VII. Derivadas das funções trigonométricas

1. A medida em radianos de um ângulo

As derivadas das funções trigonométricas ficam mais simples quando o ângulo é medido em radianos. A Figura 1 esquematiza a geometria da medida de um ângulo. O pontilhado representa uma circunferência de raio *r* com origem na interseção das duas retas que definem o ângulo θ. Essa interseção das retas foi designada por O na figura. O arco de circunferência delimitado pelas duas retas foi chamado de *s*. Dizemos que a medida do ângulo em radianos é

$$\theta = \frac{s}{r} \ .$$

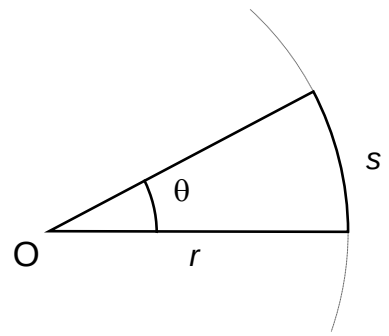

Figura 1. A linha tracejada é uma parte de uma circunferência de raio *r* centrada em O. O arco em linha cheia *s* é subtendido pelo ângulo θ.

Dessa maneira, uma volta inteira, que corresponde a 360º , vale, em radianos,

$$\text{volta inteira} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim, descobrimos que a medida de um ângulo em graus é transformada para radianos pela fórmula

$$\theta_{rad} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{graus}}{360^o}$$

A correspondência entre as medidas em graus e radianos dos ângulos mais usados estão na tabela 1.

Tabela 1. Na mesma coluna, estão as medidas em graus e radianos dos ângulos mais comuns.

graus	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
radianos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

2. Determinação da derivada de uma função trigonométrica

As derivadas das funções trigonométricas precisam de alguma explicação a mais. Antes de chegarmos às regras analíticas, faça um exercício com um exemplo numérico.

Questão 1. Procedendo como na tabela 2.1 da página 27 do livro do Resnick, determine a velocidade em t = 0,0 s da extremidade de um pêndulo de um relógio de parede, que move-se de acordo com a equação horária

$$x(t) = 10\ \text{sen}(2\pi t),$$

onde x está em cm quando t está em segundo e o argumento do seno está em radianos (o fator 2π que multiplica t no argumento do seno seria diferente se o argumento fosse em graus – esta questão de radianos ou graus é muito importante quando falamos de funções trigonométricas).

O cálculo da derivada do seno pode ser realizado de maneira parecida com o efetuado para derivar as potências de x:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x+\Delta x)-sen(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x)\cos(\Delta x)+sen(\Delta x)\cos(x)-sen(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x)\left(\cos(\Delta x)-1\right)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x)sen(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= sen(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\cos(\Delta x)-1\right)}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

A segunda linha da dedução acima foi obtida pela expansão do $\text{sen}(x+\Delta x)$. Para obter o resultado final, usamos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\cos(\Delta x)-1\right)}{\Delta x}=0\ .$$

A razão $\dfrac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$ só tende a 1 quando o ângulo tende a zero se o ângulo for medido em radianos. As fórmulas que estamos apresentando, portanto, exigem que trabalhemos em radianos.

3. Tabela de derivadas das funções trigonométricas

função	derivada	condição
$f(x) = \text{sen}(ax+b)$	$\frac{df}{dx} = a\cos(ax+b)$	*ax* medido em radianos
$f(x) = \cos(ax+b)$	$\frac{df}{dx} = -a\,\text{sen}(ax+b)$	*ax* medido em radianos

Como um exemplo direto de aplicação, a função

$$f(t) = 5t^4 + 2\cos(3\pi t)$$

tem como derivada a função

$$\frac{df}{dt} = 20t^3 - 6\pi\,\text{sen}(3\pi t)$$

As integrais do seno e cosseno são encontradas buscando as funções cujas derivadas são essas funções. Uma tabela dessas integrais está no item 4 abaixo.

4. Tabela de integrais das funções trigonométricas

função	Primitiva $F = f(x)\,dx$	condição
$f(x) = \text{sen}(ax+b)$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$	*ax* medido em radianos, C constante de integração
$f(x) = \cos(ax+b)$	$\frac{\text{sen}(ax+b)}{a} + C$	*ax* medido em radianos, C constante de integração