LISTA #3 – Linearização de Sistemas Dinâmicos
PMR3302 – Sistemas Dinâmicos I para Mecatrônica

Prof. Eduardo L. Cabral

1) Dada a equação diferencial abaixo que representa a dinâmica de um sistema. Sabendo que a entrada do sistema é f e as saídas são x e $\dot{x}$.

$$\dddot{x}(t) + 5\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4f(t)$$

Pede-se
a) Defina os estados do sistema.
b) Represente o modelo do sistema na forma do espaço dos estados.

2) Dado um sistema composto de massas, molas e amortecedores, cuja dinâmica é representada pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) + k_1x_1(t) + k_2\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) + b_2\dot{x}_2(t) + k_3\left[x_2(t) - d(t)\right] + k_2\left[x_2(t) - x_1(t)\right] = f_2(t) \end{cases}$$

As massas m_1 e m_2 são iguais a 2kg, as constantes das molas k_1 e k_3 são iguais a 50N/m, a constante da mola k_2 é igual a 70N/m. Os coeficientes de atrito viscoso entre as massas e o chão b_1 e b_2 são iguais a 4N/m/s. As forças f_1 e f_2 são controladas por um agente externo conhecido e a extremidade direita da mola 3 tem um deslocamento d desconhecido e sobre o qual não se tem controle, portanto, é considerada como sendo uma perturbação. As posições das massas x_1 e x_2 são medidas, portanto, são as saídas do sistema. Pede-se:
a) Identifique o vetor de estados e o vetor de entradas do sistema.
b) Represente o modelo do sistema na forma do espaço dos estados.

3) A dinâmica de um sistema é dada pelas seguintes equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_1(t)u(t) + x_1(t)x_2(t)^2 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são os estados, u é a entrada e y é a saída do sistema. Pede-se:
a) Determine a condição de linearização do sistema assumindo uma condição estacionária onde $x_1 = 1$.
b) Assumindo que a saída do sistema é o estado x_1, obtenha o modelo linear para esse sistema em torno da posição de equilíbrio obtida no item anterior.
c) Coloque o sistema linearizado na forma do espaço dos estados.

4) A seguinte equação diferencial não linear representa a dinâmica de um sistema:

$$3y(t)\ddot{y}(t) + 8\cos\left(y(t)\right) = 2f(t)^2$$

onde y é a saída do sistema e f é a entrada do sistema. Pede-se:
a) Coloque o sistema na forma de espaço de estados não-linear.

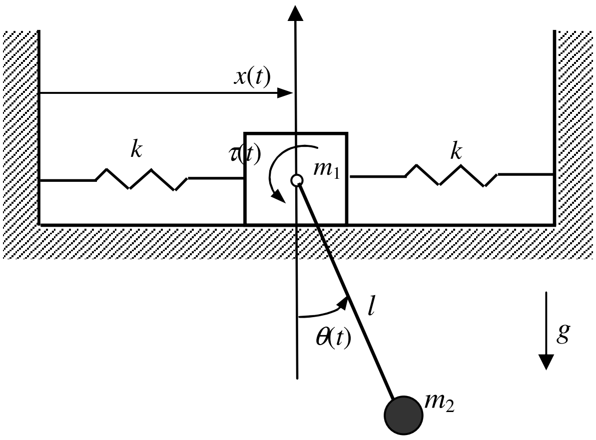
b) Adotando como condição de linearização $y_0 = 2\pi$ e $\dot{y}_0 = 0$, linearize a dinâmica do sistema utilizando o método da Série de Taylor e a condição de linearização do item anterior.
c) Linearize o sistema utilizando o método da sua escolha.
d) Coloque o sistema linear na forma do espaço dos estados definindo as suas matrizes.

5) Um sistema de levitação magnética é composto por uma esfera de massa m e um eletroímã. A esfera é suspensa pela força gerada pelo um eltroimã. O eletroímã é composto por uma bobina e um núcleo de material ferromagnético. A bobina é composta por uma resistência elétrica (R) e um indutor (L), ambos em série com uma fonte de tensão. As equações diferenciais que representam o comportamento dinâmico do sistema são as seguintes:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + mg = \dfrac{Ki(t)^2}{[x(t)+\mu]^2} \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_B(t) \end{cases}$$

onde x é a altura da esfera medida em relação à bobina, i é a corrente elétrica que passa pela bobina, K e μ são constantes e V_B é a tensão da fonte. Pede-se:
a) Determine a condição de linearização de regime estacionário quando a esfera se encontra parada na posição x_0.
b) Linearize a dinâmica do sistema em torno da condição de linearização obtida no item anterior.
c) Sendo a saída do sistema a posição da esfera e a entrada a tensão elétrica da fonte, coloque as equações linearizadas na forma do espaço dos estados.

6) O sistema mecânico da figura abaixo consiste de um bloco sólido de massa m_1, um pêndulo de massa m_2 e comprimento l e duas molas com rigidez k. A distância entre as duas paredes é L e na condição de equilíbrio o bloco fica exatamente à meia distância das duas paredes. O contato entre o bloco e o piso é lubrificado de forma que no contato existe atrito viscoso com coeficiente b. Um torque conhecido, $\tau(t)$, é aplicado na articulação do pêndulo.



As equações dinâmicas que representam o movimento desse sistema são dadas por:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x}(t) + m_2 l[\cos\theta(t)]\ddot{\theta}(t) - m_2 l[\sin\theta(t)]\dot{\theta}^2 + 2kx(t) + b\dot{x}(t) = 0 \\ m_2 l^2\ddot{\theta}(t) + m_2 l[\cos\theta(t)]\ddot{x}(t) + m_2 gl\sin\theta(t) = \tau(t) \end{cases}$$

a) Calcule a condição de equilíbrio do sistema, ou seja, quando a massa está parada em repouso.
b) Linearize a dinâmica do sistema em torno da condição de equilíbrio.
c) Assumindo que a entrada do sistema é o torque aplicado na articulação do pêndulo e a saída é a posição da massa, coloque as equações linearizadas na forma do espaço dos estados.

7) Seja um sistema composto por um eixo acionado por um motor. O eixo gira apoiado em mancais de deslizamento de forma que existe atrito seco entre o eixo e os mancais. O modelo desse sistema é representado pela seguinte equação diferencial:

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - \mu f N \mathrm{sinal}\left(\dot{\theta}(\mathrm{t})\right)$$

onde θ é a posição angular do eixo, τ é o torque do motor, J é o momento de inércia das partes girantes do sistema, μ é o coeficiente de atrito seco, f é um fator geométrico que depende dos diâmetros do eixo e da bucha e N é a força normal entre o eixo e o mancal. Pede-se:

a) Determine a condição de linearização de regime estacionário quando o eixo se encontra parado em uma dada posição θ0.
b) Em razão da presença da função sinal, a linearização do termo de atrito Coulombiano em torno de uma condição de linearização onde o eixo está parado gera um impulso, ou seja um termo com amplitude infinita. Para evitar esse problema, linearize a dinâmica do sistema substituindo a força de atrito seco por uma força de atrito viscoso equivalente, ou seja, $b_{eq}\dot{\theta}$.
c) Calcule o coeficiente de atrito viscoso equivalente (beq) assumindo que o eixo oscila em torno da posição θ0 = 0o com amplitude e freqüência de oscilação respectivamente iguais a θm e ω. Para isso calcule: (1) a energia dissipada pelo atrito viscoso equivalente em um ciclo de movimento do eixo oscilando com amplitude θm e freqüência ω em torno de θ0 = 0; a energia dissipada pelo atrito Coulombiano em um ciclo de movimento do eixo em torno de θ0 = 0; (3) iguale a energia dissipada pelo atrito viscoso equivalente com a energia dissipada pelo atrito Coumlombiano em um ciclo do movimento e calcule a o coeficiente de atrito viscoso equivalente.

Solução

1a) Estados: x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$.

1b) $$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} f(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

2a) Estados: x_1, x_2, $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$. Entrada: f_1, f_2, d é perturbação.

2b) $$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -60 & 35 & -2 & 0 \\ 35 & -60 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

3a) $x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$, $u_0 = -2$.

3b) $\begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) = \delta u(t) \\ \delta y(t) = \delta x_1(t) \end{cases}$

3c) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$

4a) $\begin{cases} \dot{y}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\dfrac{8\cos\big(y(t)\big)}{3y(t)} + \dfrac{2f(t)^2}{3y(t)} \end{cases}$

4b) $\begin{cases} \delta\dot{y}(t) = \delta v(t) \\ \delta\dot{v}(t) = \dfrac{4}{2\pi}\delta f(t) \end{cases}$

4c) $\delta\ddot{y}(t) = \dfrac{4}{3\pi}\delta f(t)$

4d) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{y}(t) \\ \delta\dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{4}{3\pi} \end{bmatrix} \delta f(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$

5a) x_0, $i_{a0} = (x_0 + \mu)\sqrt{\dfrac{mg}{K}}$, $V_B = Ri_0$.

5b) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta x(t) = \delta v(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta v(t) = \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\delta x(t) + \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\sqrt{\dfrac{Kg}{m}}\, i(t) \\ \dfrac{d}{dt}\delta i(t) = -\dfrac{R}{L}\delta i(t) + \dfrac{1}{R}\delta V_B(t) \end{cases}$

5c) $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2g}{(x_0+\mu)} & 0 & \dfrac{2}{(x_0+\mu)}\sqrt{\dfrac{Kg}{m}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \delta V_B(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \\ \delta i_a(t) \end{bmatrix} \end{cases}$

6a) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\tau_0 = 0$.

6b) $\begin{cases} (m_1+m_2)\delta\ddot{x}(t) + m_2 l\delta\ddot{\theta}(t) + 2k\delta x(t) + b\delta\dot{x}(t) = 0 \\ m_2 l^2\delta\ddot{\theta}(t) + m_2 l\delta\ddot{x}(t) + m_2 g l\delta\theta(t) = \delta\tau(t) \end{cases}$

6c) $$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{x}(t) \\ \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{v}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2k}{m_1} & \frac{m_2 g}{m_1} & \frac{-b}{m_1} & 0 \\ \frac{2k}{m_1 l} & \frac{-(m_1+m_2)g}{m_1 l} & \frac{b}{m_1 l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta\theta(t) \\ \delta v(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1 l} \\ \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 l^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t) \\ \delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta\theta(t) \\ \delta v(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

7a) $$\begin{cases} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \\ \tau_0 = \mu f N \mathrm{sinal}(0) \end{cases}$$

7b) $J\delta\ddot{\theta}(t) = \delta\tau(t) - b_{eq}\delta\dot{\theta}(t)$

7c) $b_{eq} = \dfrac{4\mu f N}{\pi\theta_m \omega}$