

Aula de TADI

Tabela de frequência,
Medidas de Posição Central
Separatrizes

Média Simples

A média aritmética simples (MAS) é calculada dividindo-se a soma dos valores (S) pela quantidade de valores (n), onde:

$$MAS = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$



Figura 7.1: A média é um valor capaz de representar um conjunto de valores diversos. Veja como o valor 50 está próximo aos outros valores do conjunto.

Média Ponderada

Ponderar, portanto, significa pesar, apreciar, considerar. Logo, uma média aritmética ponderada é aquela que vai levar em consideração o peso que cada valor vai ter para o seu cálculo.



Ann-Kathrin Rehse

Fonte: www.sxc.hu/photo/481420



Ann-Kathrin Rehse

Fonte: www.sxc.hu/photo/481419



Ann-Kathrin Rehse

Fonte: www.sxc.hu/photo/481418

Média Ponderada



\times

- multiplicar cada valor pelo seu respectivo peso;



$+$

- somar os resultados;



\div

- dividir o resultado da soma anterior pela soma dos pesos.

Média Ponderada

Um aluno fez três provas de Matemática e tirou as seguintes notas: 5, 7 e 8. Porém, as provas tinham pesos diferentes: 2, 1 e 2, respectivamente. Assim, qual é a média aritmética ponderada (MAP) das notas desse aluno?

Média Ponderada

Um aluno fez três provas de Matemática e tirou as seguintes notas: 5, 7 e 8. Porém, as provas tinham pesos diferentes: 2, 1 e 2, respectivamente. Assim, qual é a média aritmética ponderada (MAP) das notas desse aluno?

$$\text{MAP} = \frac{5 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 2}{2 + 1 + 2} = \frac{10 + 7 + 16}{5}$$

$$\text{MAP} = \frac{33}{5} = 6,6$$

Média Ponderada

Nota: quando você tiver uma tabela de frequência, as frequências absolutas são os pesos!!

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{N}$$

Média Geométrica

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Média Geométrica

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Exemplo: $X = \{3, 9, 27\}$

Qual o valor da média geométrica?

Média Geométrica

Exemplo: $X = \{3, 9, 27\}$

Qual o valor da média geométrica?

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\bar{x} = \sqrt[3]{3 * 9 * 27} = 9$$

Média Geométrica (taxas e juros)

$$\bar{j} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + r_i)}$$

r_i = Taxas de juros ou taxas de crescimento nos períodos $i=1$ a n

\bar{j} = taxa de juro média ou taxa de crescimento média

Média Geométrica (valor final)

$$V = P_0 (1 + \bar{j})^n$$

V = investimento inicial P_0 multiplicado pelo fator de crescimento médio elevado ao número de período

\bar{j} = taxa de juro média

$(1+j)$ = fator de crescimento médio e n o número de período

Tabelas de frequências permite agrupar dados por meio das Frequências com que as observações aparecem no conjunto de dado ou nas classes.

Elas podem ser representadas graficamente.

Se os dados forem discretos, usar gráficos de colunas, Barras ou pizzas.

Se os dados forem contínuos, usar o histograma.

DADOS BRUTOS: Dados ainda não organizados

ROL: É o arranjo dos DADOS BRUTOS em ordem crescente ou decrescente

AMPLITUDE TOTAL (RANGE-R): É a diferença entre o maior e o menor valor

FREQÜÊNCIA ABSOLUTA: É o número de vezes que o elemento aparece na amostra, ou o número de elementos pertencentes a uma classe.

LIMITE DAS CLASSES: 1,35|----- 1,40

PONTOS MÉDIOS DAS CLASSES: $PM_{(i)} = \frac{LimSup_{(i)} + LimInf_{(i)}}{2}$

FREQÜÊNCIA ACUMULADA DIRETA: É a soma das freqüências absolutas começando pelo menor valor

FREQÜÊNCIA RELATIVA: É a percentagem do valor dos dados em relação ao total da amostra.

$$f_i = \frac{Freq.Abs.Classe_{(i)}}{n}$$

onde

$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad (100\%)$$

Separatrizes

QUARTIL

Divide os dados em 4 partes iguais

DECIL

Divide os dados em 10 partes iguais

Quartil

Divide os dados em 5 partes iguais

PERCENTIL

Divide os dados em 100 partes iguais

(ii) Para dados Agrupados

Observando-se a Fac_i , procura-se:

$n/2$ \longrightarrow n ímpar

Média $\{n/2; n/2+1\}$ \longrightarrow n par

Exemplo

2 3 2 4 3 4 4 2 1 1

<i>Número</i>	<i>Freq. Abs. (Fi)</i>	<i>Freq. Acum. Dir. (Fac)</i>
1	2	2
<u>2</u>	3	5
3	2	7
4	3	10

$n = 10$ (par)

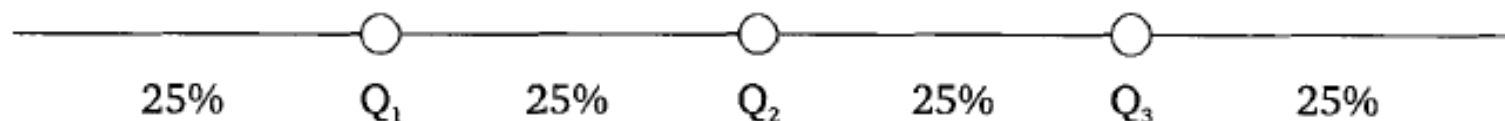
$n/2 = 5^{\circ}$ elemento

$n/2 + 1 = 6^{\circ}$ elemento

} MEDIANA = $(2+3)/2 = 2,5$

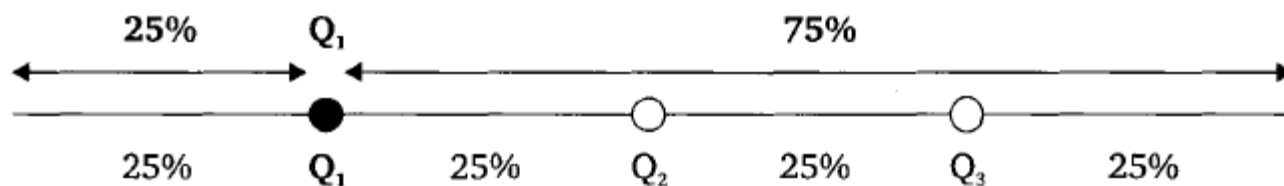
Nos quartis, a série é dividida em quatro partes iguais, com o mesmo número de elementos, de tal forma que cada intervalo do quartil contenha 25% dos elementos coletados.

Os elementos separatrizes da série são Q_1 , Q_2 e Q_3 .



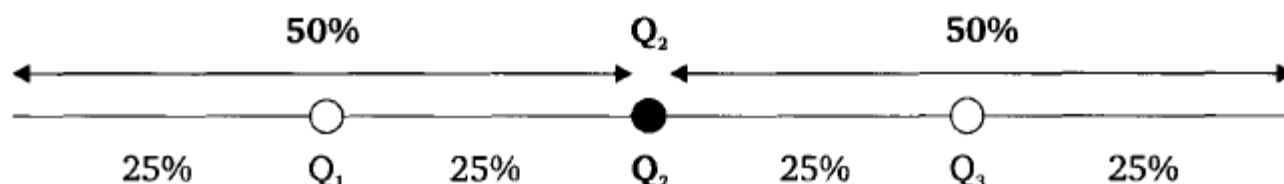
Interpretação dos quartis:

- O primeiro quartil (Q_1) separa os primeiros 25% dos elementos da série.

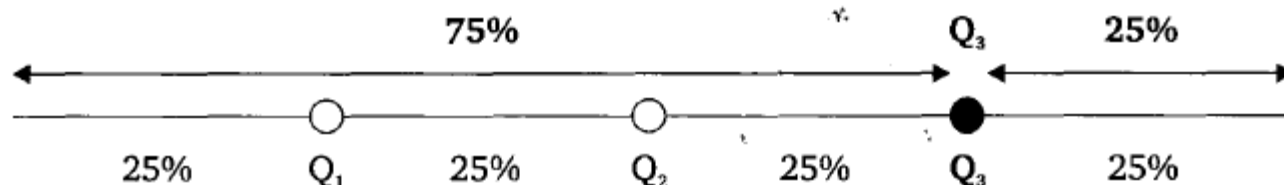


- O segundo quartil (Q_2) separa os primeiros 50% (25% + 25%) dos elementos da série.

Obs.: O segundo quartil (Q_2) sempre será igual a mediana (M_d) da série.



- O terceiro quartil (Q_3) separa os primeiros 75% (25% + 25% + 25%) dos elementos da série.



Exemplo 8.1 Dado o conjunto de valores: 7, 13, 5, 12, 16, 4, 9, 15, 6. Calcule os quartis Q_1 ; Q_2 e Q_3 .

Solução:

Considere o conjunto de valores ordenados segundo um critério de grandeza.

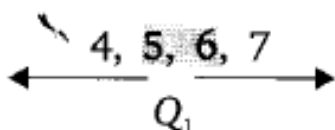
4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16

- Q_2 : Determina-se em primeiro lugar o valor do segundo quartil (Q_2).

4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16
50% ← Q_2 → 50%

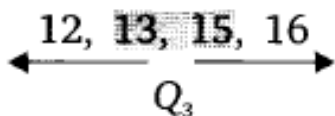
$Q_2 = M_d = 9 =$ mediana de todos os elementos da série

- Q_1 : Para o cálculo do quartil Q_1 , basta calcular a mediana da primeira metade do conjunto.



$$Q_1 = \frac{5 + 6}{2} = 5,5 = \text{mediana da primeira metade dos elementos da série.}$$

- Q_3 : para o cálculo do quartil Q_3 , basta calcular a mediana da segunda metade do conjunto.



Resp.: $Q_1 = 5,5$; $Q_2 = 9$ e $Q_3 = 14$.

$$Q_3 = \frac{13 + 15}{2} = 14 = \text{mediana da segunda metade dos elementos da série.}$$

8.1.2 Cálculo dos quartis para dados agrupados sem intervalo de classe

No cálculo dos quartis para dados agrupados sem intervalo de classe, utilizam-se técnicas semelhantes às aquelas do cálculo da mediana.

Isso significa que a localização da posição do quartil na série é verificada pela frequência acumulada (*Fac*). Sendo assim, devemos acrescentar à tabela de distribuição de frequência uma coluna que contenha os cálculos da frequência acumulada (*Fac*).

Os quartis Q_1 , Q_2 e Q_3 podem ser generalizados pela notação Q_k , sendo que o quartil considerado é representado por k .

Representação: Q_k

- $k = 1 \rightarrow Q_1$
- $k = 2 \rightarrow Q_2$
- $k = 3 \rightarrow Q_3$

Cálculo do quartil Q_k .

Definição: quartil Q_k é o valor da variável que corresponde à classe desse quartil considerado.

- Inicialmente, calcular a posição do quartil Q_k para estabelecer em que classe se localiza o quartil considerado.

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4}$$

Sendo:

k = número do quartil considerado;

$n = \sum f_i$ = número de elementos coletados na pesquisa.

Tabela 8.2 *Distribuição da idade do time masculino de futebol – frequência acumulada.*

Classe	Idade (variável em estudo)	Número de alunos (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1	11	3	3
2	12	4	7
3	13	3	10
4	14	4	14
5	15	3	17
6	16	5	22
7	17	3	25
	Total	25	

Para encontrar os quartis, primeiro determine a posição de cada um, ou seja, qual a linha da tabela encontra-se a cada um deles aplicando a fórmula:

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4}$$

Tabela 8.2 Distribuição da idade do time masculino de futebol – frequência acumulada.

Classe	Idade (variável em estudo)	Número de alunos (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1	11	3	3
2	12	4	7
3	13	3	10
4	14	4	14
5	15	3	17
6	16	5	22
7	17	3	25
	Total	25	

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4}$$

$$Q_1 = \frac{1 \times 25}{4} = 6,25 \rightarrow \text{Posicionado na 2ª classe}$$

$$Q_2 = \frac{2 \times 25}{4} = 12,5 \rightarrow \text{Posicionado na 4ª classe}$$

$$Q_3 = \frac{3 \times 25}{4} = 18,75 \rightarrow \text{Posicionado na 6ª classe}$$

Tabela 8.2 Distribuição da idade do time masculino de futebol – frequência acumulada.

Classe	Idade (variável em estudo)	Número de alunos (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1	11	3	3
2	12	4	7
3	13	3	10
4	14	4	14
5	15	3	17
6	16	5	22
7	17	3	25
	Total	25	

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4}$$

$$Q_1 = \frac{1 \times 25}{4} = 6,25 \rightarrow \text{Posicionado na 2ª classe}$$

$$Q_1 = 12 \text{ anos}$$

$$Q_2 = \frac{2 \times 25}{4} = 12,5 \rightarrow \text{Posicionado na 4ª classe}$$

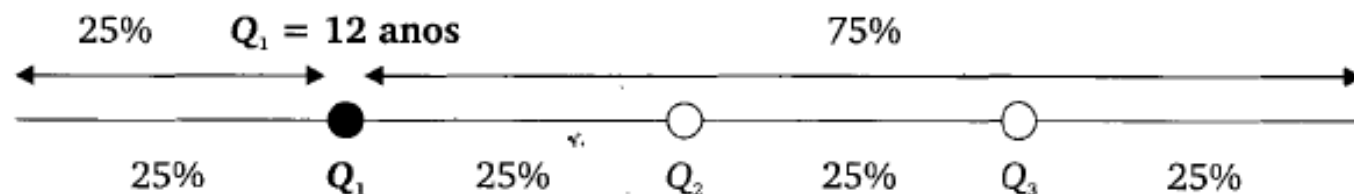
$$Q_2 = 14 \text{ anos}$$

$$Q_3 = \frac{3 \times 25}{4} = 18,75 \rightarrow \text{Posicionado na 6ª classe}$$

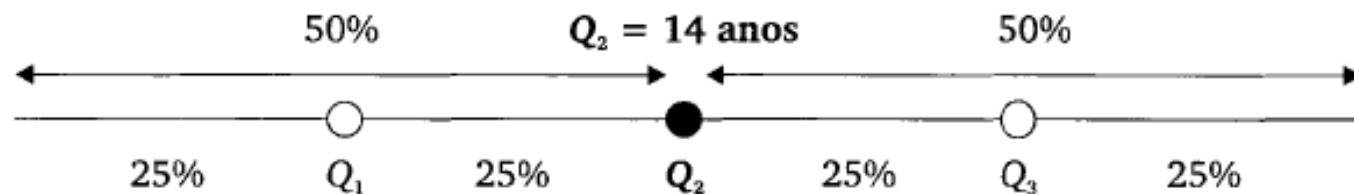
$$Q_3 = 16 \text{ anos}$$

Interpretação dos quartis:

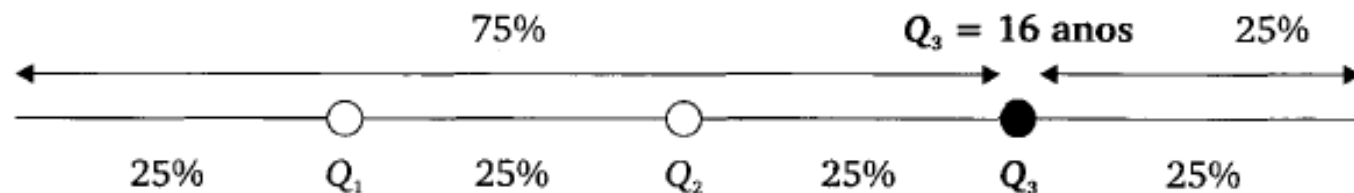
Primeiro quartil (Q_1): 25% dos alunos têm idade menor ou igual a 12 anos (Q_1) e 75% têm idade maior ou igual a 12 anos.



Segundo quartil (Q_2): 50% dos alunos têm idade menor ou igual a 14 anos (Q_2) e 50% têm idade maior ou igual a 14 anos.



Terceiro quartil (Q_3): 75% dos alunos têm idade menor ou igual a 16 anos (Q_3) e 25% têm idade maior ou igual a 16 anos.



8.1.3 Cálculo dos quartis para dados agrupados com intervalo de classe

No cálculo dos quartis para dados agrupados com intervalo de classe, utilizam-se técnicas semelhantes àsquelas do cálculo dos quartis para dados agrupados sem intervalo de classe.

- Inicialmente calcular a posição do quartil Q_k para estabelecer em que classe se localiza o quartil considerado.

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4}$$

Sendo:

k = número do quartil considerado;

$n = \sum f_i$ = número de elementos coletados na pesquisa.

- obtido o resultado para a *Posição* Q_k , localize esse valor na coluna da frequência acumulada, para conhecer qual é a classe que corresponde a essa posição. Essa classe recebe o nome de “classe do quartil k ”;

Nota: a frequência acumulada permite achar a classe que contém o valor dos quartis

Fórmula para achar o valor dos quartis

- determinar o valor da variável que corresponde ao quartil Q_k , através da fórmula a seguir.

$$Q_k = l_{Qk} + \left[\frac{\frac{k \cdot n}{4} - Fac_{anterior}}{f_{Qk}} \right] \cdot h_{Qk}$$

Sendo:

k = quartil considerado;

l_{Qk} = limite inferior do intervalo de classe do quartil considerado;

$Fac_{anterior}$ = frequência acumulada da classe anterior à classe do quartil considerado;

f_{Qk} = frequência (simples) da classe do quartil considerado;

n = número total de elementos da amostra;

$h_{Qk} = L_{Qk} - l_{Qk}$ = amplitude do intervalo de classe do quartil considerado.

Exemplo 8.4 Numa fábrica de objetos de decoração, a distribuição do peso das peças fabricadas está registrada na Tabela 8.3. Calcule o valor dos quartis Q_1 ; Q_2 e Q_3 .

Tabela 8.4 *Distribuição do peso dos objetos de decoração – frequência acumulada.*

i	Pesos dos objetos (kg)	Número de peças (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1	0 — 5	52	52
2	5 — 10	36	88
3	10 — 15	30	118
4	15 — 20	41	159
5	20 — 25	28	187
6	25 — 30	25	212
7	30 — 35	18	230
	Total	230	

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4} \rightarrow \text{Posição } Q_1 = \frac{1 \times 230}{4} = 57,5 \rightarrow \text{Posicionado na segunda classe}$$

Exemplo 8.4 Numa fábrica de objetos de decoração, a distribuição do peso das peças fabricadas está registrada na Tabela 8.3. Calcule o valor dos quartis Q_1 ; Q_2 e Q_3 .

Tabela 8.4 Distribuição do peso dos objetos de decoração – frequência acumulada.

i	Pesos dos objetos (kg)	Número de peças (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1	0 — 5	52	52
2	5 — 10	36	88
3	10 — 15	30	118
4	15 — 20	41	159

Observamos que a localização da posição 57,5, na coluna da frequência acumulada, ocorre na segunda classe.

A classe do quartil Q_1 é a segunda classe.

O quartil Q_1 é calculado pela fórmula:

$$Q_K = l_{QK} + \left[\frac{\frac{k \cdot n}{4} - Fac_{anterior}}{f_{QK}} \right] \cdot h_{QK} \rightarrow Q_1 = l_{Q1} + \left[\frac{1 \times 230}{4} - Fac_{anterior}}{f_{Q1}} \right] \cdot h_{Q1}$$

$$Q_1 = 5 + \left[\frac{57,5 - 52}{36} \right] \cdot 5 \rightarrow \boxed{Q_1 = 5,76 \text{ kg}}$$

Exemplo 8.5 Na empresa Sarandi Ltda., o salário dos funcionários do setor de vendas embute as comissões sobre as vendas realizadas. Tomando como base os salários, a empresa divide os funcionários em quatro categorias:

- os 25% menos produtivos = categoria C;
- os 25% seguintes = categoria B;
- os 25% seguintes mais produtivos = categoria A;
- os 25% restantes = categoria especial.

Quais são os salários limites das categorias estabelecidas pela empresa?

Solução: para estabelecer os salários limites das categorias estabelecidas pela empresa, faremos os cálculos dos quartis.

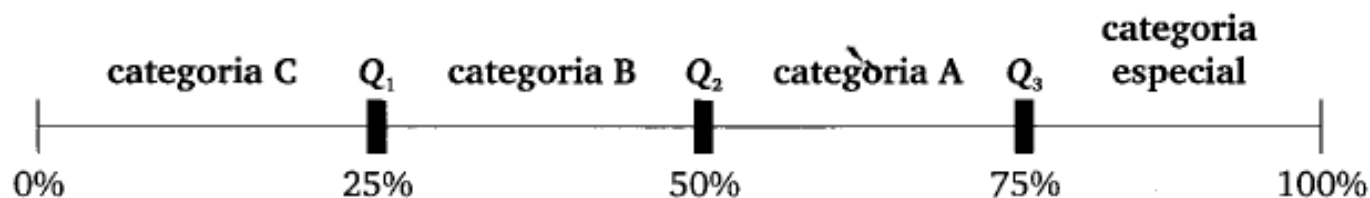


Tabela 8.6 *Distribuição salarial dos funcionários do setor de vendas – frequência acumulada.*

Salário (em reais)	Número de funcionários (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1.000 — 2.000	3	3
2.000 — 3.000	14	17
3.000 — 4.000	18	35
4.000 — 5.000	10	45
5.000 — 6.000	6	51
6.000 — 7.000	3	54
Total	$n = 54$	

Tabela 8.6 Distribuição salarial dos funcionários do setor de vendas – frequência acumulada.

Salário (em reais)	Número de funcionários (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1.000 — 2.000	3	3
2.000 — 3.000	14	17
3.000 — 4.000	18	35
4.000 — 5.000	10	45

- Cálculo do quartil Q_2 ($k = 2$)

$$\text{Posição } Q_k = \frac{k \times n}{4} \rightarrow \text{Posição } Q_2 = \frac{2 \times 54}{4} = 27 \rightarrow \text{Posicionado na terceira classe}$$

A classe do quartil Q_2 é a terceira classe.

$$Q_2 = l_{Q_2} + \left[\frac{\frac{2 \times 54}{4} - Fac_{anterior}}{f_{Q_2}} \right] \cdot h_{Q_2} \rightarrow Q_2 = 3.000 + \left[\frac{27 - 17}{18} \right] \cdot 1.000$$

$$Q_2 = \text{R\$ } 3.555,56$$

Tabela 8.6 Distribuição salarial dos funcionários do setor de vendas – frequência acumulada.

Salário (em reais)	Número de funcionários (f_i)	Frequência acumulada (Fac)
1.000 — 2.000	3	3
2.000 — 3.000	14	17
3.000 — 4.000	18	35
4.000 — 5.000	10	45
5.000 — 6.000	6	51

- Cálculo do quartil Q_3 ($k = 3$)

$$Posição Q_k = \frac{k \times n}{4} \rightarrow Posição Q_3 = \frac{3 \times 54}{4} = 40,5 \rightarrow Posicionado na quarta classe$$

A classe do quartil Q_3 é a quarta classe.

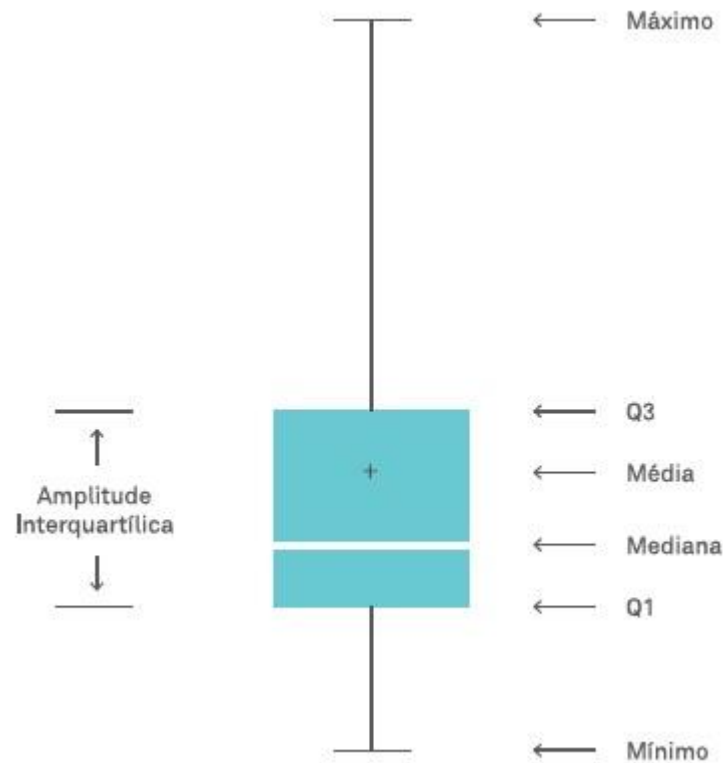
$$Q_3 = l_{Q_3} + \left[\frac{\frac{3 \times 54}{4} - Fac_{anterior}}{f_{Q_3}} \right] \cdot h_{Q_3} \rightarrow Q_3 = 4.000 + \left[\frac{40,5 - 35}{10} \right] \cdot 1.000$$

$$Q_3 = \text{R\$ } 4.550,00$$

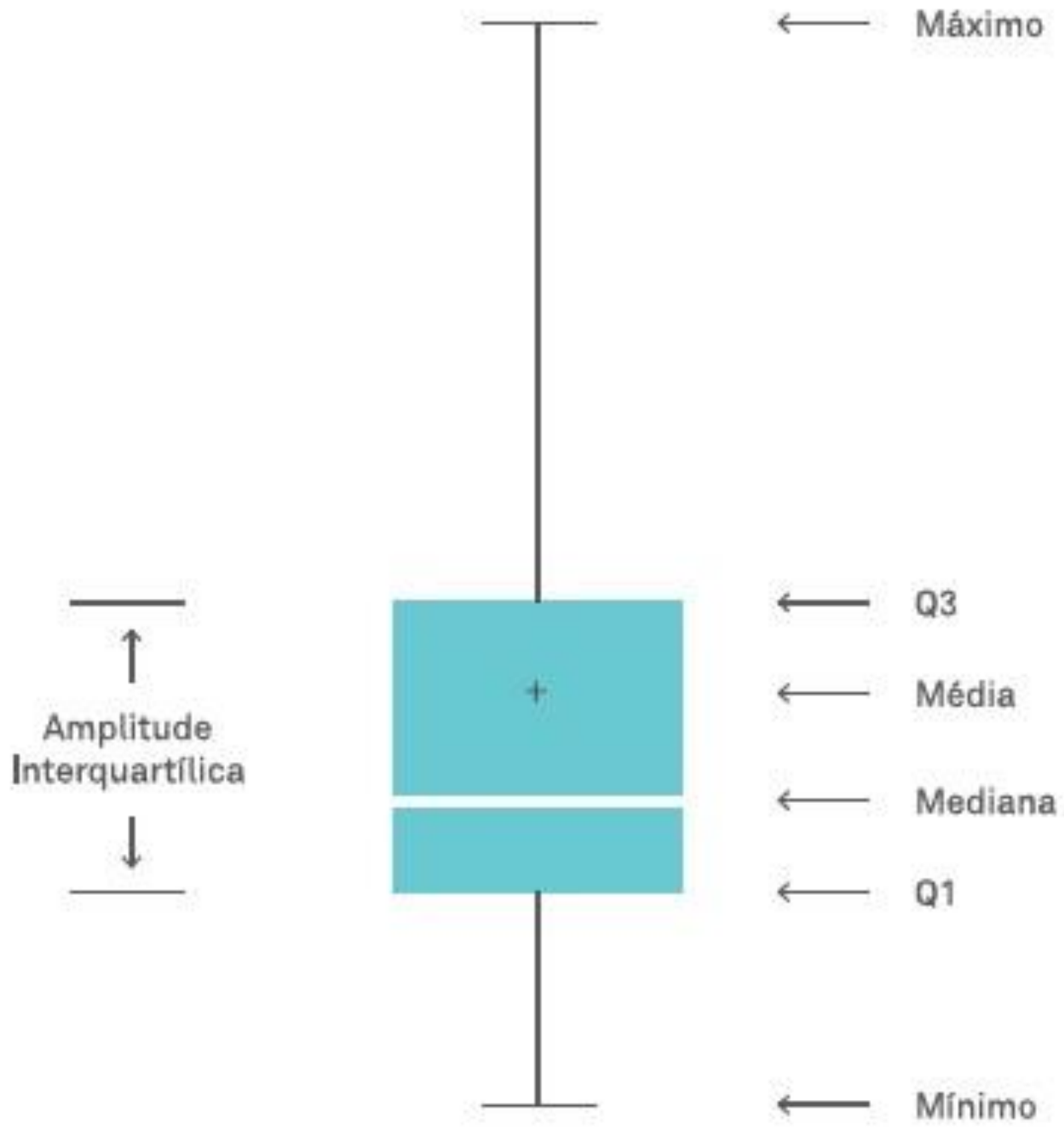
Resposta: os salários limites das categorias estabelecidas pela empresa são:

- categoria C (os 25% menos produtivos) = salários entre R\$ 1.000,00 e R\$ 2.750,00;
- categoria B (os 25% seguintes) = salários entre R\$ 2.750,00 e R\$ 3.555,56;
- categoria A (os 25% seguintes mais produtivos) = salários entre R\$ 3.555,56 e R\$ 4.550,00;
- categoria especial (os 25% restantes) = salários entre R\$ 4.550,00 e R\$ 7.000,00.

Em um box plot são apresentados 5 estatísticas: o mínimo, o primeiro quartil, a mediana, o terceiro quartil e o máximo. Os valores são apresentados em cinco números.



ina, o
lores
inco



Interpretação

O retângulo contém 50% dos valores do conjunto de dados. A posição da linha mediana no retângulo informa sobre a assimetria da distribuição. Uma distribuição simétrica teria a mediana no centro do retângulo. Se a mediana é próxima de Q1, então, os dados são positivamente assimétricos. Se a mediana é próxima de Q3 os dados são negativamente assimétricos. No exemplo que você pode observar, a seguir, a distribuição dos dados é simétrica.

Os outliers em um box plot aparecem como pontos ou asteriscos fora das “linhas” desenhadas. Perceba que no exemplo que temos um outlier representado pelo ponto no começo do gráfico.

Os outliers serão os valores fora de $Q1 - 1.5 * (Q3 - Q1)$ e $Q3 + 1.5 * (Q3 - Q1)$

8.2.1 Cálculo dos decis para dados agrupados com intervalo de classe

No cálculo dos decis para dados agrupados com intervalo de classe, utilizam-se técnicas semelhantes àquelas do cálculo dos quartis para dados agrupados com intervalo de classe.

A localização da posição do decil D_k na série é verificada pela frequência acumulada (Fac). Sendo assim, devemos acrescentar à tabela de distribuição de frequência uma coluna que contenha os cálculos da frequência acumulada (Fac).

Cálculo do decil D_k :

- inicialmente, calcular a posição do quartil Q_k para estabelecer em que classe se localiza o quartil considerado.

$$\text{Posição } D_k = \frac{k \times n}{10}$$

Sendo:

k = número do decil considerado;

$n = \sum f_i$ = número de elementos coletados na pesquisa.

- obtido o resultado para a posição D_k , localize esse valor na coluna da frequência acumulada, para conhecer qual é a classe que corresponde a essa posição. Essa classe recebe o nome de “classe do decil k ”;

- determinar o valor da variável que corresponde ao decil D_k , através da fórmula a seguir.

$$D_K = l_{DK} + \left[\frac{\frac{k \cdot n}{10} - Fac_{anterior}}{f_{DK}} \right] \cdot h_{DK}$$

Sendo:

k = decil considerado;

l_{DK} = limite inferior do intervalo de classe do decil considerado;

$Fac_{anterior}$ = frequência acumulada da classe anterior à classe do decil considerado;

f_{DK} = frequência (simples) da classe do decil considerado;

n = número total de elementos da amostra;

$h_{DK} = L_{DK} - l_{DK}$ = amplitude do intervalo de classe do decil considerado.

8.3.1 Cálculo dos percentis para dados agrupados com intervalo de classe

No cálculo dos percentis para dados agrupados com intervalo de classe, utilizam-se técnicas semelhantes às aquelas do cálculo dos quartis e decis para dados agrupados com intervalo de classe.

A localização da posição do percentil P_k na série é verificada pela frequência acumulada (*Fac*). Sendo assim, devemos acrescentar à tabela de distribuição de frequência uma coluna que contenha os cálculos da frequência acumulada (*Fac*).

Cálculo do percentil P_k .

- Inicialmente, calcular a posição do percentil P_k para estabelecer em que classe se localiza o percentil considerado.

$$\text{Posição } P_k = \frac{k \times n}{100}$$

$$P_K = l_{PK} + \left[\frac{\frac{k \cdot n}{100} - Fac_{anterior}}{f_{PK}} \right] \cdot h_{PK}$$

Sendo:

k = percentil considerado;

l_{pk} = limite inferior do intervalo de classe do percentil considerado;

$Fac_{anterior}$ = frequência acumulada da classe anterior à classe do percentil considerado;

f_{pk} = frequência (simples) da classe do percentil considerado;

n = número total de elementos da amostra;

$h_{pk} = L_{pk} - l_{pk}$ = amplitude do intervalo de classe do percentil considerado.

Exemplo 8.9 Reconsidere o Exemplo 8.7, em que uma fábrica de agasalhos infanto-juvenil realiza uma pesquisa sobre as estaturas dos adolescentes que