

# **AQUISIÇÃO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA: RELAÇÕES ENTRE LINGUAGEM E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

Zaqueu  
Vieira  
Oliveira

*Os matemáticos são uma espécie de franceses.  
Sempre que lhes dizemos algo, eles traduzem para a  
sua própria língua e imediatamente convertem em  
algo completamente diferente.*

Johann Wolfgang von Goethe

MEDO DA ABSTRAÇÃO

## A Matemática e o Brasil: por que essa equação não fecha?

Muitos brasileiros resolvem problemas matemáticos com macetes e fórmulas decoradas, sem entender o que estão fazendo

MENU ASSINE

FOLHA DE S.PAULO



ENTRAR BUSCAR

educação &gt; enem fvest fvest ruf base nacional curricular cotidiano

## Matemática agrava abismo entre escolas públicas e privadas no Enem

Rede estadual têm desempenho pior em todas as áreas; em exatas, distância é maior



JORNAL NACIONAL



## Pesquisa mostra que três em cada dez brasileiros não sabem ler

Os chamados analfabetos funcionais não aprenderam o suficiente para entender um texto ou fazer uma simples conta matemática no dia a dia.

Saber matemática – necessidade cada vez mais presente na sociedade

A escolaridade obrigatória não tem sido eficaz para que os estudantes atinjam o mínimo de conhecimento matemático requerido

*O paradoxo parece estabelecido: a matemática, um dos conhecimentos mais valorizados e necessários nas sociedades modernas altamente “tecnologizadas” é, ao mesmo tempo, dos mais inacessíveis para a maioria da população, confirmando-se assim como um importante filtro seletivo do sistema educacional (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 258).*

A matemática é uma  
matéria difícil de ensinar  
e de aprender.

A matemática é difícil  
e chata.

Matemática não dá  
para mim!!!

Eu sou das letras, não  
entendo de números

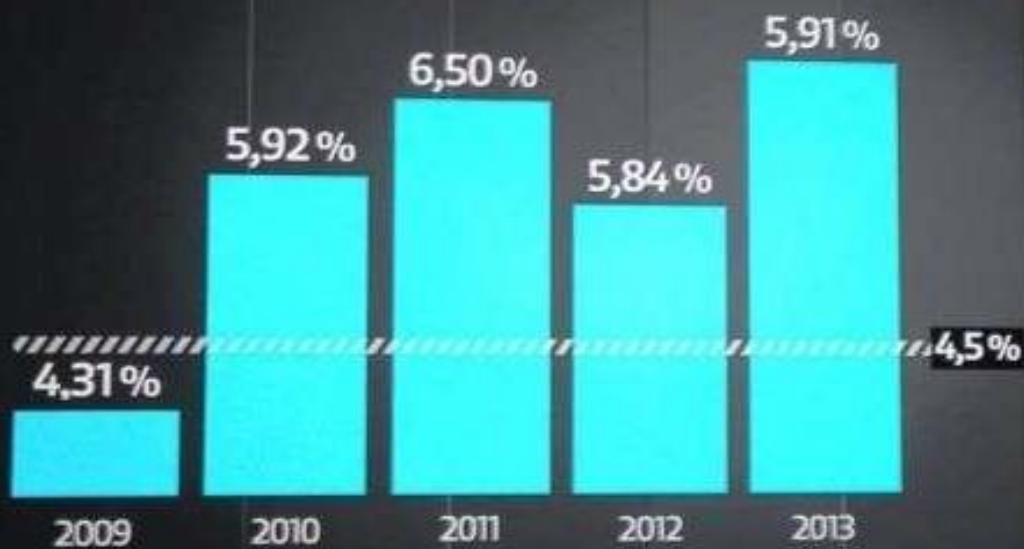
*[John Allen] Paulos conta uma história engraçada: quando assistia as notícias na televisão com um grupo de pessoas consideradas "instruídas", o serviço meteorológico informou que a possibilidade de chover no sábado era de cinquenta por cento e que no domingo era também de cinquenta por cento e que, portanto,, a probabilidade de chuva no fim de semana era de cem por cento. O que mais surpreendeu Paulos não foi tanto a falta de cultura matemática do serviço meteorológico, mas o fato de nenhum dos ouvintes reagir à informação oferecida (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 258).*

NEWS

# INFLAÇÃO DO BRASIL

IPCA

fonte: IBGE



“Gráfico” da  
GloboNews para a  
inflação de 2013

Fonte: GGN

21:13

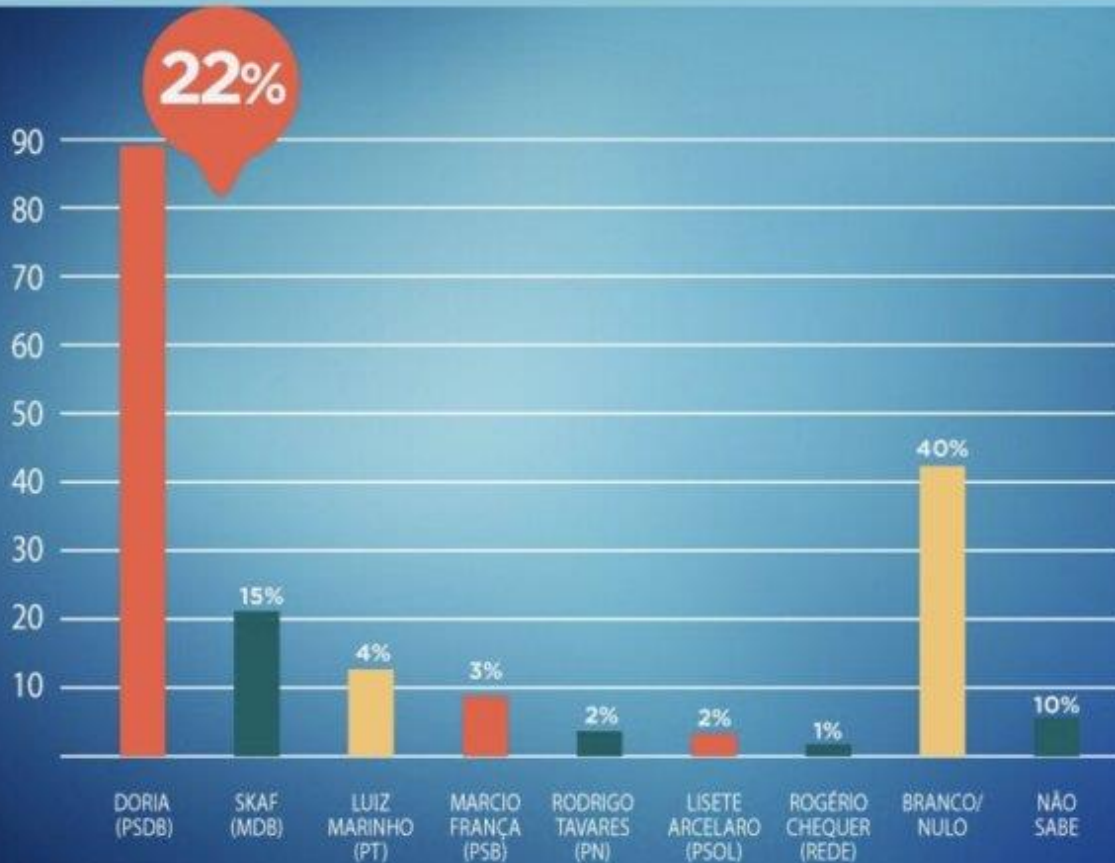




# DORIA

## LIDERA PESQUISA

APONTA IBOPE



FONTE: UOL MAIO'2018

***“Interpretação” do PSDB para dados da pesquisa IBOPE para pré-candidatura ao governo de São Paulo***

Fonte: Folha de S. Paulo



*Se todos tiverem acesso à cultura matemática, sabendo elaborar perguntas e hipóteses como fazem os profissionais da área, será mais fácil que exijam explicações e discutam se determinada justificativa é verdadeira ou falsa.*

*[...]*

*Defendo que o fundamental é entrar na cultura matemática, ou seja, a linguagem e o jeito de fazer a disciplina. Isso deve ser feito à moda dos matemáticos, que utilizam essa ciência para expressar uma forma de pensar - e não apenas uma recitação, como ocorre na escola, por meio da repetição de conteúdos que os alunos não entendem.*

*Guy Brousseau*

# A NATUREZA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

**Indução**: “raciocínio que parte de dados particulares (fatos, experiências, enunciados empíricos) e, por meio de uma sequência de operações cognitivas, chega a leis ou conceitos mais gerais, indo dos efeitos à causa, das consequências ao princípio, da experiência à teoria”;

**Dedução**: “processo de raciocínio através do qual é possível, partindo de uma ou mais premissas aceitas como verdadeiras (p.ex.,  $A$  é igual a  $B$  e  $B$  é igual a  $C$ ), a obtenção de uma conclusão necessária e evidente (no ex. anterior,  $A$  é igual a  $C$ )”.

Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa

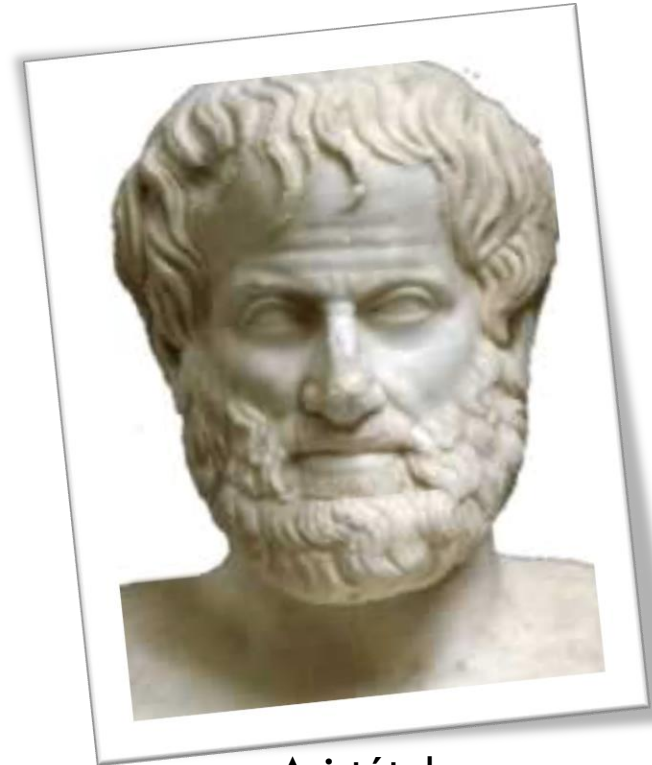
# OS SILOGISMOS E A MATEMÁTICA

O silogismo é um “raciocínio dedutivo estruturado formalmente a partir de duas proposições (premissas), das quais se obtém por inferência uma terceira (conclusão)” (HOUAISS, 2009).

Todos os homens são mortais  
premissa maior – todo

Os gregos são homens  
premissa menor – parte

Logo, os gregos são mortais  
conclusão



Aristóteles

# MATEMÁTICA: LINGUAGEM FORMALIZADA

Abstração: Busca do essencial e fundamental de um conceito, sem conexão com objetos do mundo real

Generalização: Busca de formas de expressão que se descolam de exemplos ou casos específicos

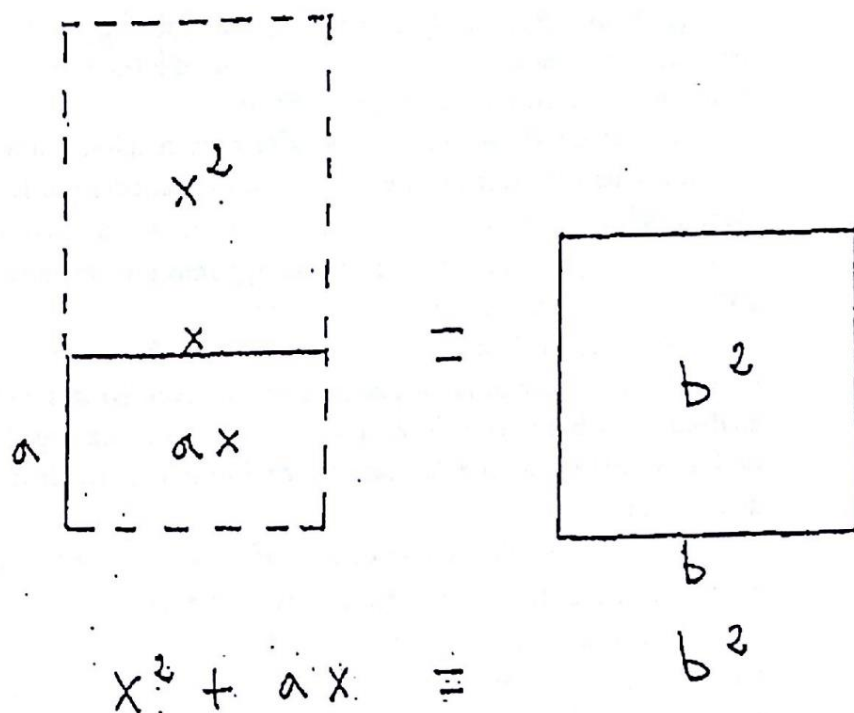
Concreto *versus* abstrato

- Exemplos do cotidiano > formalização
- Conceito formalizado > aplicação

Linguagem “natural” versus linguagem formal

- Linguagem “natural”: uso de termos vagos e imprecisos
- Linguagem formal: alto grau de rigor

# A MATEMÁTICA GREGA ANTIGA E A ATUAL



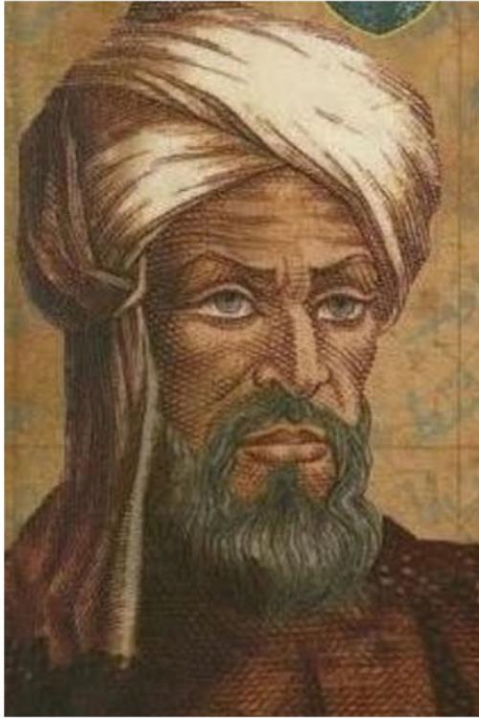
Encontrar um segmento tal que, se ao quadrado construído sobre ele se somar um retângulo construído sobre o mesmo segmento, e sobre um segmento dado  $a$ , obtemos um retângulo de área igual à de um quadrado dado

Resolver a equação  $x^2 + ax = b^2$ , onde  $a$  é um segmento dado e  $b$  é o lado de um quadrado

# A ÁLGEBRA

Álgebra: “parte da matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números e simplificando e resolvendo, por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos

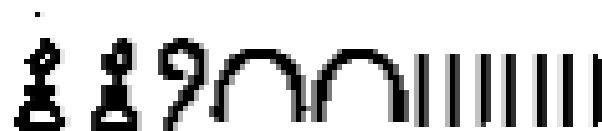
Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa



Al-Khwarizmi

“O termo “álgebra” tem origem em um dos livros árabes mais importantes da Idade Média: *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi. A palavra *al-jabr*, ou “álgebra”, em árabe, era utilizada para designar “restauração”, uma das operações usadas na resolução de equações. Já a *al-muqabala* queria dizer algo como “balanceamento”. Trata-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações” (ROQUE, 2012, p. 249).

|   |                |         |
|---|----------------|---------|
|   | bastão         | 1       |
| ∪ | calcanhar      | 10      |
| ∩ | rolo de corda  | 100     |
| ⊖ | flor de lótus  | 1000    |
| ☞ | dedo apontando | 10000   |
| 🐟 | peixe          | 100000  |
| ♁ | homem          | 1000000 |



$$1000 + 1000 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2127$$



|   |   |   |    |   |       |
|---|---|---|----|---|-------|
| 一 | 1 | 六 | 6  | 百 | 100   |
| 二 | 2 | 七 | 7  | 千 | 1000  |
| 三 | 3 | 八 | 8  | 萬 | 10000 |
| 四 | 4 | 九 | 9  |   |       |
| 五 | 5 | 十 | 10 |   |       |

二千五百六十五

$$(2 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 5 = 2565$$

|    |           |    |             |    |              |    |               |    |                |    |                |
|----|-----------|----|-------------|----|--------------|----|---------------|----|----------------|----|----------------|
| 1  | 𐎶         | 11 | 𐎶𐎠          | 21 | 𐎶𐎠𐎶          | 31 | 𐎶𐎠𐎶𐎶          | 41 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶          | 51 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶         |
| 2  | 𐎶𐎶        | 12 | 𐎶𐎠𐎶𐎶        | 22 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶        | 32 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶        | 42 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶        | 52 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶       |
| 3  | 𐎶𐎶𐎶       | 13 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶       | 23 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶       | 33 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶       | 43 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶       | 53 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶      |
| 4  | 𐎶𐎶𐎶𐎶      | 14 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶      | 24 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶      | 34 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶      | 44 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶      | 54 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     |
| 5  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     | 15 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     | 25 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     | 35 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     | 45 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶     | 55 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    |
| 6  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    | 16 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    | 26 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    | 36 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    | 46 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶    | 56 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   |
| 7  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   | 17 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   | 27 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   | 37 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   | 47 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶   | 57 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  |
| 8  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  | 18 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  | 28 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  | 38 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  | 48 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶  | 58 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 |
| 9  | 𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 19 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 29 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 39 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 49 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 | 59 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 |
| 10 | 𐎶         | 20 | 𐎶𐎠          | 30 | 𐎶𐎠𐎶          | 40 | 𐎶𐎠𐎶𐎶          | 50 | 𐎶𐎠𐎶𐎶𐎶          |    |                |



*1,57,46,40*

$$(1 \times 60^3) + (57 \times 60^2) + (46 \times 60^1) + (40 \times 60^0) = 424000$$

# SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Combinação dos princípios:

- Aditivo
- Multiplicativo
- Posição
  - “Atribuição de um caráter variável a cada um dos dígitos da base, que podem ser combinados entre si adotando um valor ou outro de acordo com a posição que ocupam” (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 263).

# A MATEMÁTICA É UMA LINGUAGEM?

Duas visões epistemológicas da matemática:

- Conceção formalista da matemática: uma concepção restritiva da linguagem matemática que prioriza a função formal da matemática
- Numa segunda concepção, sem negar totalmente a primeira, defende-se que sempre é possível atribuir um significado para os símbolos matemáticos

# LEI DA COMUTATIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO

$$(a.b) = (b.a)$$

$$4 \times 5 = 5 \times 4$$

"4 caramelos custam 6 pesetas cada um"

≠

"6 caramelos custam 4 pesetas cada um"

# CARÁTER FORMAL E “REFERENCIAL” DA MATEMÁTICA

Caráter estritamente formal

- Obedece regras internas do próprio sistema
- Autonomia em relação ao "real"

Caráter "referencial"

- Associação entre símbolos matemáticos e situações da realidade

As expressões só vão pertencer ao domínio da matemática se eles obtiverem essa autonomia em relação ao contexto e situações específicas

# ASPECTOS SINTÁTICOS E SEMÂNTICOS DA LINGUAGEM

**Sintaxe:** aspectos mais superficiais da linguagem como a estrutura e forma

A mulher sorriu.

A mesa sorriu.

**Semântica:** significado mais amplo da construção linguística

Nóis vai pro estádio.

# PREDOMINÂNCIA DOS ASPECTOS SINTÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Grande influencia dos formalistas no ensino de matemática

Ensino focado principalmente na aplicação das regras do que na compreensão do significado

Entender a regra não é suficiente para que o aluno consiga conectar com seu conhecimento na resolução do problema proposto



Regra dos "produtos cruzados" na porcentagem

Adição ou subtração com reserva

24

+48

612

Somar ou multiplicar frações com diferentes denominadores

Simplificar frações

Dividir por um número decimal

Eliminar parênteses

# CONFUSÕES ENTRE ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

"a x b" não é o mesmo que "ab"

Se  $a=5$  e  $b=6$ , então  $ab=56$

Aplicação da regra de eliminação do sinal da aritmética

$$3a+5b=8ab$$

*Em toda expressão matemática é necessário reconhecer um significado formal intrínseco – no qual uns símbolos fazem referência a outros dentro de um código específico -; e um significado pragmático – que permite a tradução para sistemas de signos não matemáticos (linguagem natural, imagens e representações icônicas, ações, etc.) -, e associar tais expressões ao seu significado referencial (RORMAN, 1980, apud GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 266-267).*

# PREDOMINÂNCIA DOS ASPECTOS SEMÂNTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Grande diversidade de tendências nessa perspectiva, porém todas têm em comum:

- Prioridade no estudo dos aspectos conceituais da matemática; trata-se de entender o significado dos conceitos matemáticos
- Atribui um papel secundário à linguagem, considerada como uma tradução do conceitual; se o aluno entende o significado do conceito, ele certamente domina a linguagem formal.

# PREDOMINÂNCIA DOS ASPECTOS SEMÂNTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Prioridade aos aspectos conceituais da matemática e papel secundário à formalidade.

Deve-se construir o significado das operações matemáticas através da manipulação e da ação.

Consequência: os alunos acabam por não recorrer aos algoritmos convencionais para representar tais transformações, mas sim a representações próprias.

# DESENHO, ESCRITA E NÚMEROS

As crianças sabem o que é um desenho, uma letra e um algarismo, mas lhes faltam conhecimento da semântica interna.

Alguns autores afirmam que o desenho é imprescindível e anterior à formalização do conteúdo matemático.

Outros afirmam que o desenho pode ser usado para mostrar os aspectos semânticos que o número não reflete.

# INTEGRANDO AS DUAS TENDÊNCIAS

Ambas as tendências possuem problemas:

- **Sintáticas:** falta de compreensão do sentido das regras matemáticas;
- **Semânticas:** dificuldades para manipular o simbolismo matemático.

*As orientações conceituais têm caído com frequência num grave erro: acreditar que, como se pode resolver muitas operações e problemas mediante procedimentos intuitivos, ou não é necessário ensinar os procedimentos formais ou então se pode passar de uns procedimentos a outros de forma automática (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 274)*

*A meu ver, saber matemática implica dominar os símbolos formais independentemente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações e problemas que assim o requiram (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 274).*



# INTEGRANDO AS DUAS TENDÊNCIAS

A matemática é considerada uma linguagem do ponto de vista que possui aspectos semânticos e sintáticos

A linguagem matemática também constitui uma forma de discurso específico, embora guarde estrita relação com os conceitos

“...aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras e sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar tal linguagem adequadamente” (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 274).

# SUGESTÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

1. Os conceitos matemáticos devem ser ensinados de forma contextualizada
  - É necessário acabar com a concepção de que a matemática é altamente abstrata, difícil e inacessível
  - O conhecimento se constrói ao ser usado em contexto social e cultural
  - Possuir representações de conceitos é tão importante quanto possuir capacidade de usá-lo em um contexto determinado

# SUGESTÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

2. A resolução de problemas pode ser um instrumento de contextualização
  - Habitualmente tem se ensinado o conceito e depois aplica-se problemas para “testar” se o aluno aprendeu
  - Sugere-se que a resolução de problemas seja utilizada como instrumento de ensino

# Problema

```
graph TD; A[Problema] --- B[Situação que requer a descoberta de informações desconhecidas]; A --- C[Sempre tem um objetivo/meta, mas os caminhos/as ações a serem percorridas são desconhecidas]; A --- D[É necessário inventar estratégias e buscar ideias para a resolução do problema]; A --- E["uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução"];
```

Situação que requer a descoberta de informações desconhecidas

Sempre tem um objetivo/meta, mas os caminhos/as ações a serem percorridas são desconhecidas

É necessário inventar estratégias e buscar ideias para a resolução do problema

“uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”

# AS LINHAS DE INVESTIGAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ensinar acerca da/sobre a Resolução de Problemas

- Ensino de estratégias para a Resolução de Problemas
- Resolução de Problemas como conteúdo

Ensinar para a Resolução de Problemas

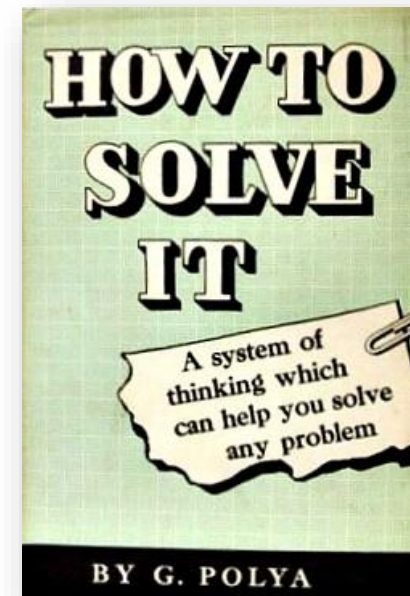
- Conteúdo e procedimentos como foco
- Problema como uma “aplicação” dos conceitos

Ensinar através da Resolução de Problemas

- Resolução de Problemas como um modo de instrução



George Polya



# SUGESTÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

3. Os procedimentos próprios, intuitivos ou não-formais são instrumentos para explorar o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos
4. É necessário associar os símbolos matemáticos ao seu significado referencial
5. Aplicar modelos concretos
  - Deve-se propor modelos (manipulativos, verbais, gráficos ou mesmo de caráter simbólico) que permitam a compreensão a semântica da operação

# SUGESTÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

6. Utilizar e relacionar linguagens diferenciadas
  - A associação entre os aspectos sintáticos e semânticos exige o uso de diferentes linguagens (linguagem natural, esquemas, desenhos, símbolos, etc.)
7. Trabalhar os mesmos conceitos e procedimentos em diferentes contextos
8. Estimular a abstração progressivamente
  - Os alunos tendem a não dissociar os aspectos matemáticos formais dos extramatemáticos, porém é necessário trabalhar progressivamente a abstração que a formalidade dos símbolos matemáticos compreende

A autora, voltando à citação de Goethe, explicita o quanto incompreensível é a linguagem matemática fazendo comparação com a aprendizagem de outras línguas

- O foco para aprender uma segunda língua deve ser dado na comunicação e não como nos métodos tradicionais que visam o ensino de regras

Em um segundo modo de entender a frase, podemos dizer que a matemática constitui uma maneira específica de observar e de interpretar a realidade

- A aprendizagem dessa linguagem não pressupõe a mera “tradução” para a linguagem natural, deve entrar na lógica do pensamento matemático



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUSSEAU, Guy. A cultura matemática é um instrumento para a cidadania. **Nova Escola**, 228, 2009.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A Aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. TEBEROSKY, A. & TOCHINKI, L. (Orgs.). **Além da Alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática**. Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1997.

HOUAISS. **Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, Juan Ignacio (org.). **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, p. 13-42, 1998.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática. uma visão crítica. Desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.