Universidade de São Paulo
Brasil

Modelagem e Simulação de Sistemas

Prof. Fabrício Maciel Gomes
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena – EEL

Introdução e história da Simulação Monte Carlo

Simulação de Monte Carlo

- Designa-se **SMC** qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos.

- Ele permite que você faça testes com variáveis um número suficientemente grande de vezes para ter com mais precisão a chance de algum resultado acontecer.

- Um **padrão dito estocástico**, é aquele que têm origem em processos não determinísticos, com origem em eventos aleatórios.

Simulação de Monte Carlo

O nome Monte Carlo foi cunhado pelo cientista Metropolis, inspirado no interesse por pôquer de seu colega Ulam. Baseou-se na similiridade que a simulação estatística desenvolvida por eles tinha com jogos de azar, simbolizados nas roletas do cassino de **Monte Carlo**, na capital do principado de Mônaco.

Simulação de Monte Carlo

O comportamento de um sistema durante determinado tempo pode ser estudado, por meio de um modelo computacional.

Este modelo pode ser construído a partir de um conjunto de informações operacionais do sistema real.

Simulação de Monte Carlo

Durante a segunda Guerra Mundial, o matemático húngaro-americano **John Von Neumann**, em seu trabalho no projeto Manhattan (bomba atômica), criou o conceito, denominado **Simulação Monte Carlo- SMC.**

O trabalho consistia na simulação direta de problemas probabilísticos relacionados com a difusão das partículas de nêutrons quando submetidos a um processo de fissão nuclear.

Simulação de Monte Carlo

Primeiro trabalho introduzido por Jon Von Neuman e S.M. Ulam em 1940, durante a segunda Guerra Mundial.

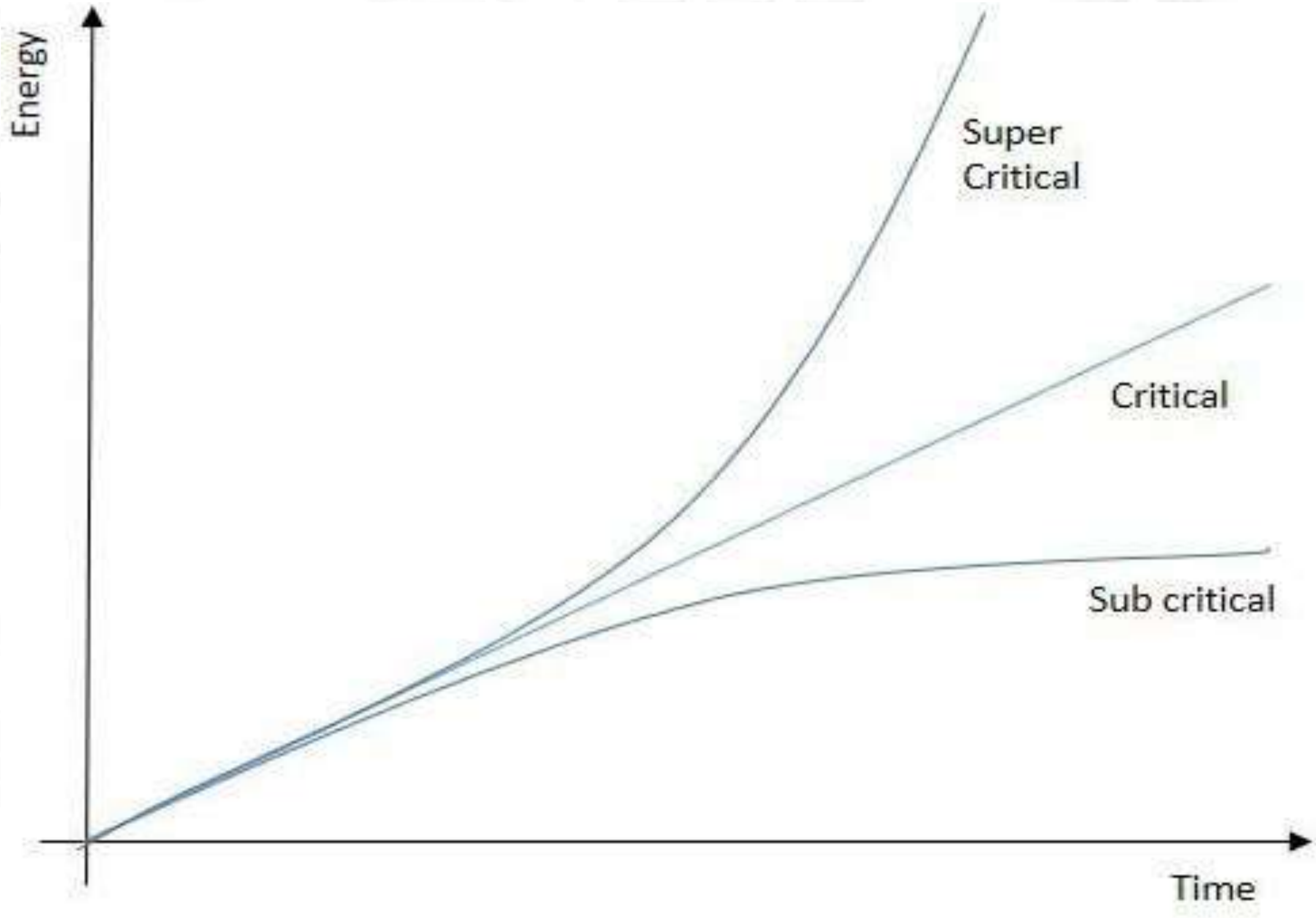
Um átomo de Plutônio enriquecido, quando ocorre a fissão libera uma enorme quantidade de energia, fazendo com que outro átomo também se divida.

Existem duas reações possíveis para a Bomba:

- A reação subcrítica, quando a bomba não explode: a reação em cadeia não acontece. É como uma cadeia de dominós que é interrompida no caminho.

- A reação supercrítica, quando a bomba explode: há uma quantidade exponencial de energia sendo liberada.

Simulação de Monte Carlo



Simulação de Monte Carlo

Os cientistas tinham **duas Missões**, assegurar que a bomba explodisse e também ter certeza que isso não aconteceria na mão deles.

Eles tinham **que dividir** a quantidade de **Plutônio** em **pedaços pequenos** o suficiente para não explodir quando eles não quisessem, mesmo se um acidente ocorresse.

E eles tinham que juntar os pedacinhos em uma única peça grande, com material suficiente para causar uma reação em cadeia no momento da explosão.

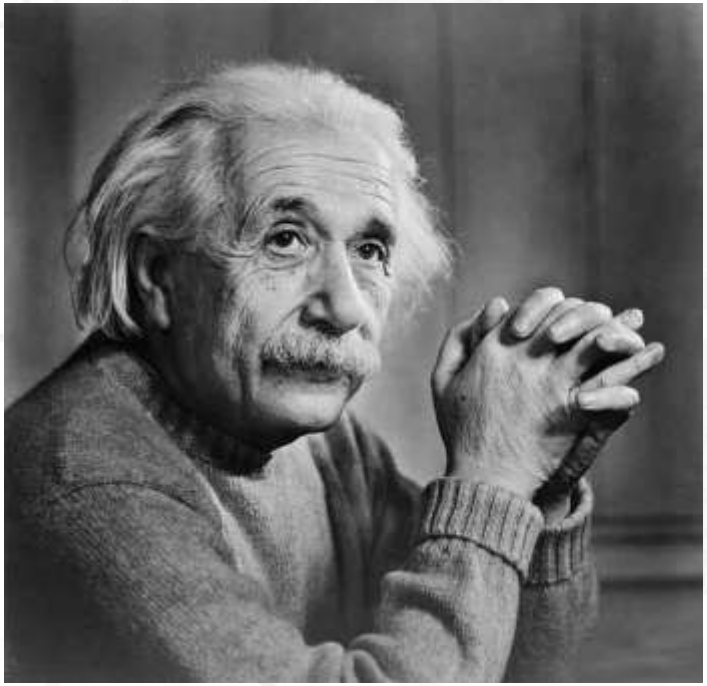
Simulação de Monte Carlo

Portanto foi elaborado a SMC, utilizando uma variável aleatória, e cada caso, de acordo com a variável , foi calculado um a um por pessoas, e os resultados compilados por um matemático, conseguindo assim modelar matematicamente o comportamento da bomba.

Quem que fazia os cálculos?

Simulação de Monte Carlo

Simulação de Monte Carlo



Exemplo

Situação: A simulação de Monte Carlo utiliza-se de geradores de números aleatórios parasimular sistemas físicos ou matemáticos, nos quais não se considera o tempo como explicitamente como uma variável

Simulação de Monte Carlo

Um número aleatório pode representar decisões arbitrárias ou servir como entrada para geração de tempos segundo várias distribuições.

Como produzir números aleatórios

- Dispositivos físicos (Ex. dados, roleta, moeda etc.);
- Tabela de números aleatórios (livros);
- Processos matemáticos.

Método do Meio Quadrado

- Von Neumann (1946):
  - r1 = 76 => $76^2 = 5776$
  - r2 = 77 => $77^2 = 5929$
  - r3 = 92….
- Sequência gerada (76,77,92,46,11,12,14, ...)
- Quando resultar em 0, deve-se utilizar outra semente.

Método da Congruência

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \mod m$$

gera números inteiros entre 0 e m-1

- x_o é a semente do número aleatório.
- "mod" é a função módulo = mostra o resto da divisão inteira. Ex.: 10 mod 6 = 4

$$\frac{10}{6} = 1{,}6666666$$

$$10 \quad (1 \times 6) = 4 \Rightarrow \text{Resto}$$

$$\frac{64}{17} = 3{,}76$$

$$64 \quad (17 \times 3) = 13 \Rightarrow \text{Resto}$$

Método da Congruência

Gerar números aleatórios pelo método da congruência, com $a = 9$, $c = 1$, $m = 17$ e $x_0 = 7$.

n	x_n	$y=9x_n+1$	y mod 17	$x_{n+1}/17$
0	$X_0=7$	9*7+1=64	13	13/17 =0.7647
1	$X_1=13$	118	16	16/17 =0.9412
2	$X_2=16$	145	9	0.5294
3	$X_3=9$	82	14	0.8235
4	$X_4=14$	127	8	0.4706

números **pseudo-aleatórios** *inteiros entre* **0 e 16** *(=17-1)*

números pseudo-aleatórios inteiros entre 0 e 1