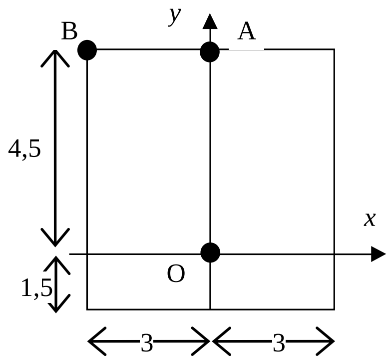
7. A chapa quadrada da figura ao lado gira em torno do ponto O no plano *xy*. Determine os vetores velocidade e aceleração dos pontos A e B sabendo que a velocidade angular tem módulo 6 rad/s e a aceleração angular, 4 rad/s^2 . As dimensões estão em cm e os pontos foram exagerados para facilitar sua visualização.



$\omega = 6\ rad/s$

$\alpha = 4\ rad/s^2$

O problema não especifica qual sentido elas têm. Vou supor que tanto a velocidade angular como a aceleração angular são ambas positivas.

O módulo da velocidade pode ser calculado pelo produto:

$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{R}|$;

$|\vec{v}_A| = 6 \cdot 4{,}5 = 27$ **cm/s**

$v_B = 6 \cdot \sqrt{4{,}5^2 + 3^2} = 6 \cdot \sqrt{29{,}25} = 6 \cdot 5{,}4 \approx 32{,}5$ **cm/s**

Sabemos que o resultado desse produto continua sendo um vetor perpendicular ao plano formado por $\vec{\omega}$ e $\vec{R}$. Sabendo que a velocidade é a velocidade tangencial, do desenho podemos ver que $\vec{v}_A$ possui a direção de *Ox*, assim,

$\vec{v}_A = -27\vec{i}$ cm/s.

Que é simples de calcular, não assim $\vec{v}_B$.

Sabemos que a definição do produto vetorial é: $|\vec{v}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{R}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{R}| \cdot sen\beta$ sendo β o menor ângulo entre os dois vetores e a direção deste novo vetor $\vec{v}$ é perpendicular ao plano formado por ambos com o sentido de acordo com à do produto vetorial, isto é:

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Assim, $\vec{v}_A = 6\vec{k} \wedge (4{,}5\vec{j}) = -27\vec{i}$ em cm/s (novamente supondo que a velocidade angular é positiva). Que pode ser obtido diretamente resolvendo o determinante:

$$\vec{v}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4{,}5 & 0 \end{vmatrix} = -27\vec{i}$$

Da mesma forma:

$\vec{v}_B = 6\vec{k} \wedge (-3i + 4{,}5\vec{j}) = -18(\vec{k} \wedge \vec{i}) + 27(\vec{k} \wedge \vec{j}) = -18\vec{j} - 27\vec{i}$ em cm/s,

ou $\vec{v}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -3 & 4{,}5 & 0 \end{vmatrix} = -27\vec{i} - 18\vec{j}$ que como pode ser comprovado, esse vetor possui módulo 32,5 cm/s como tinha sido calculado inicialmente. Sendo as duas componentes do vetor negativas, como foi esperado na direção de $\vec{v}_T$.

Sabendo que $v_T = \omega R$, e que o sinal desse vetor velocidade tangencial dependerá da direção da velocidade angular, então:

$\frac{d\vec{v}_T}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$. Por outro lado, $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_{cp}$, $\vec{a} = a_T \cdot \hat{u}_\theta - a_{cp}\hat{u}_r$ e

$\hat{u}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \text{sen}\ \theta\ \vec{j}$

$\hat{u}_\theta = -\text{sen}\ \theta\, \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$

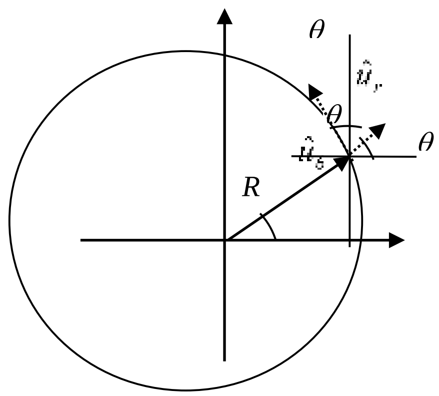
$\therefore \vec{a}_T = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} = \vec{\alpha} \times \vec{R}$. Ver pg. 184 em diante no Resnik.

O módulo da aceleração tangencial, sabendo que α e R são perpendiculares entre si, pode ser calculado como:

$|\vec{a}_T| = \alpha \bullet R$ que é tangente à circunferência.

Por outro lado, sabe-se que o módulo da aceleração centrípeta é:

$|\vec{a}_{Cp}| = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$, e que ela é um vetor com direção radial, sentido "para dentro" do círculo. Assim, a expressão de cima fica: $\vec{a} = \alpha R\, \hat{u}_\theta - \omega^2 R\, \hat{u}_r$.



Se substituirmos as coordenadas polares $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$ são os versores das coordenadas polares (no Resnik so chama versores tangencial e radial); podemos ainda substituir $\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_r$ por seus equivalentes em coordenadas cartesianas:

$a_{Cp}\hat{u}_r = a_{Cp}(\cos\theta\ \vec{i} + \text{sen}\ \theta\ \vec{j})$ e $a_T\hat{u}_\theta = a_T(-\mathbf{sen}\,\theta\, \vec{i} + \mathbf{cos}\,\theta\ \vec{j})$

Considerando que, para o ponto A.

$\cos\theta = -\frac{0}{R} = 0$ e $\text{sen}\ \theta = \frac{4{,}5}{R}$

$\vec{a}_A = \alpha R\, \hat{u}_\theta - \omega^2 R\, \hat{u}_r = \alpha R(-\text{sen}\,\theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j}) - \omega^2 R\,(\cos\theta\ \hat{i} + \text{sen}\ \theta\ \hat{j}) =$

$= \alpha R\left(-\frac{4{,}5}{R}\hat{i} + 0\hat{j}\right) - \omega^2 R\left(0\hat{i} + \frac{4{,}5}{R}\hat{j}\right) = 4(-4{,}5\hat{i}) - 6^2(4{,}5\hat{j}) =$

$= -18\hat{i} - 162\hat{j}$ em cm/s ^{2}

Para o ponto B, $\cos\theta = -\frac{3}{R}$ e $\text{sen}\ \theta = \frac{4{,}5}{R}$

Os vetores aceleração centrípeta e aceleração tangencial na rotação ficam:

$a_{Cp}\hat{u}_r = a_{Cp}(\cos\theta\ \hat{i} + \text{sen}\ \theta\ \hat{j})$ e $a_T\hat{u}_\theta = a_T(-\text{sen}\ \theta\ \hat{i} + \cos\theta\ \hat{j})$

Se substituirmos $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$ pelas expressões de sen e cos,

$$\vec{a}_B = \alpha R\hat{\mu}_\theta - \omega^2 R\hat{\mu}_r = \alpha R(-sen\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) - \omega^2 R(cos\,\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) =$$
$$= \alpha R\left(-\tfrac{4{,}5}{R}\hat{\imath} - \tfrac{3}{R}\hat{\jmath}\right) - \omega^2 R\left(-\tfrac{3}{R}\hat{\imath} + \tfrac{4{,}5}{R}\hat{\jmath}\right) = 4(-4{,}5\ \hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}) - 6^2(-3\,\hat{\imath} + 4{,}5\,\hat{\jmath}) =$$

$$= -18\,\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 108\,\hat{\imath} - 162\hat{\jmath} = 90\,\hat{\imath} - 174\ \hat{\jmath}\ {}^{\text{cm}}/_{s^2}$$

Vejam que ao analisar as acelerações iremos compreender qual a velocidade esperada em algum ponto seguinte ao estudado. Por exemplo, a velocidade no ponto A era exclusivamente horizontal, apontando para a esquerda. Nesse ponto a aceleração possui componentes tanto horizontal quanto vertical negativas. Isso pose ser verificado no ponto B, cuja velocidade possui ambas componentes negativas.
Mas, quando B passe a estar na posição sobre o eixo x, (a 90º do ponto A) sua velocidade tangencial terá unicamente componente vertical, apontando para abaixo (negativa). Assim, analisando a aceleração encontrada, $\vec{a}_B$, pode se compreender que a componente horizontal positiva dessa aceleração irá compensar a componente horizontal negativa da velocidade para que nesse ponto, (a 90º do ponto A) , a velocidade tenha unicamente componente vertical, sentido para abaixo.