7. Polos e Zeros

Profa. Vilma A. Oliveira
USP São Carlos
Março 2016

Referências utilizadas:
Colaneri, P., Geromel, J. C. & Locatelli, A. (1997). *A Control Theory and Design - An RH_2 e RH_∞ Viewpoint*. Academic Press, London.
Zhou, Kemin, J. C. Doyle & K. Glover (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River.
Morris, Kirsten (2002). *Introduction to Feedback Control*, Academic Press.
Antsaklis & Michel (2007). *A Linear System Primer*, Birkhauser, Boston.

Introdução

Os polos e zeros de um sistema SISO descrito pela função de transferência $g(s)$ são dados pelas raízes do polinômio do denominador e do numerador de $g(s)$, após os cancelamentos, se houver. Um polo λ corresponde a um modo do sistema com solução $e^{\lambda t}$. A solução não forçada do sistema após uma excitação de entrada é a soma ponderada de modos. Zeros têm uma diferente interpretação. A saída exponencial correspondente à entrada exponencial $u(t) = e^{st}$ é dada por $g(s)e^{st}$. Segue, portanto, que a saída é zero se $g(s) = 0$, ou seja, se s for raiz do polinômio do numerador de $g(s)$. Zeros de $g(s)$, então bloqueiam a transmissão do correspondente sinal exponencial.

Para um sistema MIMO por inspeção da matriz de transferência $G(s)$ pode-se saber a localização dos polos examinando cada elemento de $G(s)$. Porém, a multiplicidade dos polos não é tão facilmente determinada. Já os zeros, por inspeção não se pode saber nem a respeito da sua localização, uma vez que $G(s)$ é uma matriz polinomial p x m. Os zeros de cada função de transferência significam pouco do ponto de vista de controle multivariável e não podem ser utilizados na generalização do conceito de zeros para sistemas MIMO.

<u>Exemplo 7.1</u>

Seja

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de G é estável e não possui zeros finitos. Suponha

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s-\sqrt{2}} & -\frac{s+1}{s-\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é instável. Entretanto

$$KG(s) = \begin{bmatrix} -\frac{s+\sqrt{2}}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$ é estável.

Isto implica que G tem um zero instável em $\sqrt{2}$ o qual cancela o polo instável de K. Os zeros de G são: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Se $p = m$, $G(s)$ é uma matriz quadrada e os zeros podem ser definidos como as raízes da equação polinomial:

$$\det\left[C\{adj(sI-A)\}B+D\ \det(sI-A)\right]=0$$

Se $p \neq m$ os zeros ocorrem quando G(s) perde posto.

7.1 Polos e zeros de transmissão

Para um sistema MIMO descrito pela função de transferência $G(s)$, a forma de McMillan permite encontrar os zeros e polos de $G(s)$.

Definição 7.1: Considere a matriz racional $G(s)$ e a sua forma McMillan:

$$M(s)=\begin{bmatrix} f_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_r(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (55)$$

onde $f_i(s) := \dfrac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}, i=1,2,\cdots,r$, $\varepsilon_i(s)$ divide $\varepsilon_{i+1}(s)$ e $\psi_{i+1}(s)$ divide $\psi_i(s)$.

Os polos de $G(s)$ são definidos como as raízes de $\prod_{i=1}^{r}\psi_i(s)$ e os zeros como as raízes de $\prod_{i=1}^{r}\varepsilon_i(s)$. A definição de zeros coincide com aquela de zeros de transmissão de um sistema tendo $G(s)$ como função de transferência.

Observação: Em geral, $\varepsilon_i(s)$ e $\psi_j(s); i \neq j$ podem ter raízes comuns e portanto sistemas MIMO podem apresentar polos e zeros coincidentes mesmo no caso de realizações mínimas.

<u>Exemplo 7.2</u>
Considere a forma de Smith-Mcmillan de $G(s)$:

$$M(s)=U(s)G(s)V(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $U(s)$ e $V(s)$ são matrizes unimodulares (possuem determinante constante e diferente de zero). Os polos de $G(s)$ são {-1,-1,-1,-2} e os zeros de transmissão {-2}.

Para m=3 e p=2, usando o módulo MIMOTOOLS no Matlab, a forma de Smith-Mcmillan de $G(s)$ pode ser obtida como:

```
>>G=tf(G11G12 G13;G21 G22 G23)
 >>[M,poles,zeros]=smform(G)
```

Zeros de transmissão de um sistema quadrado

No caso particular quando *G*(*s*) é quadrada $\det[G(s)] = \dfrac{\prod_{i=1}^{r} \varepsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^{r} \psi_i(s)}$.

Observe, entretanto, que na presença de cancelamentos o determinante não fornece todos os zeros e polos de *G*(*s*).

Lema 7.1: Seja G(s) quadrada e $\det(G(s)) \neq 0$. Suponha $\lambda \in C$ não é um pólo de G(s). Então, $\lambda \in C$ é um zero de transmissão se e só se $\det(G(\lambda)) = 0$.

Lema 7.2: (Propriedade de posto de zeros de transmissão) Considere *G*(*s*) de posto $r := \min[p, m]$. Um número $\lambda \in C$ é um zero de transmissão de *G*(*s*) se e só se existir um vetor z diferente de zero tal que

$$G(\lambda)z = 0 \quad \text{se } p \geq m, \quad z \in C^m$$
$$G^T(\lambda)z = 0 \quad \text{se } p \leq m, \quad z \in C^p \tag{56}$$

Observação: os zeros de transmissão têm a propriedade de bloquear a transmissão, ou seja, fornecer saída zero em resposta a entradas pertencentes a uma classe de sinais exponenciais e impulsivos. O Lema 7.2 se aplica mesmo que $\lambda \in C$ seja um pólo embora $G(\lambda)$ não seja definida uma vez que $G(\lambda)z$ pode ser bem definida.

Lema 7.3: Suponha que $\lambda \in C$ não é um pólo de G(s). Então, $\lambda \in C$ é um zero de transmissão se e só se posto $G(\lambda)$ for menor que posto normal de G(s).

Posto normal é o maior posto possível para pelo menos um $s \in C$. Portanto, o posto de *G*(*s*) diminui quando $s=\lambda$, se λ for um zero de *G*(*s*). Se existir um vetor não zero z tal que $G(\lambda)z = 0$.

<u>Caracterização no domínio do tempo de pólos e zeros de transmissão</u>

Teorema 7.1: Seja *G*(*s*) a função de transferência de um sistema (A, B, C, D). Então,

i) O número complexo λ é um polo de *G*(*s*) se e só se existir uma entrada impulsiva

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t) \tag{57}$$

com α_i constantes adequadas, $\nu \geq 0$, tal que a saída forçada $y_f(.)$ de (A, B, C, D) é $y_f(t) = y_0 e^{\lambda t}, \forall t > 0$, com $\delta(t) := \delta^{(0)}(t)$ a função impulsiva e $\delta^{(k)}(t)$ a sua k-ésima derivada (lembre que a transformada de Laplace de $\delta^{(k)}(t)$ é $\delta_L{}^{(k)} = s^k$).

ii) O número complexo λ é um zero de transmissão de *G*(*s*) se e só se existir uma entrada exponencial/impulsiva

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t) \tag{58}$$

com α_i constantes adequadas, $\nu \geq 0$, $u_0 \neq 0$ tal que a saída forçada $y_f(.)$ de (A, B, C, D) é $y_f(t) = 0, \forall t > 0$.

Prova. Pode-se usar a forma de Smith-Mcmillan (ver Colaneri et al. 1997).

Exemplo 7.3

Considere a matriz G na forma SM:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0\\ 0 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix} \text{ e } y(s)=G(s)u(s)$$

Para $\lambda=-1$ um polo de G(s) escolha

$$u=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{(s+1)}\psi_2(s)\end{bmatrix}. \text{ Assim, } \quad \begin{aligned} y_2(s) &= \frac{1}{(s+1)}\varepsilon_2(s)\\ &= y_0\frac{1}{(s+1)}+\beta(s)\end{aligned}$$

com $y_0=1$ e $\beta(s)=1$. Portanto, $y_2(t)=e^{-t}+\delta(t), t\geq 0$ e $y_2(t)=e^{-t}, t>0$.
Agora, $\lambda=-2$ um zero de G(s) escolha

$$u=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{(s+2)}\psi_2(s)\end{bmatrix} \text{ e } \quad y_2(s)=\frac{1}{(s+2)}\underbrace{\varepsilon_2(s)}_{=1}$$

Neste caso, $y_2(s)$ vai ser um polinômio. Portanto, $y_2(t)=\delta(t), t\geq 0$ e $y_2(t)=0, t>0$.

A denominação zeros de transmissão é porque estes são referenciados à função de transferência (transmitância) do sistema. No caso de sistemas SISO pode-se escrever:

$$G(s)=\frac{Cadj[sI-A]B}{\det[sI-A]}+D \tag{59}$$

Os zeros de transmissão coincidem com as raízes do numerador feitos todos os cancelamentos possíveis. As raízes de $Cadj[sI-A]B+D\det[sI-A]$ são ainda chamados zeros do sistema. Estas raízes constituem na realidade os chamados zeros invariantes do sistema.

Exercício. Computar os pólos e zeros do sistema descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2}\end{bmatrix}.$$

Exercício. Considere o sistema com três entradas e duas saídas:

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\begin{bmatrix}(s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2\\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1)\end{bmatrix}$$. Pede-se obter os pólos e zeros.

7.2 Zeros do sistema e zeros invariantes

Os zeros de um sistema podem ser caracterizados em termos de sua realização espaço de estado.
A forma espaço de estado pode ser escrito como

$$P(s)\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix},\ P(s)=\begin{bmatrix}sI-A & -B\\ C & D\end{bmatrix}.$$

Definição 7.2 (Polinômio dos zeros de {A,B,C,D}): Seja r= posto P(s) e considere todos os menores de ordem r de P(s). O polinômio dos zeros do sistema {A,B,C,D} é definido como o polinômio mônico do máximo divisor comum de todos os menores de ordem r.

Definição 7.3: Os zeros do sistema {A,B,C,D} são as raízes do polinomial dos zeros do sistema.

Os zeros invariantes são então os valores de $s = \lambda$ para o qual $P(s)$ perde posto, resultando em $y = 0$.

Definição 7.4: Os autovalores de *A* são chamados pólos da realização de $G(s)$. Os zeros invariantes são definidos via uma matriz polinomial, a chamada matriz do sistema

$$P(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Definição 7.5: Um número complexo λ é um zero invariante de (*A*,*B*,*C*,*D*) se satisfaz

$$\text{posto}\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} < \text{posto normal}\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Lema 7.4: (Propriedade de posto de zeros invariantes) Seja *P*(*s*) a matriz do sistema associada com $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ com $\text{posto}[G(s)] = \min[p, m]$. Suponha que P(s) tenha posto normal coluna ou linha para $p > m$ ou $p < m$, respectivamente. O número complexo λ é um zero invariante do sistema se e só se *P*(*s*) perde posto em $s=\lambda$, isto é, se e só se existir um vetor $z := [x \quad u]^T$ diferente de zero tal que

$$\begin{aligned} P(\lambda)\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &= 0 \quad \text{se } p > m \\ P^T(\lambda)\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &= 0 \quad \text{se } p < m \end{aligned} \tag{62}$$

Prova. Considera-se apenas o caso $p > m$, o caso $p < m$ é o seu dual. Por definição λ é um zero invariante se existir $z \neq 0$ tal que $\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} z = 0$ desde que $\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$ tem posto coluna normal completo. Suponha λ é um zero invariante, então existe $z := [x \quad u]^T \neq 0$ tal que $\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} z = 0$. Podemos mostrar que $x \neq 0$. Se não for o caso tem-se que $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} u = 0$ ou $u = 0$ desde que $\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$ tem posto coluna normal completo o que daria $z = 0$ o que é uma contradição. Observe que, se $u = 0$, então $\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} x = 0$ e λ é um modo não-observável pelo PBH teste.

□

Observação: Os zeros invariantes não se alteram por realimentação de estado e nem por transformação de similaridade.

<u>Caracterização no domínio do tempo de zeros invariantes</u>

Teorema 7.2: O número complexo λ é um zero invariante de (*A*,*B*,*C*,*D*) se e só se pelo menos uma das duas condições se mantêm ($p \geq m$)

i) λ é um autovalor da parte não observável de (*A*, *C*, *B*, *D*);

ii) Existem dois vetores x_0 e $u_0 \neq 0$ tal que a saída forçada de (*A*, *C*, *B*, *D*) correspondente à entrada $u(t) = u_0 e^{\lambda t}, t \geq 0$ e estado inicial x_0, é identicamente zero para $t \geq 0$.

Teorema 7.3 (*zeros de transmissão e zeros invariantes*) Um zero de transmissão de *G*(*s*) é um zero invariante das suas realizações.

Exemplo 7.2 . Uma realização de ordem mínima é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obter os pólos e zeros (podem ser obtidos a partir do Lema 7.4).

Teorema 7.4 (*zeros de transmissão e zeros invariantes de uma realização mínima*) Os zeros invariantes e zeros de transmissão de uma realização mínima coincidem.
Para mostrar esse resultado, usar a decomposição:

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C(sI - A)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ 0 & G(s) \end{bmatrix}.$$

Supondo que λ não seja um polo de $G(s)$,

posto $\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = n + \text{posto}\, G(\lambda)$. Daqui, posto $\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} < \text{postonormal} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$ se e só se $G(\lambda) < \text{postonormal}\, G(s)$.

Os zeros invariantes e zeros de transmissão não esgotam a totalidade de zeros que podem ser definidos para um sistema não quadrado.

Corolário 7.5 (*zeros de transmissão e zeros invariantes de uma realização*). Os zeros de transmissão de uma função de transferência é um zero invariante de todas as suas realizações, e todo polo é um polo de todas as suas realizações.

7.3 Zeros de desacoplamento

Os autovalores de *A* correspondentes aos modos não controláveis ou não observáveis são chamados de zeros de desacoplamento da entrada ou saída de *P*(*s*), respectivamente.

Lema 7.6 (*zeros invariantes e zeros de desacoplamento para um sistema quadrado*) O conjunto de zeros de desacoplamento é um subconjunto do conjunto dos zeros invariantes. O conjunto dos zeros do sistema coincidem com o conjunto dos zeros invariantes.

Zeros e polos no infinito

Polos em $s=\infty$ correspondem a sistemas impróprios. Lembre que para sistemas SISO com o grau do numerador *m*, $m<n$, *m* dos polos do sistema a malha fechada irão para os zeros finitos quando o ganho da realimentação vai para

infinito e o restante dos polos *n-m* para o infinito. Para obter a estrutura de polos e zeros no infinito pode-se fazer uma mudança de variável $H(\lambda) =: G(1/s)$ e os polos e zeros de $G(s)$ em $s=\infty$ são os polos e zeros de $H(\lambda)$ em $\lambda=0$.

<u>Conjunto de zeros do sistema (A,B,C,D) não quadrado</u>

Zeros de (A,B,C,D)={zeros de transmissão}U{zeros de desacoplamento da entrada} U {zeros de desacoplamento da saída}-{zeros de desacoplamento entrada e saída}U{zeros no infinito}.

<u>Conjunto de polos do sistema (A,B,C,D) não quadrado</u>

Autovalores de A={polos de G(s)}U{autovalores de A não observáveis} U {autovalores de A não controláveis}-{autovalores de A não observáveis e não controláveis}.

Exemplo: Obter o conjunto de zeros e polos do sistema (A,B,C,D):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso tem-se:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s+1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

O polinomio dos zeros é dado pelo máximo divisor comum dos menores de ordem 4: (s+1)(s+2). Portanto os zeros são {-1,-2}. Existe um zero de desacoplamento da entrada: {-2} e um zero de desacoplamento da saída:{-2}. O sistema não tem zeros de transmissão e {-2} é um zero invariante.

<u>Exemplo:</u> Obter o conjunto de zeros e polos do sistema (A,B,C,D):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -13 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & s-7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s-5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & s-6 & 0 \\ -13 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A=[0 1 0 0;-10 7 0 0;0 0 5 0;1 -1 1 6]; B=[0 1 2 0]'; C=[-13 5 0 0;0 0 1 0]; D=[1;1];

Zeros invariantes de (A,B,C,D); sistema com 1 entrada (m=1) e 2 saídas (p=2): usando o Lema 7.4:
$P(\lambda)z = 0$
obtém-se:
Zeros invariantes $\lambda = 3, \lambda = 6$.
Zeros de transmissão $\lambda = 3$.
Zeros de desacoplamento saída (modo não observável): $\lambda = 6$ (é um zero invariante).
Zeros de desacoplamento entrada (modo não controlável): $\lambda = 5$ (não é um zero invariante).
Pólos: $\lambda = 6, \lambda = 5, \lambda = 2, \lambda = 5$
Zeros do sistema: {3,6,5}
<u>Exemplo:</u> Obter o conjunto de zeros e polos do sistema (A,B,C,D):

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -6 & -12 & 3 & 6 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A=[-2.5 -1 0 0;1 0 0 0;0 0 -4 -4;0 0 1 0]; B=[1 0 0 0;0 0 1 0]’; C=[-6 -12 3 6;0 0.5 1 1]; D=[2 0;0 0];
Neste caso o sistema é quadrado e o conjunto dos zeros do sistema coincidem com o conjunto dos zeros invariantes.

Usando o Matlab

```
Gss=pck(A,B,C,D); % matriz do sistema
zo=szeros(Gss); %zeros de transmissão
zo=tzero(A,B,C,D); %zeros invariantes
po=spoles(Gss); % polos do sistema (A,B,C,D)
LTIss=ss(A,B,C,D); % sistema LTI
Gf=tf(LTIss); %G(s)
```