1a Lista de Exercícios — Eletromagnetismo II

• **Ex. 1** — Considere a transformação de calibre (*gauge*) $A_\mu \to A_\mu + \partial\lambda/\partial x^\mu$, onde λ é uma função (escalar) qualquer das coordenadas. Expressando os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, mostre que esses campos são invariantes sob transformações de calibre.

• **Ex. 2** — Novamente, comece expressando os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Considere uma transformação de coordenadas na qual os dois referenciais S e S' estão em repouso um com relação ao outro (portanto, $v = 0$), mas S' sofreu uma rotação com relação a S.

(a) Mostre que, nesse caso, a transformação de Lorentz se reduz a:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R^{i}{}_{j} \end{pmatrix} ,$$

onde $R^{i}{}_{j}$ é uma rotação genérica em três dimensões espaciais.

(b) Mostre que, sob essa transformação de coordenadas, os campos elétrico e magnético se transformam exatamente como se fossem vetores tridimensionais, mas que não há mistura entre os dois.

• **Ex. 3** — Em sala de aula estudamos o problema de um fio infinito orientado na direção z, com densidade linear de carga λ. No referencial de repouso com relação a esse fio, temos apenas um campo elétrico, dado por:

$$\vec{E} = \lambda \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R} ,$$

onde $\vec{R} = \vec{x} + \vec{y}$. Em sala de aula deduzimos as expressões para os campos elétrico e magnético que são observados num referencial que se move na direção z com velocidade v, e encontramos que:

$$\vec{E}\,' = \gamma\,\lambda\,\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\hat{R}}{R} ,$$

$$\vec{B}\,' = -\gamma\,\lambda\,v\,\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{\hat{\varphi}}{R} ,$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(a) Demonstre que os campos no referencial S' podem ser obtidos diretamente pela transformação de Lorentz do tensor eletromagnético, $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}$, onde Λ denota a transformação de coordenadas do sistema S para o sistema S'.

(b) Agora, considere que, assim como $ds^2 = dX_\mu dX^\mu$ é um invariante de Lorentz, e de fato qualquer norma de 4-vetor é um invariante (e.g., $|V|^2 = V_\mu V^\mu$), temos que o objeto $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ também é um invariante. Use esse fato, junto com a noção de contração do espaço em Relatividade Restrita, para deduzir de modo ainda mais direto uma expressão para o campo magnético sem ter de resolver as Equações de Maxwell.

• **Ex. 4** — Em sala de aula eu escrevi uma fórmula que permite transformar diretamente os campos elétrico e magnético entre um referencial S e um referencial S' que se move com velocidade $\vec{v}$ com respeito a S:

$$\frac{\vec{E}'}{c} = \gamma \left[\frac{\vec{E}}{c} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(\frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{v})\, \vec{v}}{v^2} \right]$$

$$\vec{B}' = \gamma \left[\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(\vec{B} \cdot \vec{v})\, \vec{v}}{v^2} \right]$$

(a) Suponha que no referencial S' os campos elétrico e magnético são paralelos. Encontre a velocidade entre os dois referenciais em termos desses campos.

(b) Agora suponha que num referencial S os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares. Ainda é possível encontrar um sistema S' no qual eles se tornam paralelos? Você consegue pensar num argumento que explique a sua resposta?

• **Ex. 5** — Um dipolo magnético $\vec{m}$, em repouso, tem um potencial-vetor $A_\mu = \left(0, \vec{d}_m \times \vec{r}/r^3\right)$, onde $\vec{d}_m = \mu_0\, \vec{m}/4\pi$. Mostre que se esse dipolo se move com velocidade $v \ll c$, então existirá também um momento de dipolo *elétrico* associado, tal que $\vec{d}_e = \vec{v} \times \vec{d}_m$. O que ocorre se a velocidade v não for pequena comparada à velocidade da luz?

• **Ex. 6**

a) Obtenha a expressão da Força de Lorentz a partir da 2^a Lei de Newton para o caso de um campo elétrico agindo sobre uma partícula no referencial S' para o qual a partícula está instantaneamente em repouso, $\vec{F}' = m\vec{a}' = q\vec{E}'$.

b) Expresse a Força de Lorentz F_μ de modo covariante, em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e da 4-velocidade $U^\mu = dY^\mu/d\tau$, onde Y^μ denota a trajetória da partícula e $d\tau^2 = -ds^2$.

• **Ex. 7**

a) Determine o movimento de uma partícula carregada num campo elétrico uniforme, no caso em que a velocidade inicial da partícula é perpendicular ao campo. Mostre que, no limite $c \to \infty$, o movimento se reduz a uma parábola.

b) Determine o movimento de uma partícula num campo eletromagnético uniforme, no caso em que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são paralelos.

c) Idem, quando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são iguais em módulo, mas perpendiculares.