}{k\left(\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}\right)^{\alpha}}\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1} \rightarrow x_1^* = Uk^{-1}\left(\frac{\alpha.p_2}{(1-\alpha).p_1}\right)^{1-\alpha}$

ou

$$h_1^*(\boldsymbol{p},u) = {p_1}^{\alpha-1}{p_2}^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} k^{-1}U$$

5. a. por substituição: $x_2 = U^{\frac{1}{1-\alpha}}.k^{-\frac{1}{1-\alpha}}.x_1{}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ $\rightarrow$

$$min\, p_1\, x_1 + p_2 U^{\frac{1}{1-\alpha}}.k^{-\frac{1}{1-\alpha}}.x_1{}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

CPO:

$$p_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\, p_2 U^{\frac{1}{1-\alpha}}.k^{-\frac{1}{1-\alpha}}.x_1{}^{-\frac{1}{1-\alpha}} = 0$$

Isolando $x_1$ :

$$x_1 = p_1{}^{\alpha-1}\, p_2{}^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} .k^{-1}.U$$

Substituindo em seguida na restrição, obtemos a segunda demanda hicksiana. Temos assim:

Substituindo essas demandas na função objetivo, obtemos a função gasto:

$$e(\mathbf{p},u) = p_1\, h_1 + p_2\, h_2 = p_1{}^{\alpha} p_2{}^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} k^{-1}U + p_1{}^{\alpha} p_2{}^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} k^{-1}U$$

$$e(\mathbf{p},u) = p_1{}^{\alpha} p_2{}^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}\right] k^{-1}U$$

5.b. Formamos o lagrangeano: $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \lambda\left[u - (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho}\right]$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{(1/\rho)-1} \rho x_1^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{(1/\rho)-1} \rho x_2^{\rho-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} = 0$$

Combinando as duas primeiras, temos: $x_1 = x_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$

*Versão usual*: depois de alguma álgebra tediosa, temos:

*Versão adequada*: Substituindo o resultado na restrição, isolando $x_2$ e adotando a definição anterior de r, temos as duas funções demanda hicksianas:

$$h_1(\mathbf{p},u) = p_1^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}U$$
$$h_2(\mathbf{p},u) = p_2^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}U$$

Substituindo estas na função objetivo do PMG, obtemos a função gasto:

$$e(\mathbf{p},u) = p_1\, h_1 + p_2\, h_2 = p_1 p_1^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}U + p_2 p_2^{r-1}(p_1^r + p_2^r)^{(1/r)-1}U$$

$$e(\mathbf{p},u) = (p_1^r + p_2^r)^{(1/r)}U$$

"Note que a expressão da função gasto se assemelha a função utilidade original.

8. **U($x_1$,$x_2$) = 100$x_1^2x_2^3$**
**$p_1x_1$ + $p_2x_2$ = M**

Resp. $\max_{x_1,x_2}\ L(x_1,x_2,\lambda) = 100x_1^2.x_2^3 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad 200x_1x_2^3 - \lambda p_1 = 0$ (1)
$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad 300x_2^2x_1^2 - \lambda p_2 = 0$ (2)
$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1x_1 + p_2x_2 - M = 0$ (3)

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (1) $\lambda = \frac{200x_1x_2^3}{p_1}$ (4)
De (2) $\lambda = \frac{300x_2^2x_1^2}{p_2}$ (5)
Igualando: $\frac{200x_1x_2^3}{p_1} = \frac{300x_2^2x_1^2}{p_2} \rightarrow$ : $\frac{2x_2}{p_1} = \frac{3x_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2\frac{2p_2}{3p_1}$, (6) substituindo em (3)

$p_1\left(x_2\frac{2p_2}{3p_1}\right) + p_2x_2 = M \rightarrow \frac{2p_2}{3}x_2 + p_2x_2 = M \rightarrow \frac{5p_2}{3}x_2 = M;$

$\boldsymbol{x_2^* = \frac{3M}{5p_2}}$ ; $\boldsymbol{x_1^* = \frac{2M}{5p_1}}$ **(demandas Marshallianas)**

a) Calcule a quantidade demandada de $x_1$ para $p_1$=\$30 e $p_2$ = \$20 e M = \$50.000.
Resp. $x_1^* = \frac{2M}{5p_1} \rightarrow x_1^* = \frac{2\times 50000}{5\times(30)} = 666.7$

$x_2^* = \frac{M}{2p_2} \rightarrow x_2^* = \frac{3\times 50000}{5.(20)} = 1500$

8'. **U($x_1$,$x_2$) = 100$x_1^2x_2^2$**
**$p_1x_1$ + $p_2x_2$ = M**

Resp. $\max_{x_1,x_2}\ L(x_1,x_2,\lambda) = 100x_1^2.x_2^2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad 200x_1x_2^2 - \lambda p_1 = 0$ (1)
$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad 200x_2x_1^2 - \lambda p_2 = 0$ (2)
$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1x_1 + p_2x_2 - M = 0$ (3)

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (1) $\lambda = \frac{200x_1x_2^2}{p_1}$ (4)
De (2) $\lambda = \frac{200x_2x_1^2}{p_2}$ (5)
Igualando: $\frac{200x_1x_2^2}{p_1} = \frac{200x_2x_1^2}{p_2} \rightarrow$ : $\frac{x_2}{p_1} = \frac{x_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2\frac{p_2}{p_1}$, (6) substituindo em (3)

$$p_1\left(x_2\frac{p_2}{p_1}\right) + p_2x_2 = M \quad \rightarrow \quad 2p_2x_2 = M;$$

$\boldsymbol{x_2^* = \frac{M}{2p_2}}$ ; $\boldsymbol{x_1^* = \frac{M}{2p_1}}$ **(demandas Marshallianas)**

a) Calcule a quantidade demandada de $x_1$ para $p_1$=\$30 e $p_2$ = \$20 e M = \$50.000.
Resp. $x_1^* = \frac{M}{2p_1} \rightarrow x_1^* = \frac{50000}{2.(30)} = 833.4$

$x_2^* = \frac{M}{2p_2} \rightarrow x_2^* = \frac{50000}{2.(20)} = 1250$

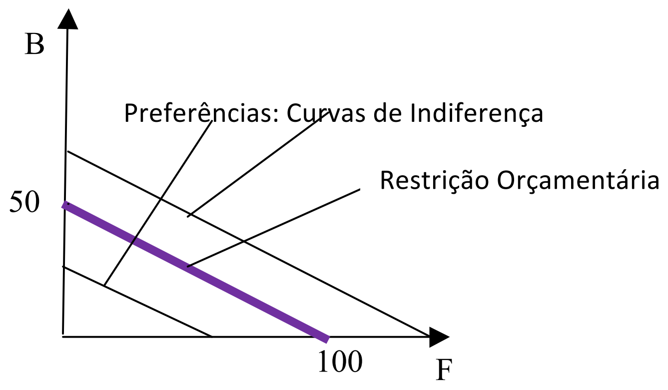
b) Supondo que $p_1$ se reduza para \$20, quais as variações nas quantidades demandadas de cada um dos bens?
Resp. $x_1^* = \frac{50000}{2.(20)} = 1250$, variação de (1250-833.4)=416.6 do bem 1 e 0 do bem 2.

c) Repita o item (a) supondo uma redução de renda para \$40.000.
Resp. $x_1^* = \frac{M}{2p_1} \rightarrow x_1^* = \frac{40000}{2.(30)} = 666.7$

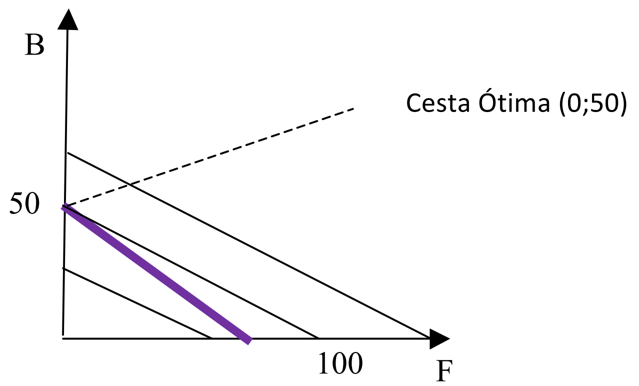
$x_2^* = \frac{M}{2p_2} \rightarrow x_2^* = \frac{40000}{2.(20)} = 1000$

d) O que você pode afirmar sobre a elasticidade-preço e renda do bem 1 e a elasticidade-cruzada. Voce diria que o bem 1 e 2 são complementares?
Resp. Discutir posteriormente.
Importante: Note que a restrição entrou como sendo $-\lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)$
Alternativamente poderia ter sido incluída como $+\lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$

9. Resp. (a) Estas preferências são lineares entre B e F, portanto são bens substitutos perfeitos, quando a substituição perfeita ocorre de 1 unidade de B para 2 unidades de F. O consumidor vai comprar tudo do bem que for mais barato ou vai ser indiferente a qualquer combinação de quantidades de bens que tenham o mesmo preço.
Assim, o preço de B é R\$4/kg e 2 kg de F também custam R\$4. O que torna o indiferente a qualquer cesta na curva de indiferença que encontra a restrição orçamentária roxa que representa R\$200. Neste caso, as curvas de indiferença e a restrição orçamentária são coincidentes.




b) Se o preço do frango aumentar para R$3, os 2 kg de F terão preço R$6 , portanto , preço maior que o 1 kg de carne Bovina, que permanece R$4. Então o consumidor compra tudo de B , na cesta (F,B) =(0; 50)




a) Resp. $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^b . x_2^d - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad b. x_1^{b-1} x_2^d - \lambda p_1 = 0 \qquad (1)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad d. x_1^b x_2^{d-1} - \lambda p_2 = 0 \qquad (2)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 - M = 0 \qquad (3)$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (1) $\lambda = \frac{b.x_1^{b-1} x_2^d}{p_1}$ (4)

De (2) $\lambda = \frac{d.x_1^b x_2^{d-1}}{p_2}$ (5)

Igualando: $\frac{b.x_1^{b-1} x_2^d}{p_1} = \frac{d.x_1^b x_2^{d-1}}{p_2} \quad \rightarrow \quad : \frac{b.x_2}{p_1} = \frac{d.x_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 \frac{b.p_2}{d.p_1},$ (6) substituindo em (3)

$p_1 \left( x_2 \frac{b.p_2}{d.p_1} \right) + p_2 x_2 = M \quad \rightarrow \quad (1 + \frac{b}{d}) p_2 x_2 = M;$

$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{dM}{(b+d)p_2}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_1^* = \frac{bM}{(b+d)p_1}}$$

**(Note que estas são as demandas resultantes de quaisquer funções utilidades do tipo Cobb-Douglas, e podem ser usadas diretamente para calcular as demandas Marshallianas resultantes de maximização de utilidades sujeitas a restrições orçamentárias)**

b) U $(x_1,x_2)$ = c ln $x_1$ + d ln $x_2$.

Resp. $\max_{x_1,x_2} L(x_1,x_2,\lambda) = c\ln x_1 + d\ln x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - M)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_1} = 0 \quad c.\frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad (1)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial x_2} = 0 \quad d.\frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \qquad (2)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \quad p_1x_1 + p_2x_2 - M = 0 \qquad (3)$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (2) $\lambda = \frac{d}{p_2x_2}$ e (1) $\lambda = \frac{c}{p_1x_1}$ (5)

Igualando: $\frac{d}{p_2x_2} = \frac{c}{p_1x_1} \rightarrow \; : \frac{c.x_2}{p_1} = \frac{d.x_1}{p_2} \rightarrow x_1 = x_2\frac{c.p_2}{d.p_1},$ (6) substituindo

em (3)

$p_1\left(x_2\frac{c.p_2}{d.p_1}\right) + p_2x_2 = M \quad \rightarrow \quad (1+\frac{c}{d})p_2x_2 = M;$

$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{dM}{(c+d)p_2}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_1^* = \frac{cM}{(c+d)p_1}}$$

Assim, sendo c=b os resultados de demandas obtidas são os mesmos nos itens (a e b). Deste modo, conclui-se que a aplicação de logaritmos na função utilidade é uma transformação monotônica da função utilidade original e, portanto, representa as mesmas preferências.

11. Resp.

a) $L(X,Y,\lambda) = X^{0.5}.Y^{0.5} - \lambda(p_xX + p_yY - M)$

Maximizando L(.) em relação à X e Y, tem-se:

$L(X,Y,\lambda) = X^{0.5}.Y^{0.5} - \lambda(10.X + 20.Y - 200)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial X} = 0 \qquad 0.5X^{-0.5}Y^{0.5} - \lambda 10 = 0 \qquad (1)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial Y} = 0 \qquad 0.5Y^{-0.5}X^{0.5} - \lambda 20 = 0 \qquad (2)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = 0 \qquad 10.X + 20.Y - 200 = 0 \qquad (3)$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

De (2) $\lambda = \frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{10}$ e (1) $\lambda = \frac{0.5Y^{-0.5}X^{0.5}}{20}$ (5)

Igualando: $\frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{10} = \frac{0.5Y^{-0.5}X^{0.5}}{20} \rightarrow X^{-0.5}Y^{0.5} = 0.5Y^{-0.5}X^{0.5} \rightarrow$

$\frac{X^{-0.5}}{X^{0.5}} = 0.5\frac{Y^{-0.5}}{Y^{0.5}} \rightarrow X^{-1} = 0.5Y^{-1} \rightarrow X = 2Y$ (6) substituindo em (3)

$10.2Y + 20.Y - 200 = 0 \rightarrow Y^* = 5; \; X^* = 10$

Note que esta solução poderia ter sido calculada, alternativamente, diretamente da solução do exercício 10. $\boldsymbol{x_2^* = \frac{dM}{(c+d)p_2}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_1^* = \frac{cM}{(c+d)p_1}}$

b) $L(X,Y,\lambda) = X^{0.5}.Y^{0.5} - \lambda_1\left(p_xX + p_yY - M\right) - \lambda_2(X-5)$

$$\max_{X,Y} L(X,Y,\lambda) = X^{0.5}.Y^{0.5} - \lambda_1(10.X + 20.Y - 200) - \lambda_2(X - 5)$$

$\frac{\partial L(.)}{\partial X} = 0 \qquad 0.5X^{-0.5}Y^{0.5} - \lambda 10 = 0 \qquad (1)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial Y} = 0 \qquad 0.5Y^{-0.5}X^{0.5} - \lambda 20 = 0 \qquad (2)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda_1} = 0 \qquad 10.X + 20.Y - 200 = 0 \qquad (3)$

$\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad X - 5 = 0 \qquad (4)$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

$X^* = 5$, substituindo em (3), $Y^* = \frac{150}{20} = 7.5$

Para saber se o bem estar do consumidor melhora ou piora, basta substituir as quantidades demandadas calculadas na função utilidade.

Caso a) $U = X^{0.5}.Y^{0.5} = 10^{0.5}.5^{0.5} = 3.1622 \times 2.2360 = 7.0760$

Caso b) $U = X^{0.5}.Y^{0.5} = 5^{0.5}.7.5^{0.5} = 2.2360 \times 2.7386 = 6.1235$

Verifica-se que o bem-estar do consumidor piora com a restrição de quantidades do governo.