PEF2603

Estruturas na Arquitetura III –
Sistemas Reticulados e Laminares

Estados Duplos de Tensão

(Aula 11/03/2019)

Professores:
Ruy Marcelo O. Pauletti, Leila Meneghetti, Luís Bitencourt

1º Semestre 2019

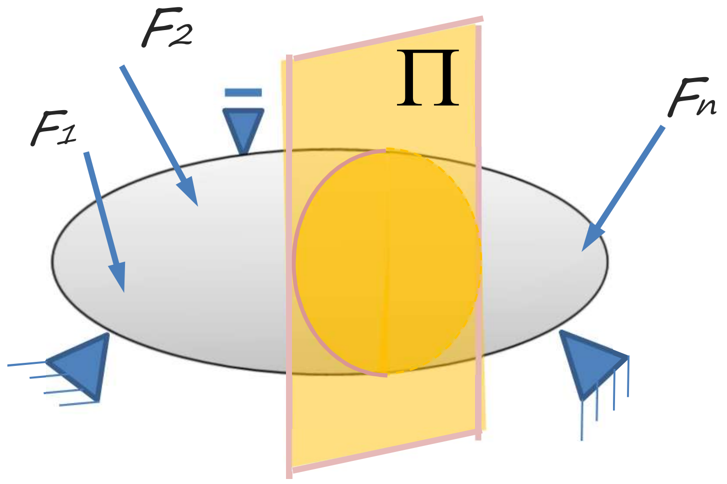
Sumário

- ✓Princípio de Euler Cauchy
- ✓Tensão normal e tangencial
- ✓Estado de tensão em um ponto
- ✓Tensor das tensões de Cauchy
- ✓Estado Plano de Tensões
- ✓Estado Plano de Deformações
- ✓Tensões atuando em um plano inclinado, em um EPT
- ✓Equações de transformação
- ✓Tensões e planos principais
- ✓Tensões de cisalhamento máximas
- ✓Círculo de Mohr
- ✓Estados de tensões especiais

Tensão

- **Princípio de Euler e Cauchy**

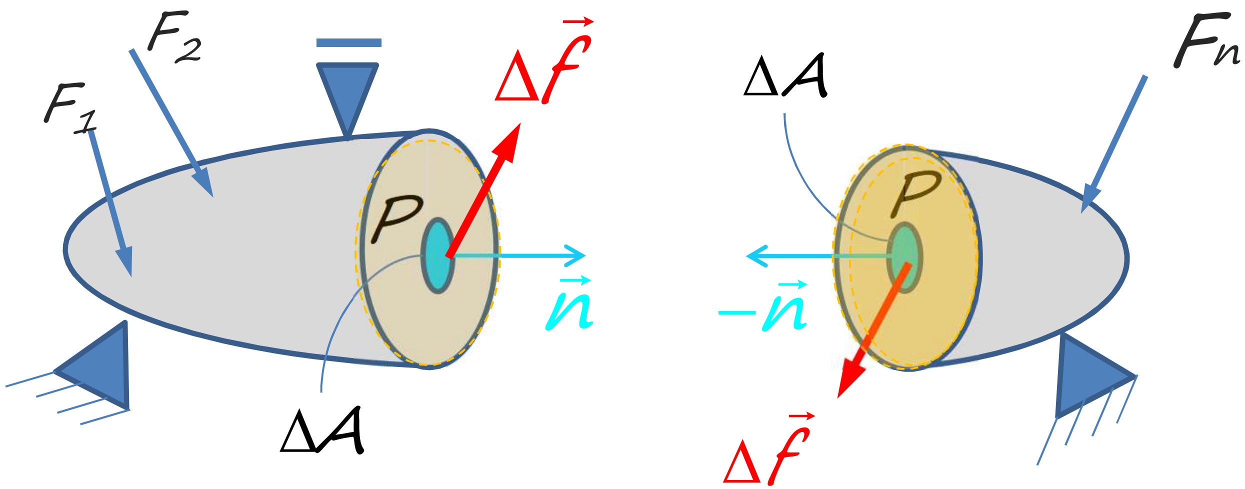
✓ Corte imaginário em um plano θ



✓ Sólido em equilíbrio

Tensão

- ## Princípio de Euler e Cauchy



$\vec{n}$ (versor que define o plano Π : $\|\vec{n}\| = 1$)

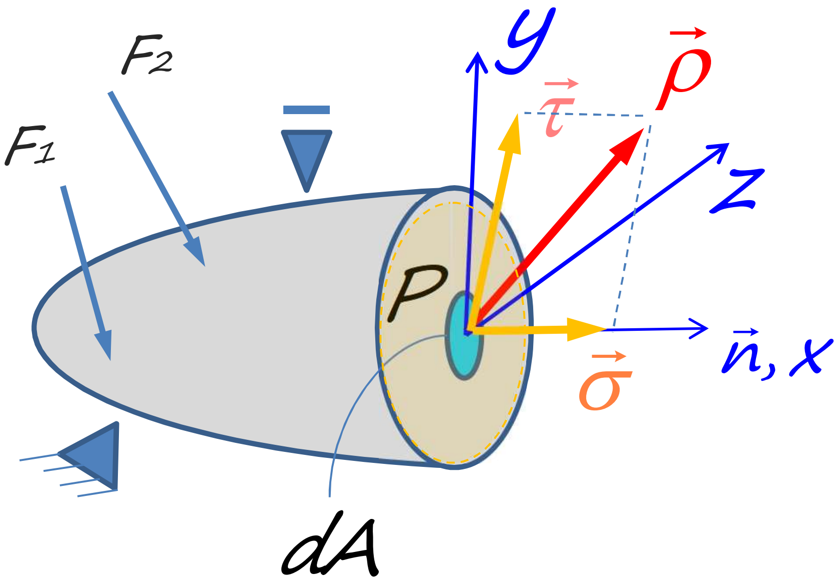
Vetor Tensão:

$$\boxed{\vec{\rho}\left(P,\vec{n}\right) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta A}}$$

O vetor tensão depende do ponto de aplicação P e do plano de corte!

Tensão

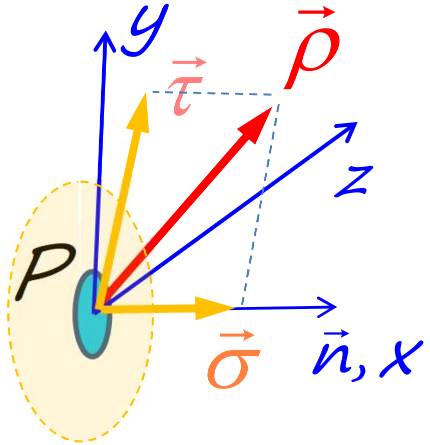
- *Princípio de Euler e Cauchy*



$$\boxed{\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}}$$

Tensão

- **Tensão Normal**



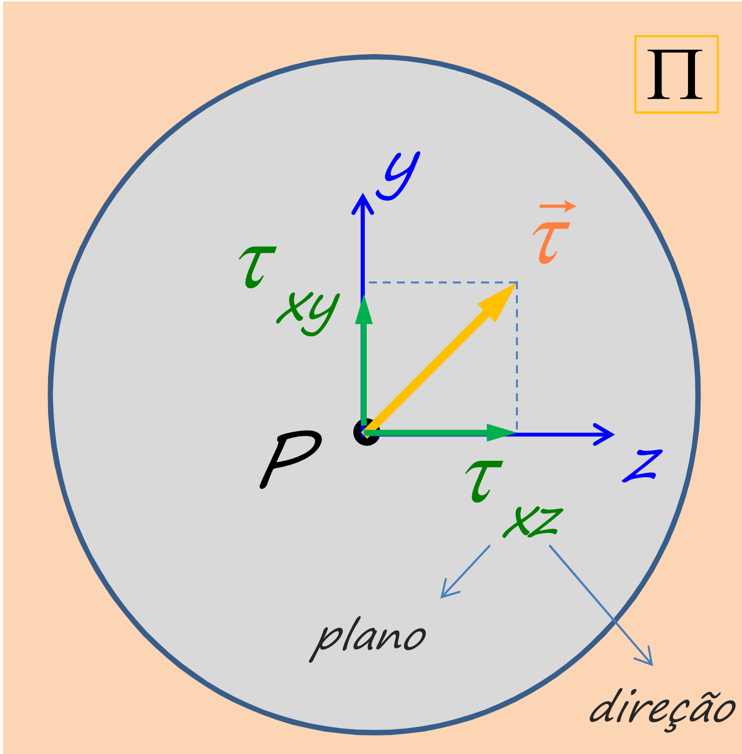
$$\boxed{\vec{\sigma} = \left(\vec{\rho} \cdot \vec{n}\right)\vec{n} = \sigma\vec{n}}$$

$$\sigma = \left\|\vec{\sigma}\right\| = \underbrace{\vec{\rho} \cdot \vec{n}}_{\text{produto escalar}}$$

- **Tensão Tangencial**

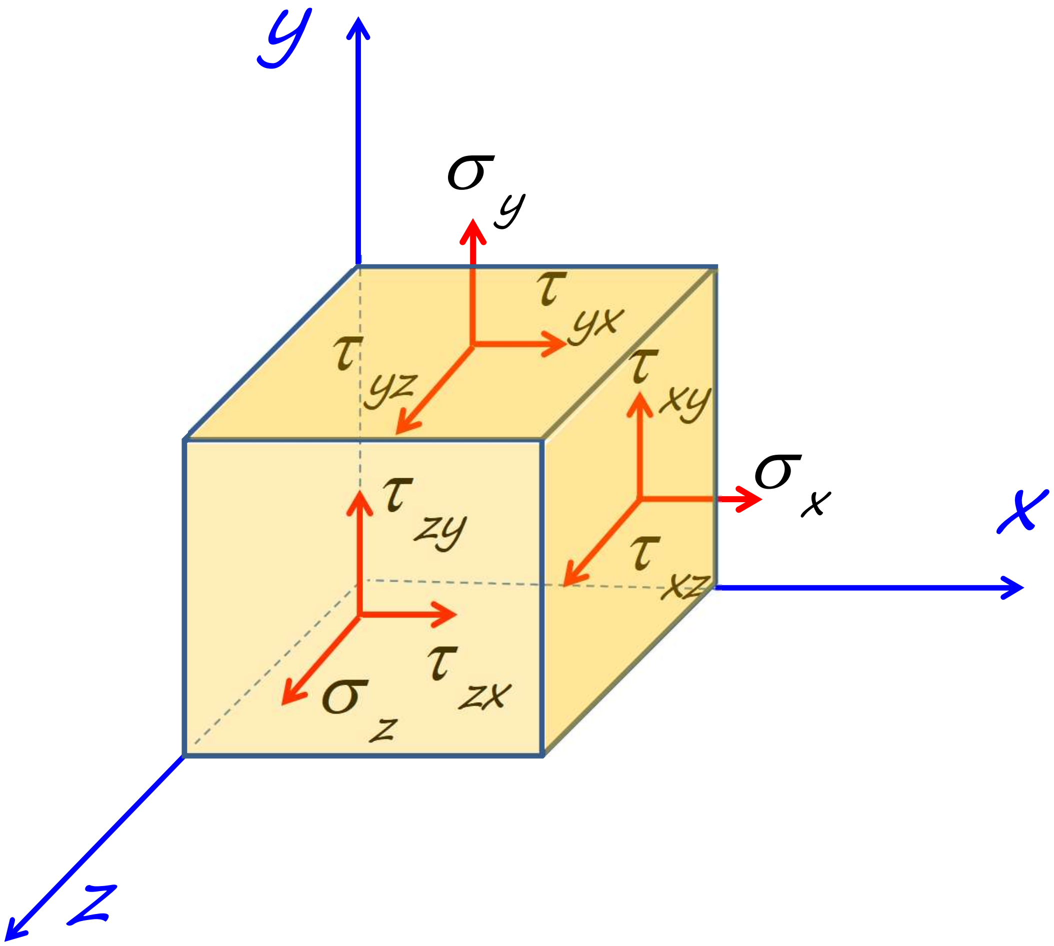
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\rho} - \vec{\sigma}}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz}}$$



Tensão

- **Componentes do estado de tensão em um ponto**



✓ *Convenção de sinais (teoria da elasticidade):*

$\sigma > 0 \rightarrow$ tração

$\tau_{xy} > 0 \rightarrow$ sentido positivo em ambos os eixos

✓ *Nas faces escondidas, agem seções recíprocas àquelas mostradas nas faces aparentes opostas., que não são indicadas para não congestionar a figura!*

- *Tensor das tensões (Cauchy)*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- ✓ Conhecendo as tensões em 3 planos ortogonais entre si, é possível se obter as tensões em qualquer outro plano

- ✓ Pode-se demonstrar que **T** é uma matriz simétrica, ou seja,
- ✓ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, existindo apenas seis componentes independentes!

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- ***Tensor das tensões (Cauchy)***

✓ Planos principais: planos de corte em relação aos quais

$$\vec{\tau} = 0$$

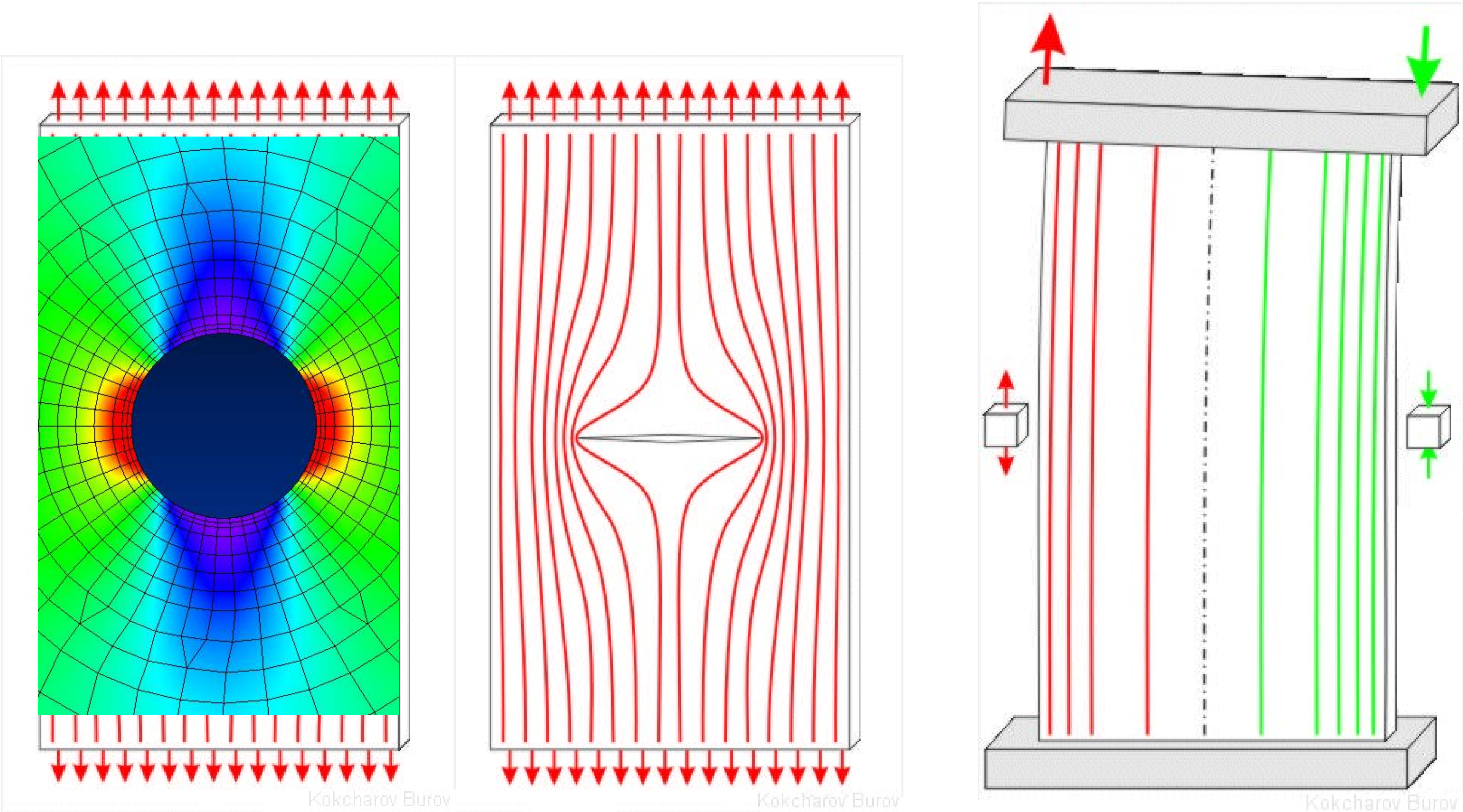
✓ Pode-se demonstrar que existem três planos principais, ortogonais entre si, e que nesses planos as tensões normais são extremas (máximas ou mínimas),

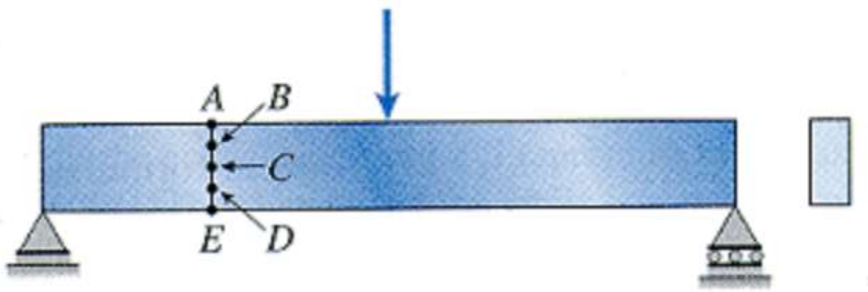
✓ Essas tensões são chamadas de Tensões Principais, e as direções normais aos planos principais são chamadas de direções principais

- *Tensor das tensões de Cauchy nas direções principais*

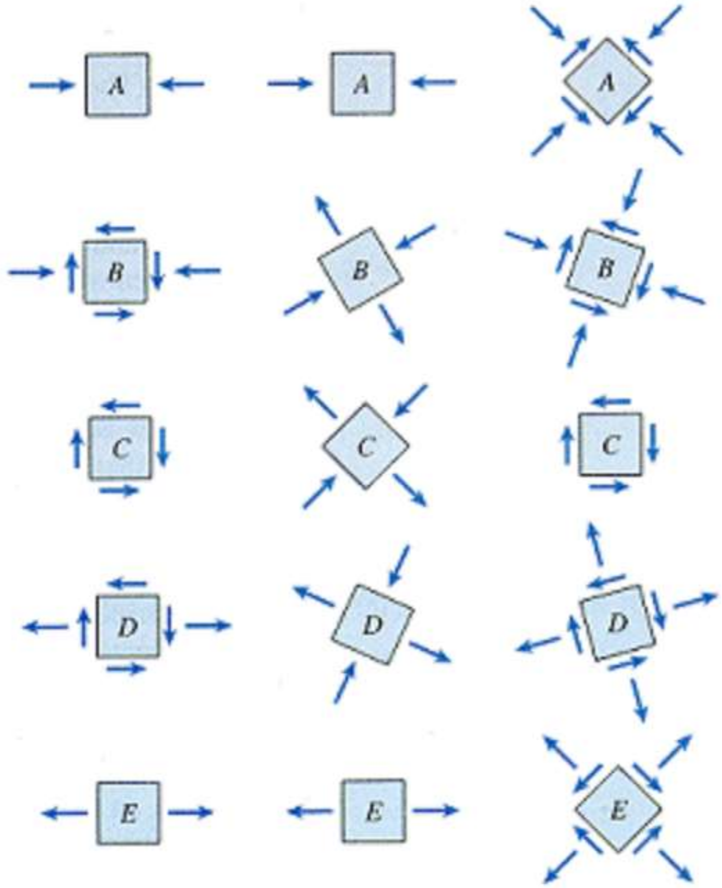
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

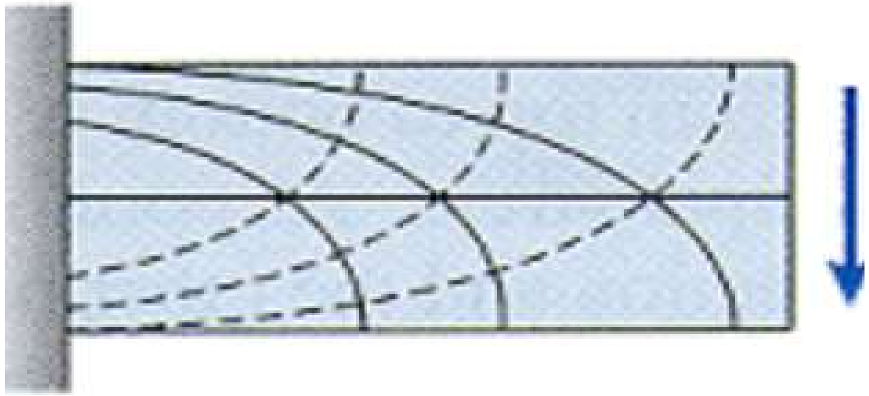
Linhas de tensão Principal
(Linhas de Força ou Linhas de fluxo de Tensões)

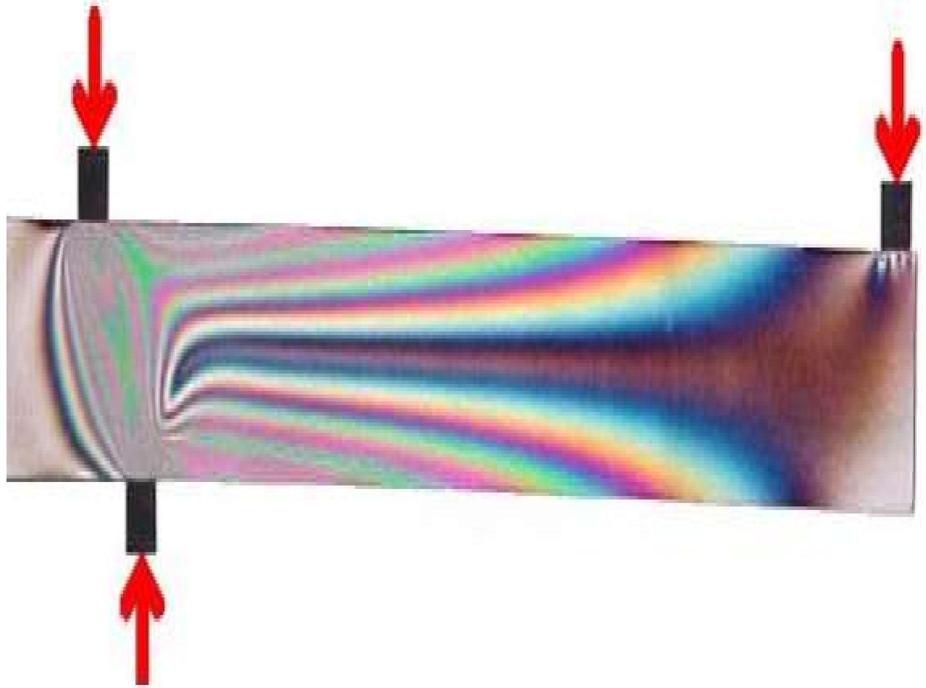


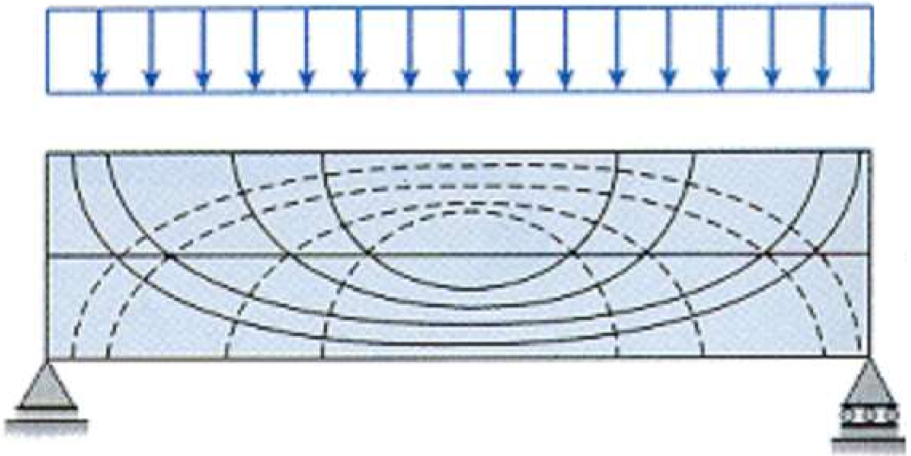


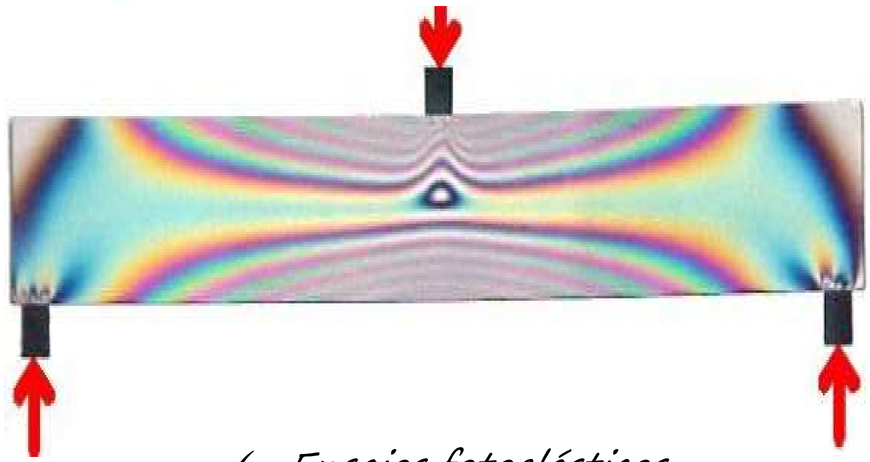
- ✓ Tensões Normais
- ✓ Tensões Principais
- ✓ Máximas Tensões de Cisalhamento







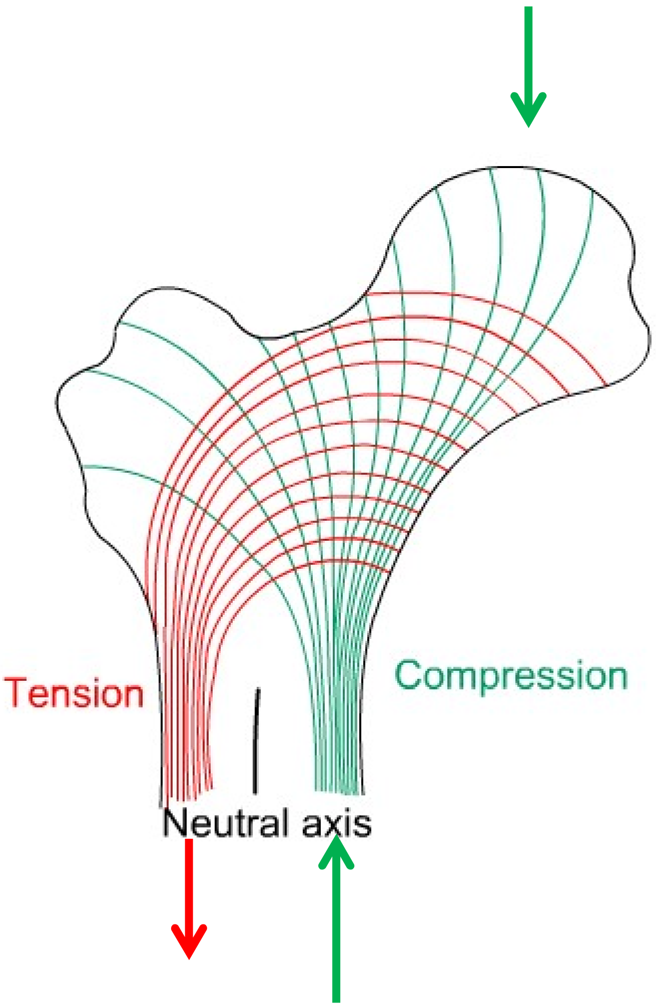


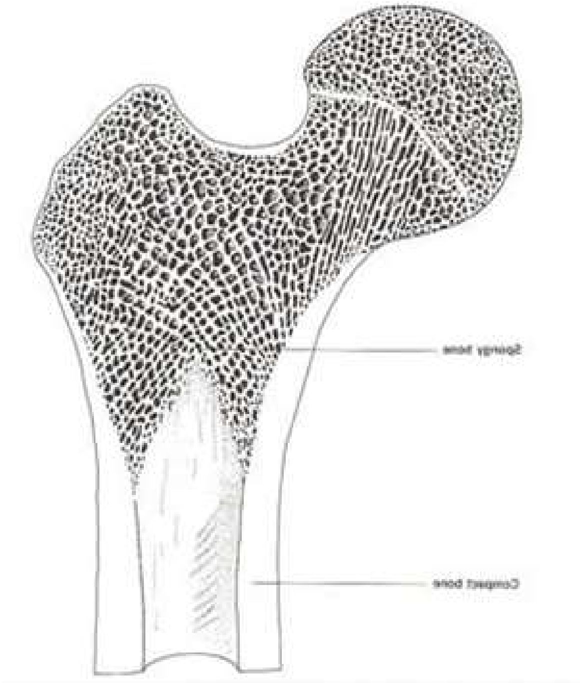


✓ Linhas de fluxo de tensões em vigas

✓ Ensaios fotoelásticos de vigas

- *Linhas de fluxo de tensões em um fêmur humano*
- *Adaptação do material ósseo*

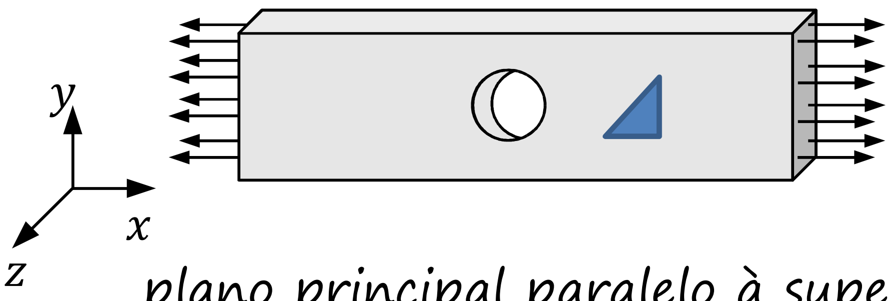




- ## *Adaptação das fibras da madeira*

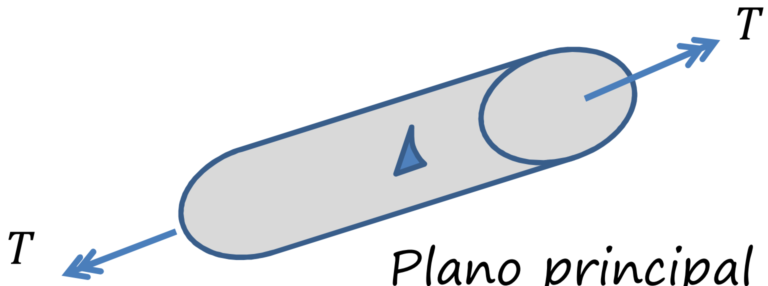
Estado Plano de Tensões

chapas finas



plano principal paralelo à superfície média

Superfícies livres



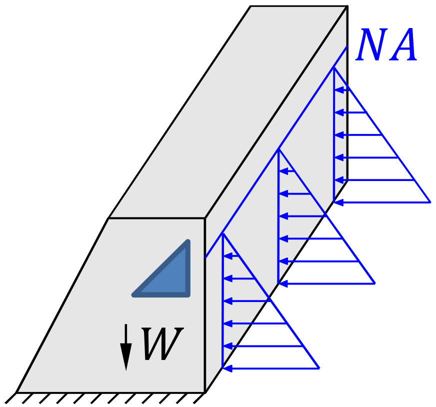
Plano principal é tangente à superfície externa, a cada ponto

Tensor das tensões de Cauchy em um

Estado Plano de Tensões

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ex.: barragens



Estado Plano de Deformação

(plano principal perpendicular ao eixo)
(pode ser tratado como um estado plano de tensões equivalente!)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

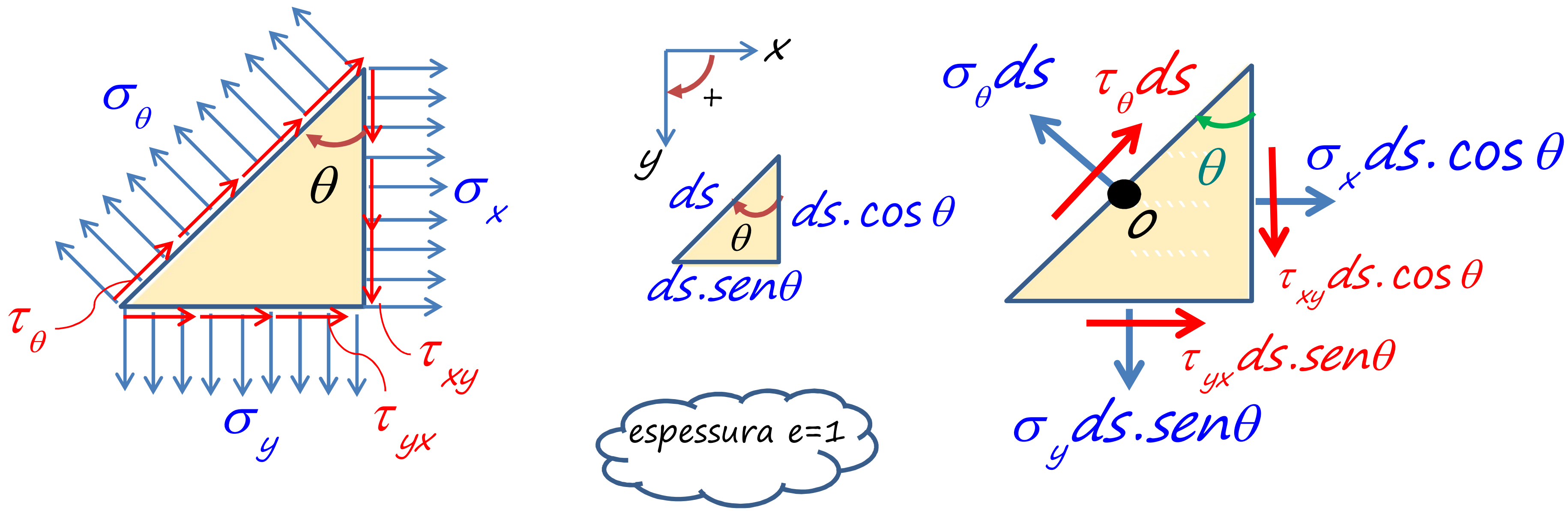
$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_x\right)$$

Estado Plano de Tensão

Tensão em seções inclinadas

- ✓ No estado duplo, o equilíbrio de um prisma triangular infinitesimal contendo o ponto P permite obter as tensões em qualquer plano ortogonal ao plano da face triangular

Diagrama de corpo livre

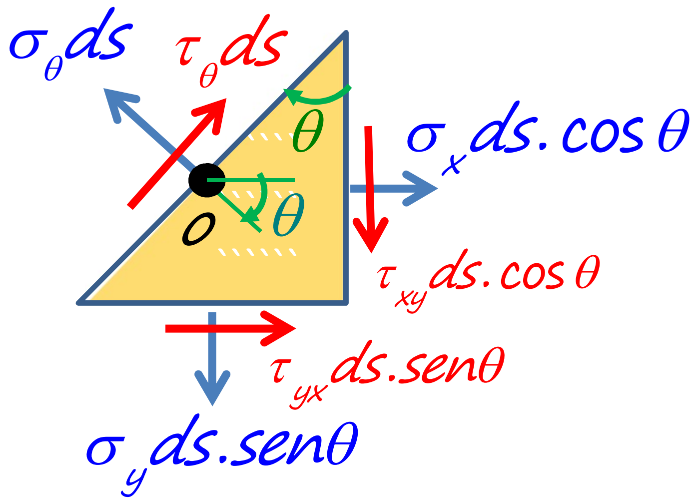


$\tau_\theta > 0 \Rightarrow$ sentido horário

Estado Duplo de Tensão

Tensão em seções inclinadas

✓ Equilíbrio do prisma elementar



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

$\therefore$ As tensões tangenciais em dois planos ortogonais são iguais em módulo e têm sentidos opostos junto à aresta comum aos planos.

$\therefore$ O mesmo vale para quaisquer outros dois planos ortogonais entre si!

$$\sum F(\sigma_\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y sen^2\theta + 2\tau_{xy} sen\theta\cos\theta}$$

$$\sum F(\tau_\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) sen\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - sen^2\theta)}$$

Estado Duplo de Tensão

Equações de transformação para tensão plana

Com o auxílio das relações trigonométricas
$$\begin{cases} 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta \\ 2\,sen^2\theta = 1 - \cos 2\theta \\ 2\,sen\theta\cos\theta = \sin 2\theta \end{cases}$$

Chega-se às expressões:

$$\begin{cases} \boxed{\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,sen 2\theta} \\ \boxed{\tau_\theta = -\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta} \end{cases}$$

Estado Duplo de Tensão

Tensões e planos principais

Nas direções θ em que as tensões normais são extremas (máximas ou mínimas):

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)sen2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

Ângulos dos planos principais em relação ao sistema de coordenadas adotado

Estado Duplo de Tensão

Além disso, nos planos onde as tensões de cisalhamento são nulas, tem-se

$$\tau_\theta = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \frac{sen2\theta}{\cos 2\theta} \Rightarrow \boxed{\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

Ou seja, os planos onde atuam as tensões normais máximas e mínimas não têm tensão de cisalhamento, logo, de fato são planos principais!

Círculo de Mohr

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta & (1') \\ \tau_\theta = -\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta & (2) \end{cases}$$

$(1')^2 + (2)^2$:

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta\right)^2 + \left(-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + 2\,\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\tau_{xy}\cos 2\theta + \tau_{xy}{}^2 sen^2 2\theta\, sen2\theta$$

$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 sen^2 2\theta - 2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\tau_{xy} sen2\theta\cos 2\theta + \tau^2_{xy}\cos^2 2\theta$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2\right]\left(\cos^2 2\theta + sen^2 2\theta\right) +$$

$$+ \left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy} - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy}\right] sen2\theta\cos 2\theta$$

$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

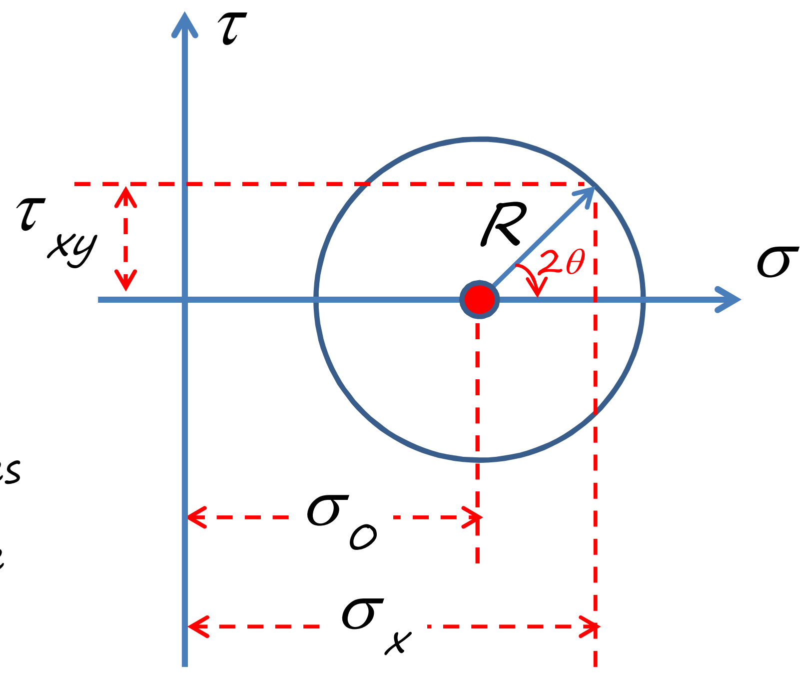
$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^{\,2} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_O &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ R &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \boxed{(\sigma_\theta - \sigma_O)^2 + \tau_\theta^{\,2} = R^2}$$

Comparando com a equação geral das circunferências:

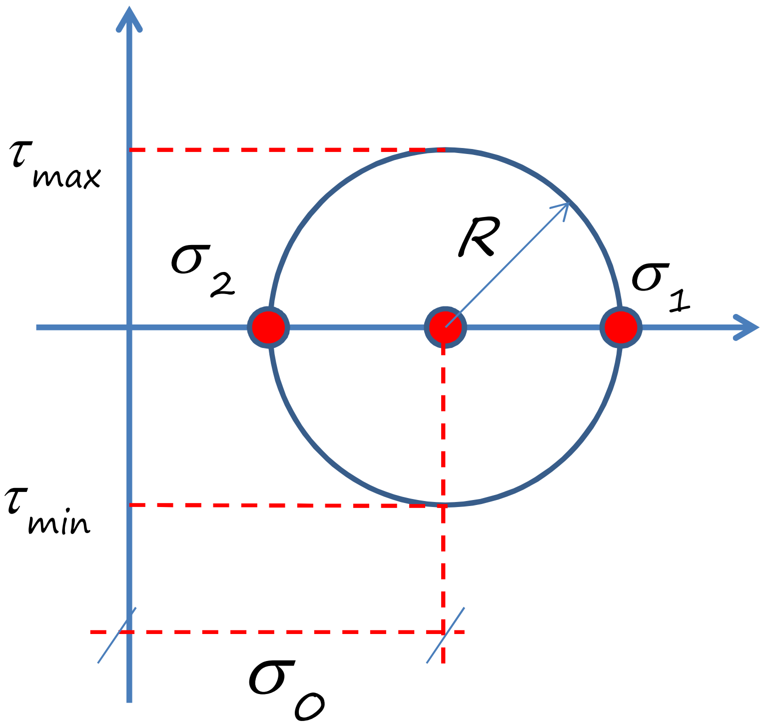
$$\boxed{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2}$$

Verifica-se que a equação de transformações de tensão pode ser representada por uma circunferência no plano (σ x τ), de raio R e centro no ponto (σ_O,O),



$\therefore$ **'Círculo de Mohr'**

✓ Tensões principais



$$\text{centro:}(\sigma_o, \tau_o) \equiv \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ , } 0 \right)$$

$$\text{raio: } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}}$$

✓ Tensão normal máxima

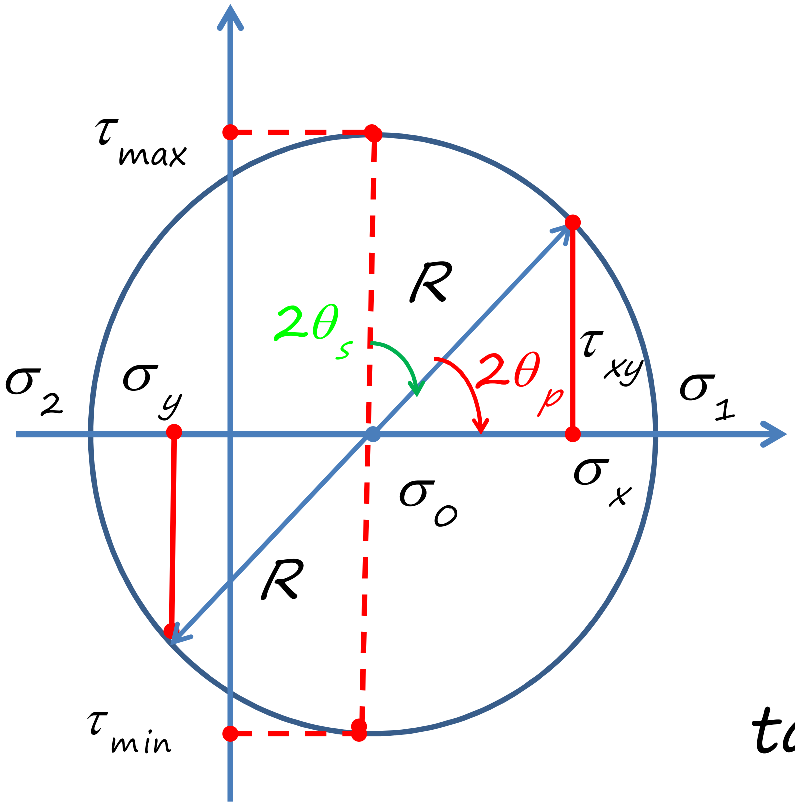
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}}$$

✓ Tensão normal mínima

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}}$$

✓ Tensões de cisalhamento máxima e mínima

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^{\;2}}$$



$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$sen 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Planos de tensões de cisalhamento máximas positiva e negativa

Estado Duplo de Tensão

Tensões de cisalhamento máximas

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

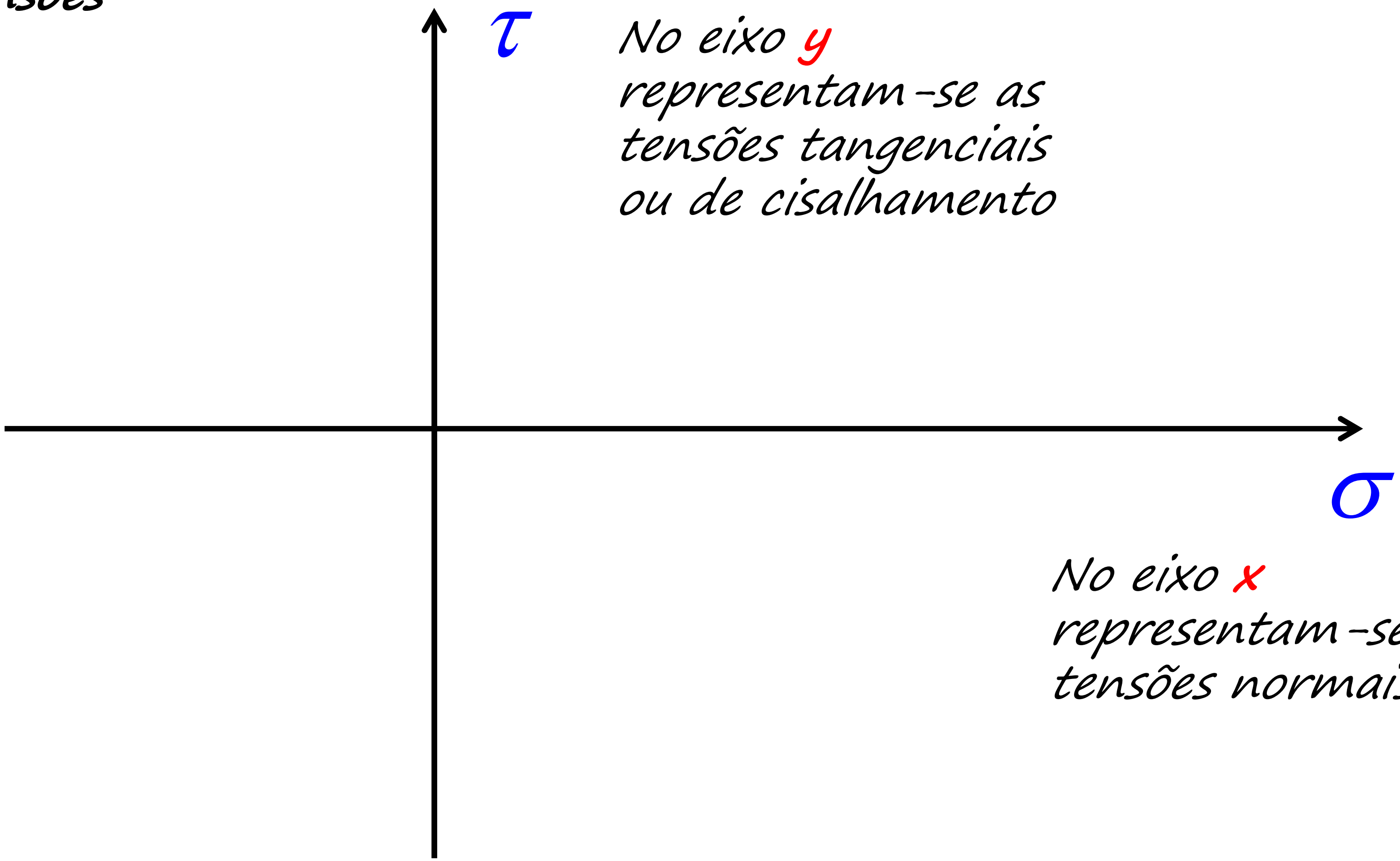
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Os planos de tensão de cisalhamento máxima também contêm tensões normais!

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Círculo de Mohr

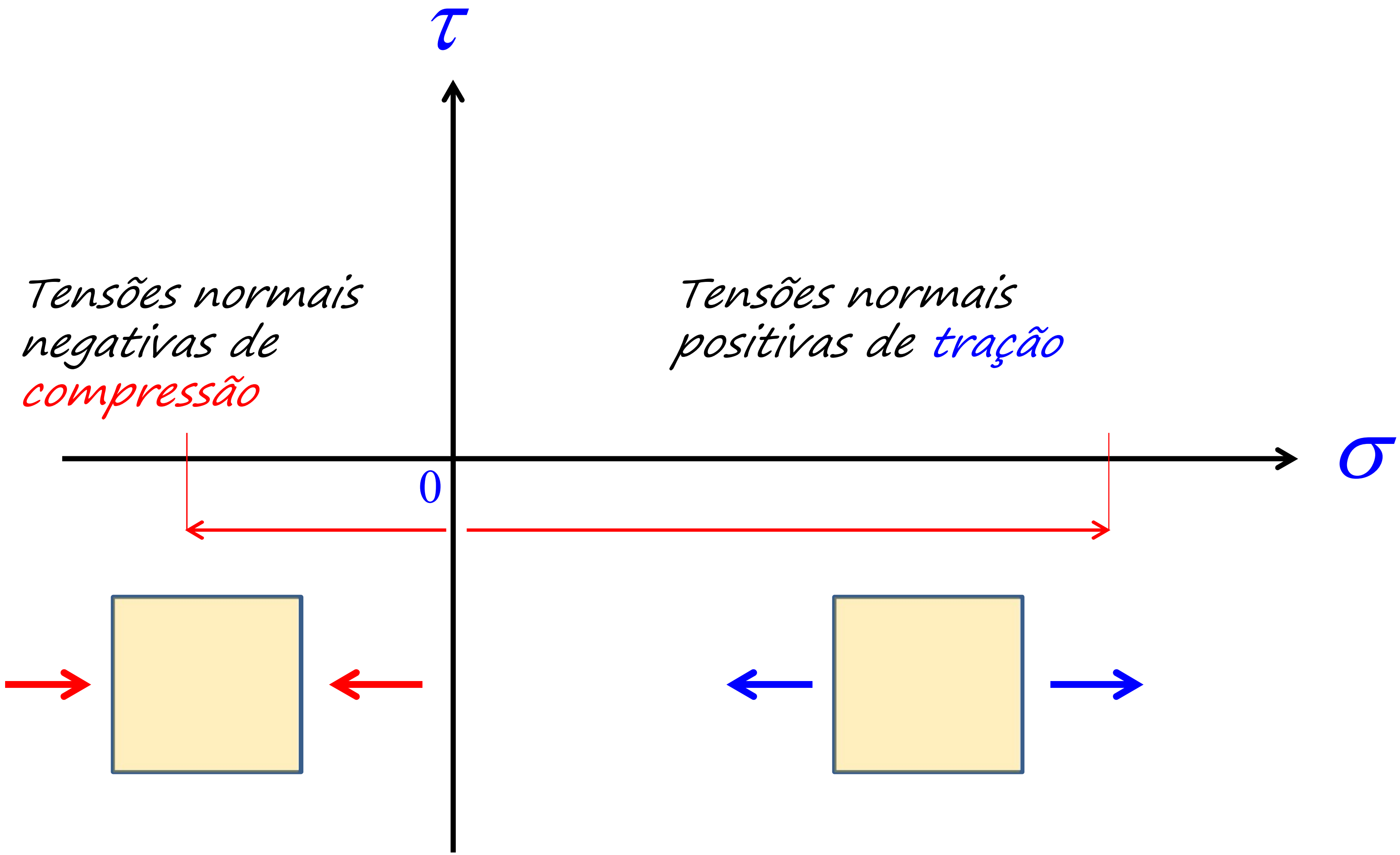
Representação gráfica bidimensional da lei de transformação de tensões



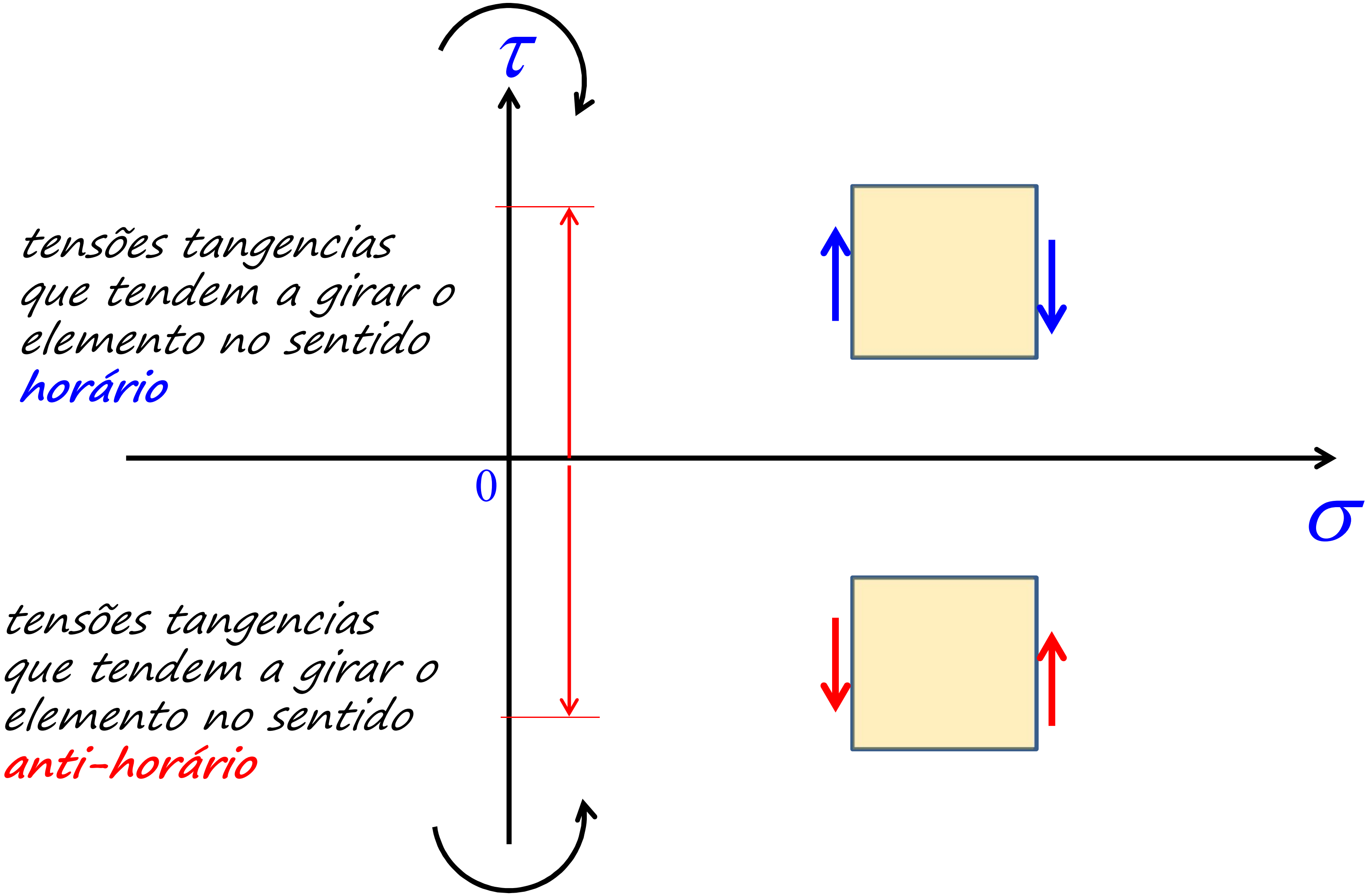
No eixo *y* representam-se as tensões tangenciais ou de cisalhamento

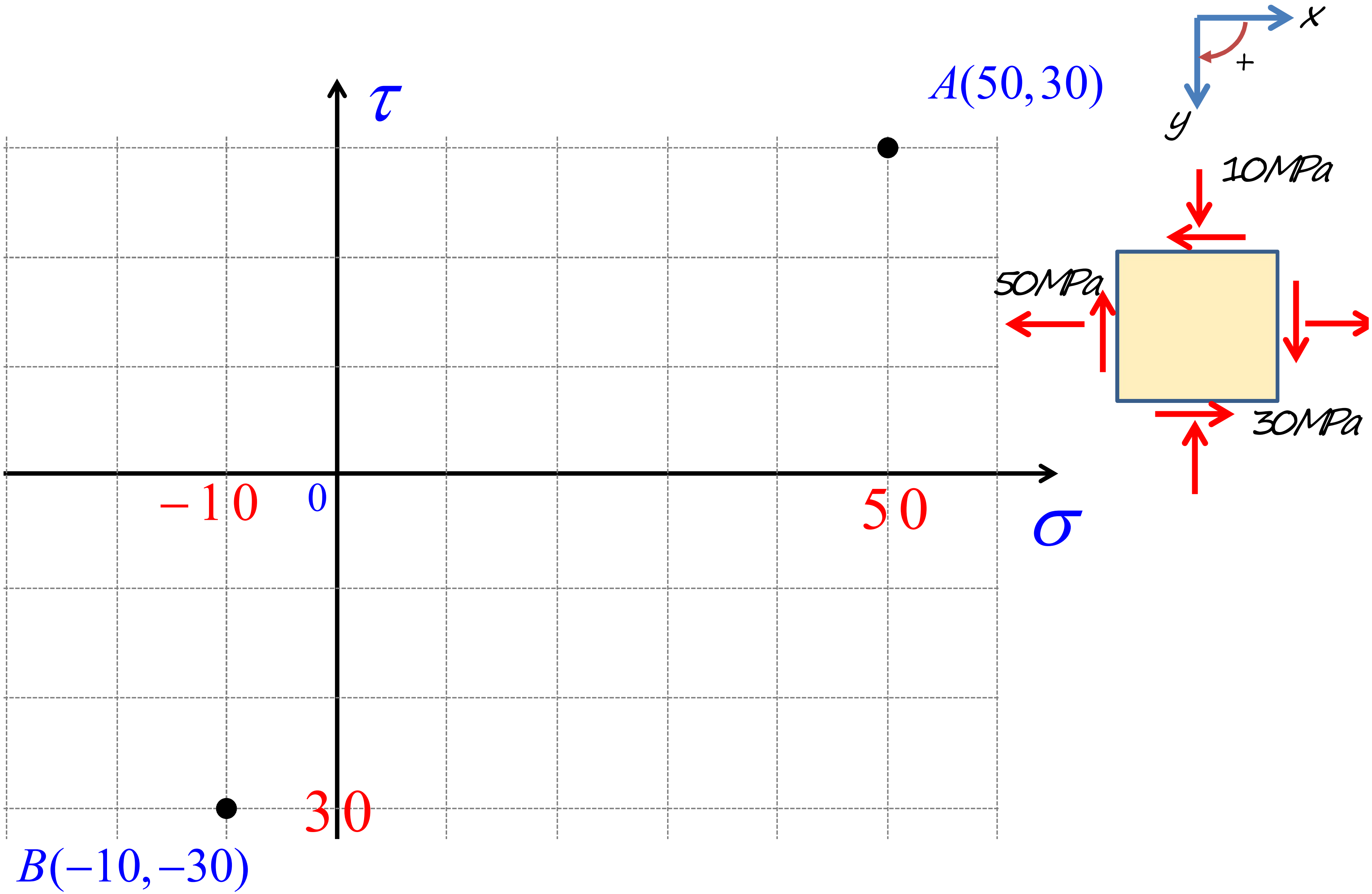
No eixo *x* representam-se as tensões normais

Círculo de Mohr



Círculo de Mohr

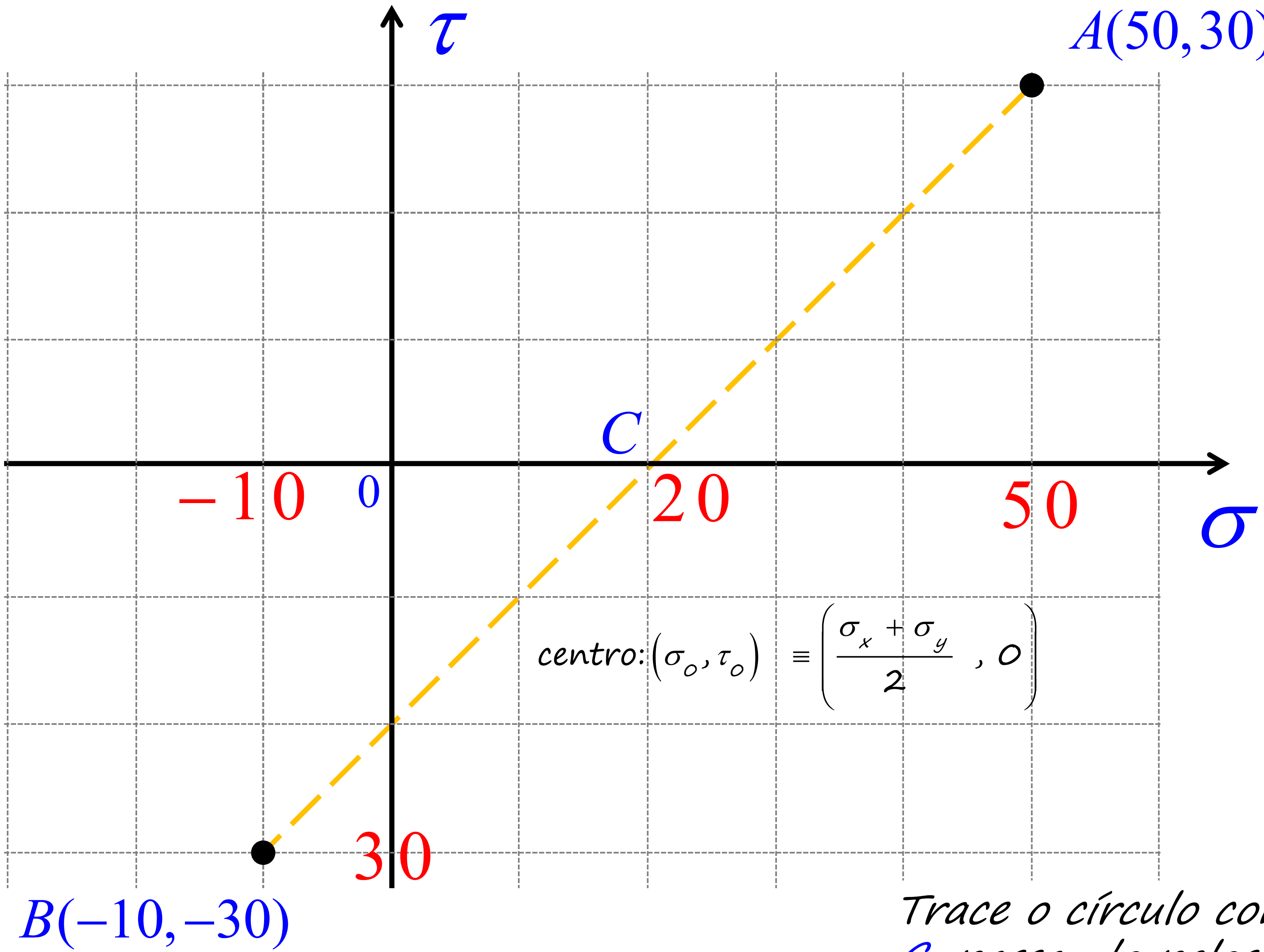




τ
A(50, 30)
x
y
+
10MPa
50MPa
30MPa
−10
0
50
σ
30
B(−10, −30)

Círculo de Mohr

Unindo-se os pontos A e B obtém-se o centro do círculo

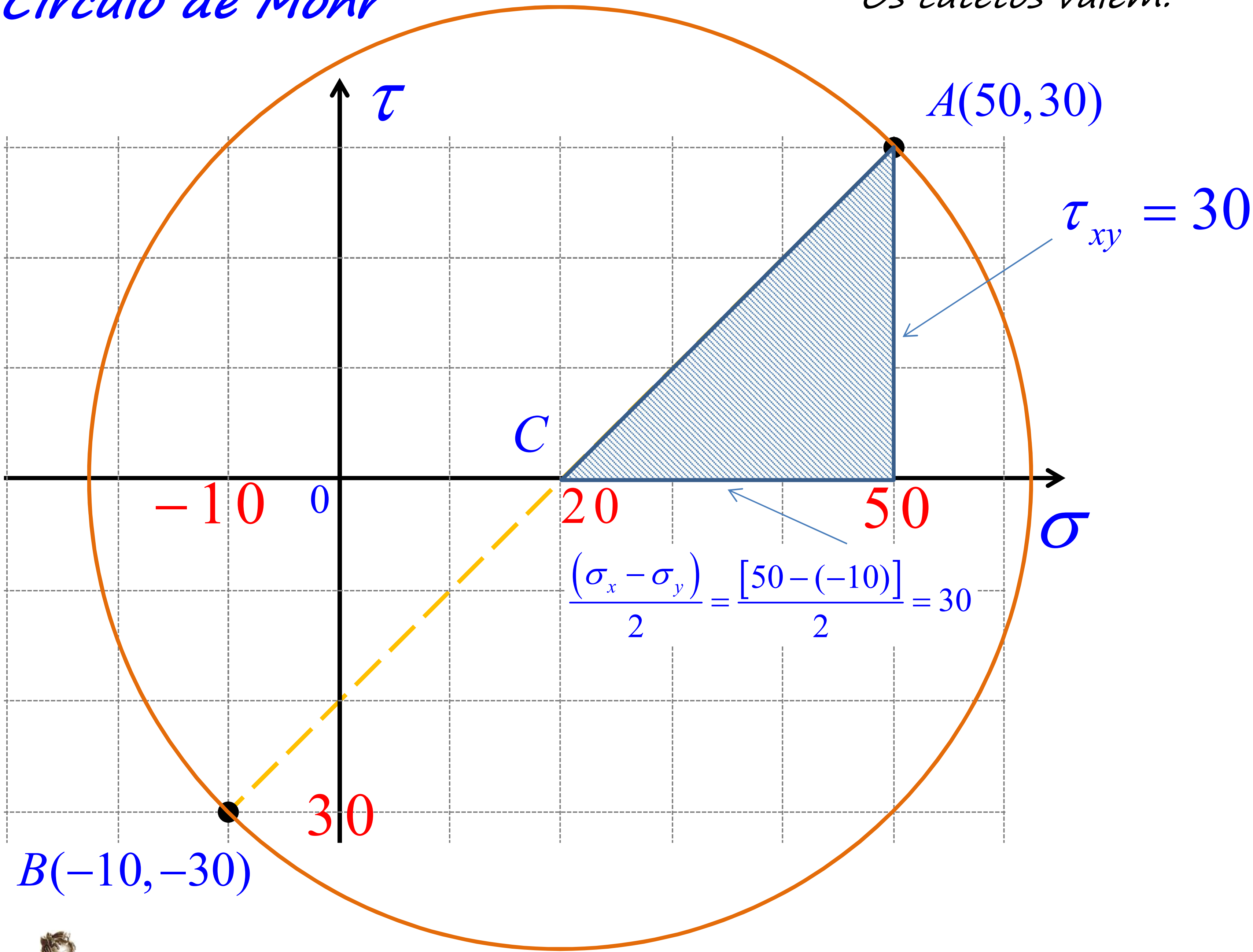


$$\text{centro:}\left(\sigma_o,\tau_o\right) \equiv \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$$

Trace o círculo com o centro em C, passando pelos pontos A e B

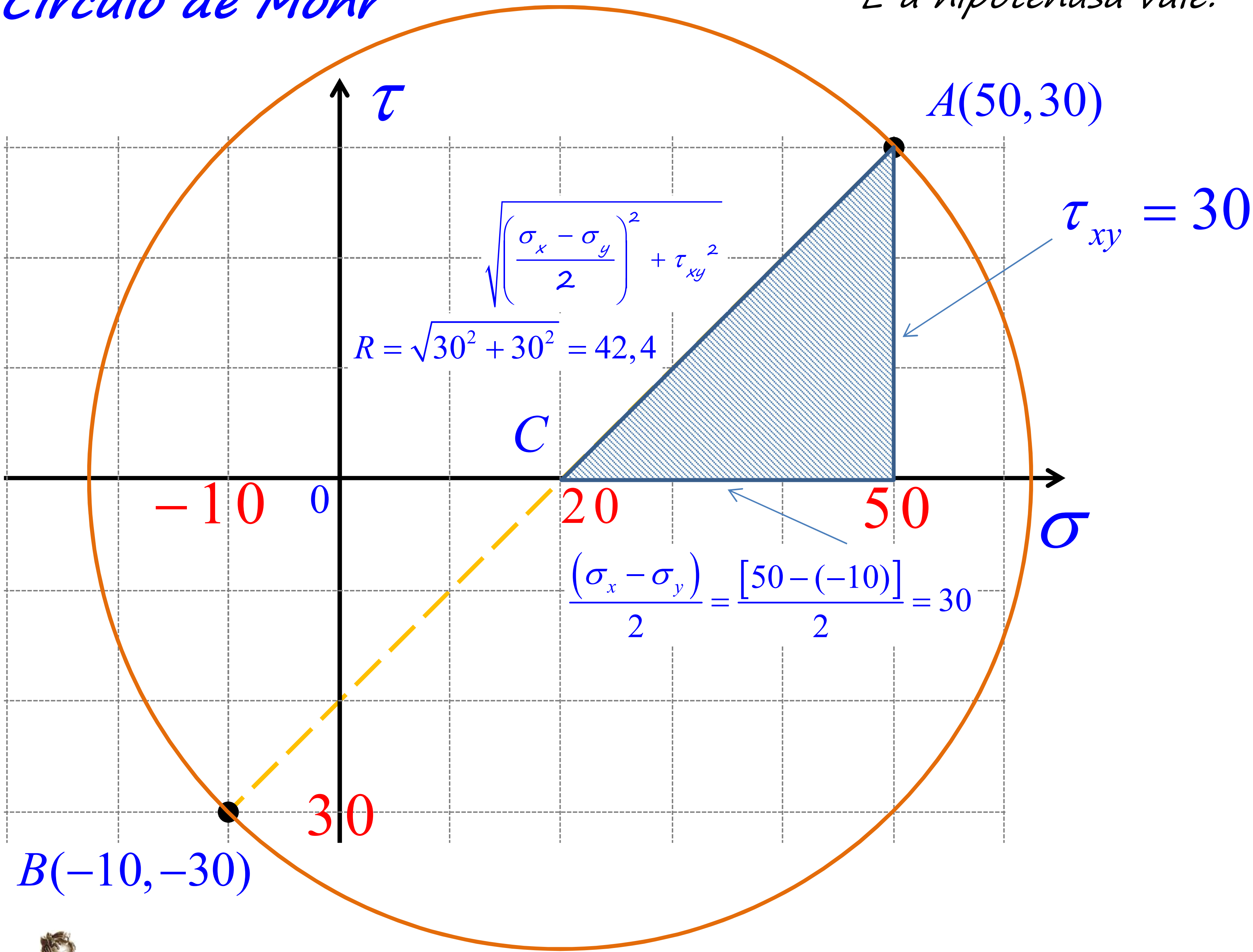
Círculo de Mohr

Os catetos valem:



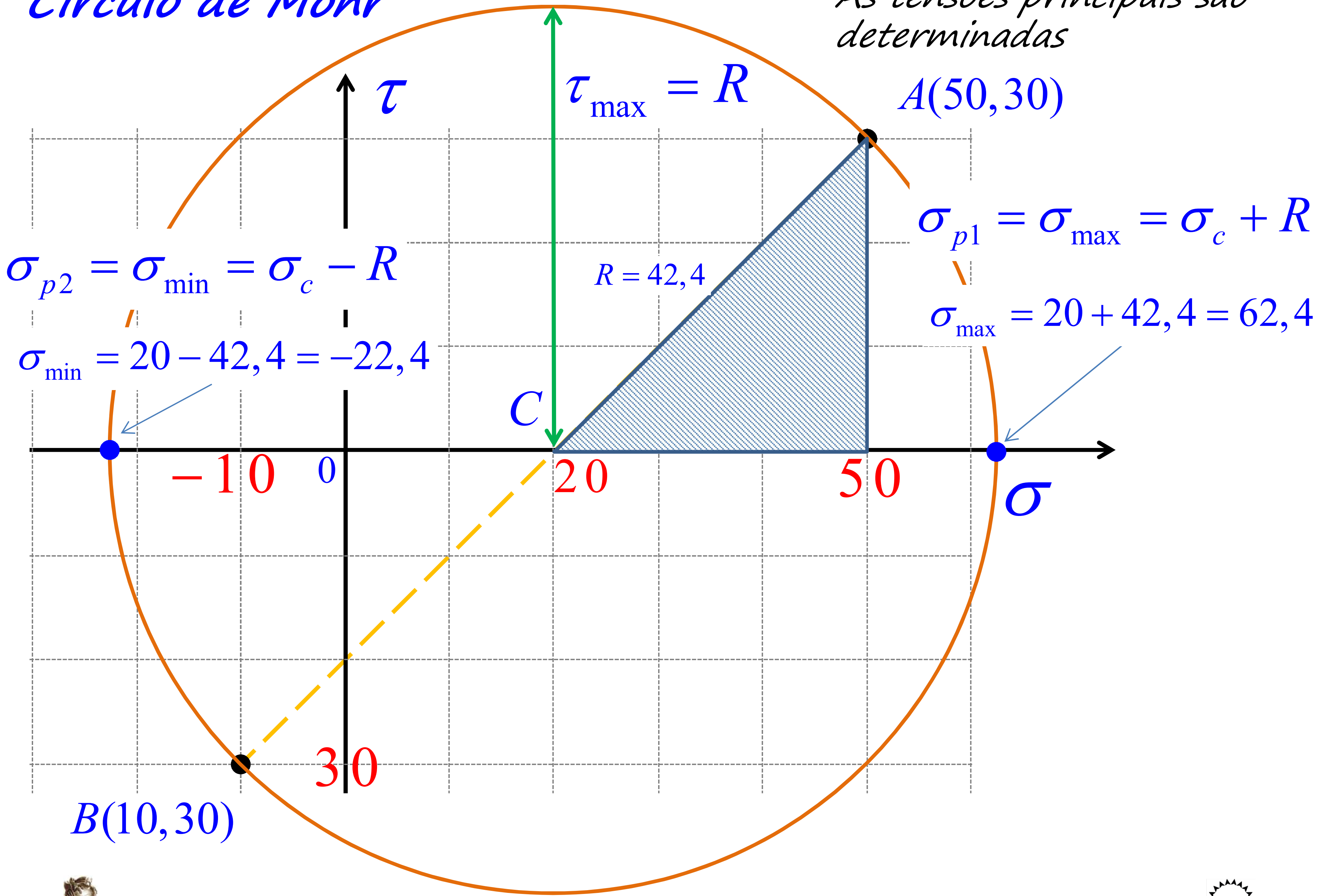
Círculo de Mohr

E a hipotenusa vale:



Círculo de Mohr

As tensões principais são determinadas



Resumindo:

As tensões principais ficam assim definidas

$$\sigma_{p1} = \sigma_{\max} = \sigma_c + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{p2} = \sigma_{\min} = \sigma_c - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Estado Duplo de Tensão

Propriedades do estado duplo de tensão

- ✓ As tensões de cisalhamento são nulas nos planos onde atuam as tensões principais: σ_{max} e σ_{min}

- ✓ Os planos principais são ortogonais entre si;

- ✓ A soma das tensões normais em 2 planos ortogonais entre si quaisquer é constante: $\sigma_{(\theta)} + \sigma_{(\theta + \frac{\pi}{2})} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$

- ✓ As tensões de cisalhamento extremas valem:

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

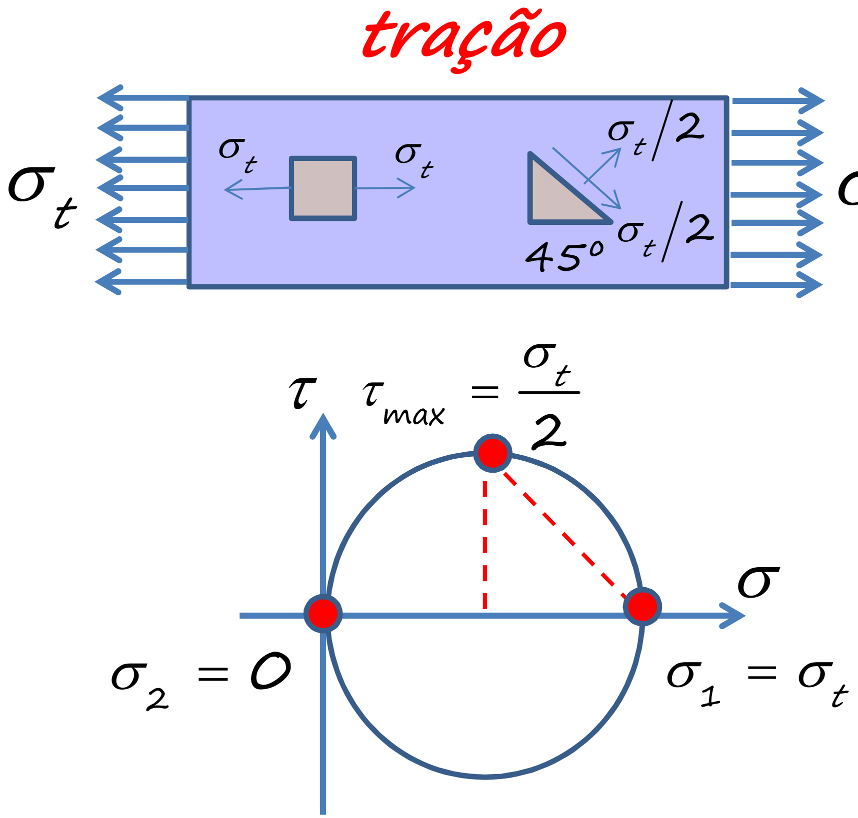
- ✓ As tensões normais nos planos de τ_{max} e τ_{min} valem:

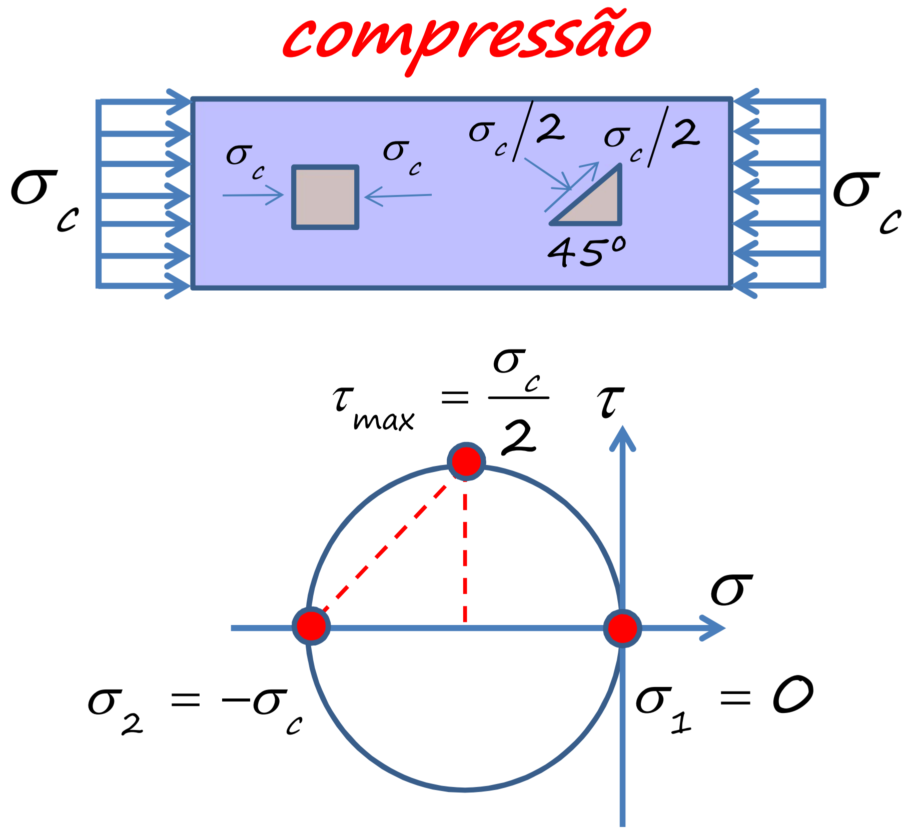
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Estado Duplo de Tensão

Estados de tensão especiais

✓ Estado simples de tensão



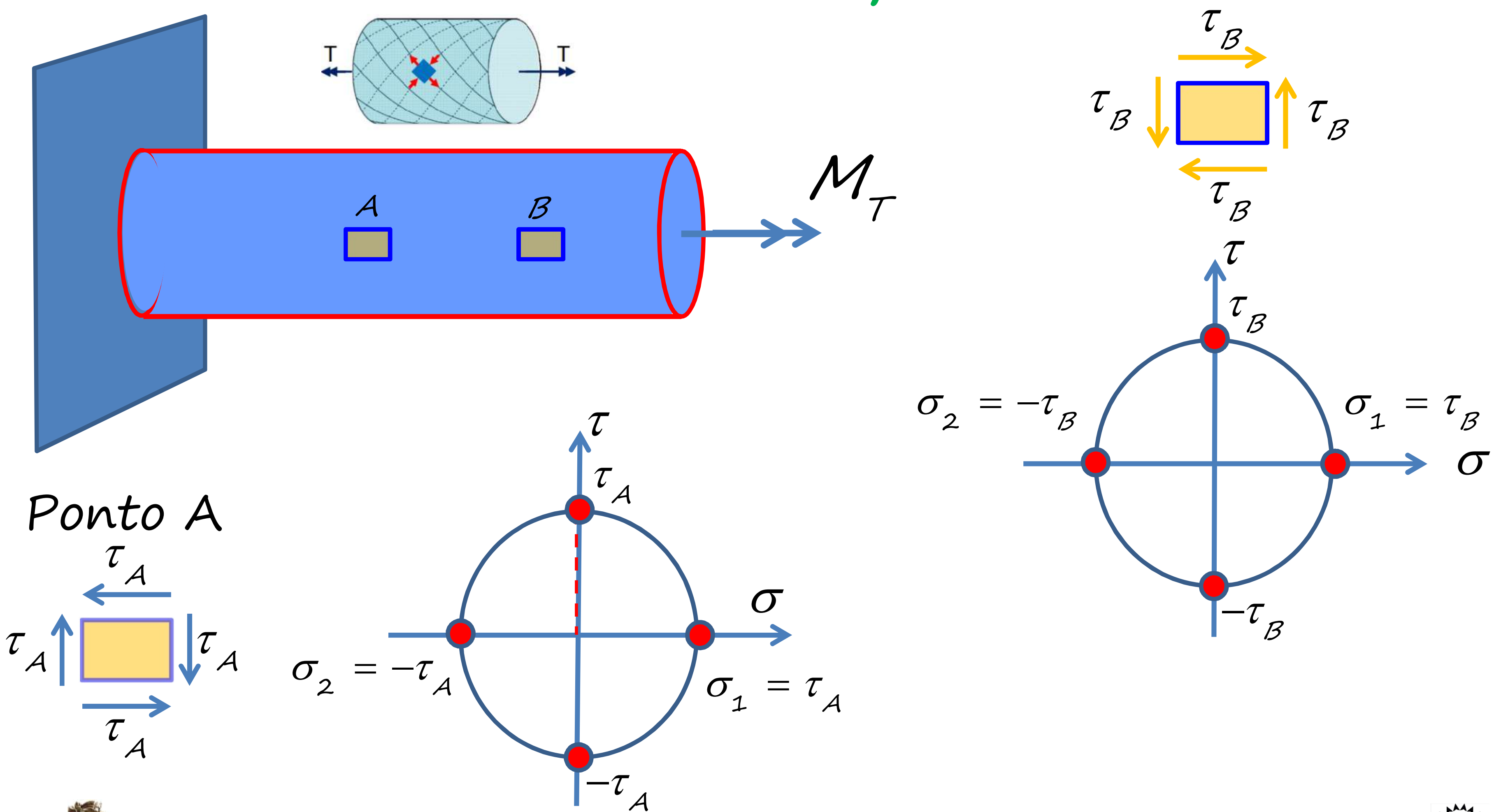


Estado Duplo de Tensão

Estados de tensão especiais

✓ Estado de cisalhamento simples

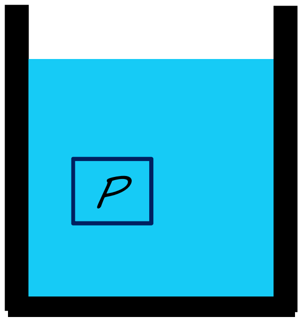
Ponto B

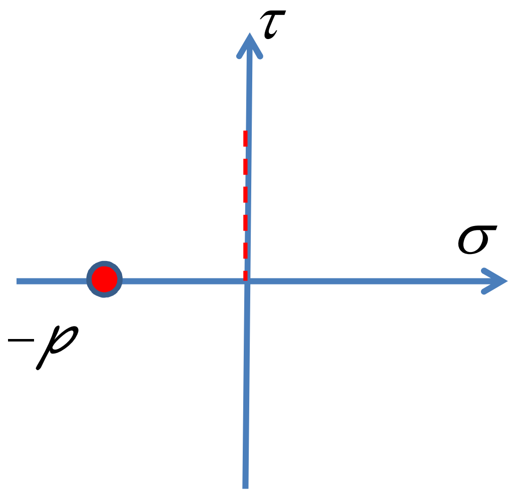


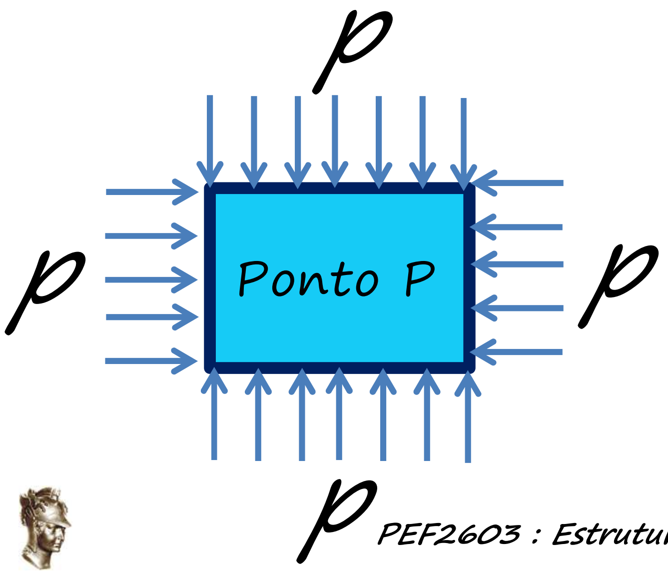
Estado Duplo de Tensão

Estados de tensão especiais

✓ Estado hidrostático de tensão







$$\sigma_1 = \sigma_2 = -p$$

$$\tau_{max} = \tau_{min} = 0$$