

# Modelo dinâmico do pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Orientador: Prof.Dr. Marco H. Terra.

Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo

Março 22 de 2017





# Agenda

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem matemática

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

2

Problema

Modelagem  
matemática

# Pêndulo invertido

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

3

Problema

Modelagem  
matemática

Sistema mecânico clássico com características dinâmicas intrinsecamente instáveis.

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

3

Problema

Modelagem  
matemática

Sistema mecânico clássico com características dinâmicas intrinsecamente instáveis.



Princípio de funcionamento do pêndulo invertido.

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

4

Problema

Modelagem  
matemática

Existem algumas variantes do problema:

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

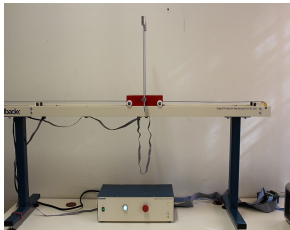
4

Problema

Modelagem  
matemática

Existem algumas variantes do problema:

1



**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27

Técnicas de controle e filtragem robusta aplicadas em um pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

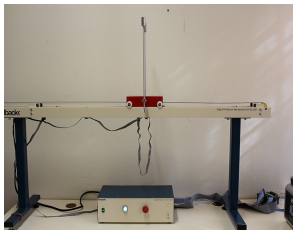
4

Problema

Modelagem matemática

Existem algumas variantes do problema:

1



2





Técnicas de controle e filtragem robusta aplicadas em um pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

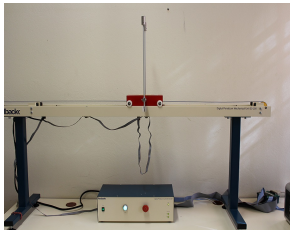
Problema

Modelagem matemática

4

Existem algumas variantes do problema:

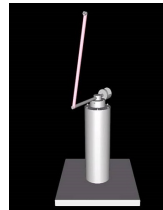
1



2



3





# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

5

Existem algumas variantes do problema:

4



**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Pêndulo invertido

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

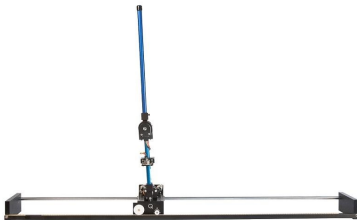
Problema

Modelagem  
matemática

5

Existem algumas variantes do problema:

4



5



**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

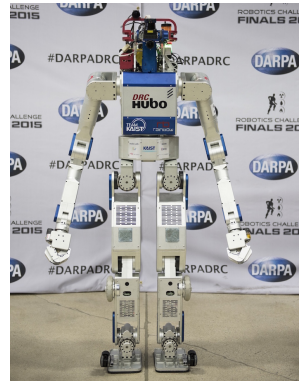
Maurício Escalante

Pêndulo invertido

6

Problema

Modelagem  
matemática



Técnicas de controle e filtragem robusta aplicadas em um pêndulo invertido

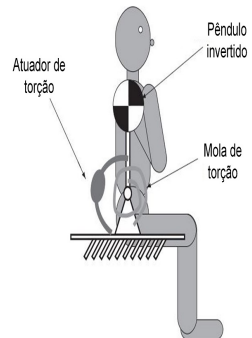
Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

7

Problema

Modelagem matemática





Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

8

# Problema

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes

Escola de Engenharia de

São Carlos

Universidade de São Paulo

Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Problemas gerais

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

9

O controle do pêndulo invertido pode ser dividido em três principais aspectos.

- ▶ **Levantamento e captura:** Conhecido na literatura como *swing-up-catching*

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Problemas gerais

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

9

O controle do pêndulo invertido pode ser dividido em três principais aspectos.

- ▶ **Levantamento e captura:** Conhecido na literatura como ***swing-up-catching***
- ▶ **Estabilização:** Conhecido na literatura como ***stabilization***

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017





# Introdução

## Problemas gerais

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

9

O controle do pêndulo invertido pode ser dividido em três principais aspectos.

- ▶ **Levantamento e captura:** Conhecido na literatura como ***swing-up-catching***
- ▶ **Estabilização:** Conhecido na literatura como ***stabilization***
- ▶ **Seguimento de referência:** Conhecido na literatura como ***tracking***

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

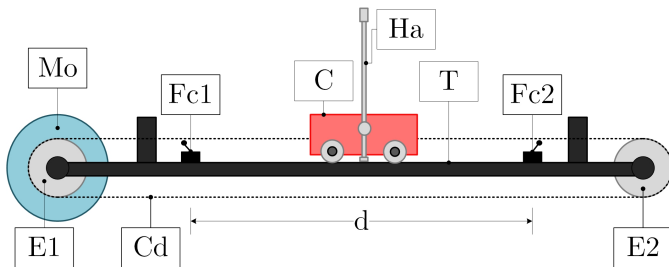
Maurício Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

10



27

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

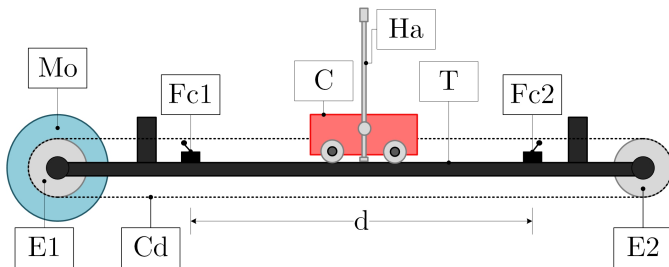
Maurício Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

10



► Limitação de comprimento

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

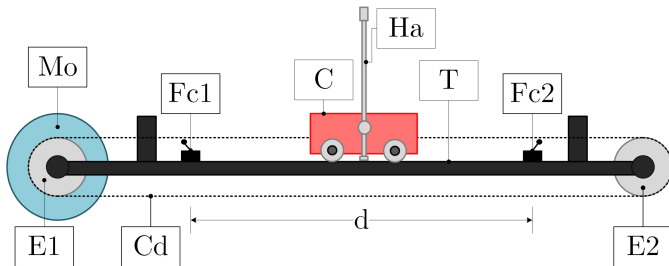
Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

10



- ▶ Limitação de comprimento
- ▶ Limitação de tensão

27

Técnicas de controle e filtragem robusta aplicadas em um pêndulo invertido

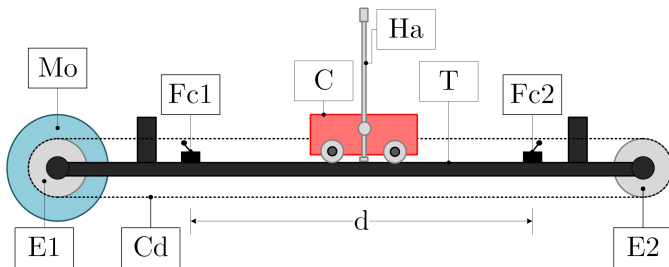
Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem matemática

10



- ▶ Limitação de comprimento
- ▶ Limitação de tensão
- ▶ Incertezas no modelo



# Introdução

## Problemas específicos

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

11



**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27



# Introdução

## Problemas específicos

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

11



27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Problemas específicos

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

11



27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

11

Modelagem  
matemática





Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

12

## Modelagem matemática

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes

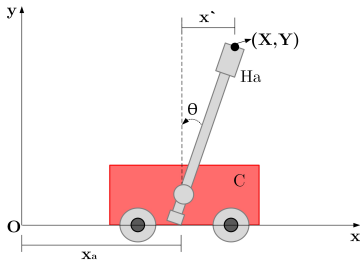
Escola de Engenharia de

São Carlos

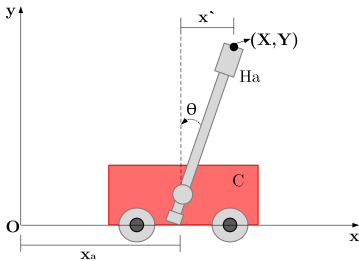
Universidade de São Paulo

Março 22 de 2017

Utilizando o método de **LAGRANGE**:



Utilizando o método de **LAGRANGE**:



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

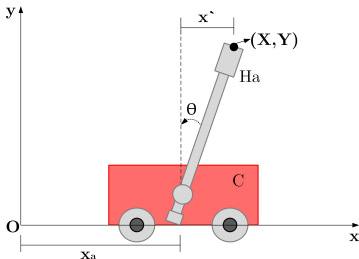
Maurício Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

14



$$L = T - V$$

Onde:

- ▶  $L$ : Função de Lagrange
- ▶  $T$ : Energia cinética
- ▶  $V$ : Energia potencial



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

$$L = T - V, \quad (1)$$

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

15

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

15

com:

$$L = T - V, \quad (1)$$

$$T = \frac{M}{2} \dot{x}_a^2 + \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2), \quad (2)$$

$$V = mgY, \quad (3)$$

27

$$L = T - V, \quad (1)$$

com:

$$T = \frac{M}{2} \dot{x}_a^2 + \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2), \quad (2)$$

$$V = mgY, \quad (3)$$

onde:

$$\begin{aligned} X &= x_a + l \sin(\theta), \\ \dot{X} &= \dot{x}_a + l \cos(\theta) \dot{\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= l \cos(\theta), \\ \dot{Y} &= -l \dot{\theta} \sin(\theta). \end{aligned}$$





# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

16

Portanto:

$$(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \dot{x}_a^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}_a\dot{\theta}\cos\theta, \quad (4)$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

16

Portanto:

$$(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \dot{x}_a^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}_a \dot{\theta} \cos\theta, \quad (4)$$

desta forma, temos que:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}_a^2 + \frac{m}{2}l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}_a \dot{\theta} \cos\theta - mgl \cos\theta \quad (5)$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

17

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (7)$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

17

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (7)$$

Então, de 6 e 7 temos respectivamente que:

$$(M + m)\ddot{x}_a + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}_a\cos\theta - mgl\sin\theta = 0$$

27



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

18

Analisando as forças que interagem no sistema, temos que:

$$(M + m)\ddot{x}_a + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F(t) - b\dot{x}_a$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}_a\cos\theta - mglsin\theta = -(\xi\dot{\theta} + I_n\ddot{\theta})$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Maurício Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

19

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= k\dot{u} \\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ml\ddot{x}_a \cos \theta + \xi\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

19

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= k\dot{u} \\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ml\ddot{x}_a \cos \theta + \xi\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

Definição	Parâmetro	Valor
Aceleração gravitacional	$g$	$9,81 \text{ m/s}^2$
Momento de inércia	$I_n$	$0,0076 \text{ kgm}^2$
Massa do carro	$M$	$2,4 \text{ kg}$
Massa da haste	$m$	$0,23 \text{ kg}$
Comprimento da haste	$l$	$0,4 \text{ m}$
Coefficiente de atrito	$b$	$0,05 \text{ Ns/m}$
Coefficiente de amortecimento	$\xi$	$0,006 \text{ Nms/rad}$
Constante do motor	$k$	$8$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

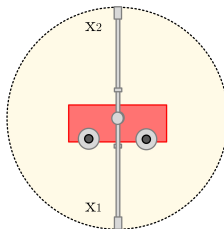
Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

20

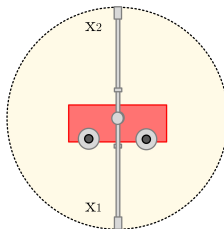


**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

27





Para pequenas variações de ângulo ao redor do ponto de equilíbrio instável (*posição superior*). As considerações normalmente são escritas como aproximações, logo:

$$\sin \theta = \theta$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\dot{\theta}^2 = 0$$



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

21

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta} &= k\dot{u} \\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + ml\ddot{x}_a + \xi\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

21

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta} &= k\dot{u} \\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + ml\ddot{x}_a + \xi\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

Manipulando algebricamente a expressão anterior, é possível obter o modelo em espaço de estados, já seja em termos de  $(\dot{x}_a$  e  $\dot{\theta})$  ou  $(\ddot{x}_a$  e  $\ddot{\theta})$ .

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

22

### ► Modelo nominal $\chi_a(x, t)$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{-(m + M)\dot{x}_a - bx_a + k_m u}{ml}, \\ \dot{x}_a &= \frac{-(I_n + ml^2)\dot{\theta} + mgl \int \theta dt - \xi\theta}{ml}.\end{aligned}\quad (8)$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelagem matemática

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

22

### ► Modelo nominal $\chi_a(x, t)$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{-(m+M)\dot{x}_a - bx_a + k_m u}{ml}, \\ \dot{x}_a &= \frac{-(I_n + ml^2)\dot{\theta} + mgl \int \theta dt - \xi \theta}{ml}.\end{aligned}\quad (8)$$

Substituindo o termo de  $\dot{\theta}$  na expressão de  $\dot{x}_a$  e vice-versa, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\xi(m+M)\theta - b(ml)x_a - mgl(m+M) \int \theta dt + k_m(ml)u}{-ml^2M - I_n(m+M)}, \\ \dot{x}_a &= \frac{-\xi(ml)\theta + b(I_n + ml^2)x_a + g(ml)^2 \int \theta dt - k_m(I_n + ml^2)u}{-ml^2M - I_n(m+M)}.\end{aligned}$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017

Desta forma, o primeiro modelo em espaço de estado é obtido. As variáveis de estado são: a posição angular  $x_{1a} = \theta$ , a posição linear  $x_{2a} = x_a$  e a ação integral da posição angular  $x_{3a} = \int \theta dt$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1a} \\ \dot{x}_{2a} \\ \dot{x}_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\xi(m+M)}{\Delta_f} & -\frac{bml}{\Delta_f} & -\frac{mgl(m+M)}{\Delta_f} \\ -\frac{\xi ml}{\Delta_f} & \frac{b(l_n+ml^2)}{\Delta_f} & \frac{g(ml)^2}{\Delta_f} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1a} \\ x_{2a} \\ x_{3a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m ml}{\Delta_f} \\ -\frac{k_m(l_n+ml^2)}{\Delta_f} \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (9)$$

sendo  $\Delta_f = -ml^2M - l_n(m + M)$ .



# Introdução

## Modelo em espaço de estados

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

24

O modelo nominal definido anteriormente é aumentado incluindo a ação integral da posição linear  $x_{int} = \int x_a dt$  como variável de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_a x + B_a u \\ y &= C_a x + D u \\ C_a &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

onde:

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



# Introdução

## Modelo em espaço de estados

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

25

► Modelo nominal  $\chi_b(x, t)$

$$\ddot{\theta} = \frac{\xi(m+M)\dot{\theta} - b(ml)\dot{x}_a - mgl(m+M)\theta + k_m(ml)\dot{u}}{-ml^2M - I_n(m+M)},$$
$$\ddot{x}_a = \frac{-\xi(ml)\dot{\theta} + b(I_n + ml^2)\dot{x}_a + g(ml)^2\theta - k_m(I_n + ml^2)\dot{u}}{-ml^2M - I_n(m+M)}.$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017



O segundo modelo em espaço de estado é apresentado. As variáveis de estado são: posição angular  $x_{1b} = \theta$ , posição linear  $x_{2b} = x_a$ , velocidade angular  $x_{3b} = \dot{\theta}$  e velocidade linear  $x_{4b} = \dot{x}_a$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1b} \\ \dot{x}_{2b} \\ \dot{x}_{3b} \\ \dot{x}_{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgl(m+M)}{\Delta_f} & 0 & \frac{\xi(m+M)}{\Delta_f} & -\frac{b(ml)}{\Delta_f} \\ \frac{g(ml)^2}{\Delta_f} & 0 & -\frac{\xi(ml)}{\Delta_f} & \frac{b(l_n+ml^2)}{\Delta_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \\ x_{3b} \\ x_{4b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m(ml)}{\Delta_f} \\ -\frac{k_m(l_n+ml^2)}{\Delta_f} \end{bmatrix} \dot{u}. \quad (10)$$

Da mesma forma  $\Delta_f = -ml^2M - l_n(m + M)$ .



# Introdução

## Modelo em espaço de estados

Técnicas de controle e  
filtragem robusta  
aplicadas em um  
pêndulo invertido

Mauricio Escalante

Pêndulo invertido

Problema

Modelagem  
matemática

27

Analogamente ao modelo  $\chi_a(x, t)$ , o presente modelo também é aumentado como em para incluir a ação integral do deslocamento como variável de estado  $x_{int}$ , com  $C_i = [0 \ -1 \ 0 \ 0]$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b & 0 \\ C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}. \quad (11)$$

27

**LASI**

Laboratório de sistemas inteligentes  
Escola de Engenharia de  
São Carlos  
Universidade de São Paulo  
Março 22 de 2017