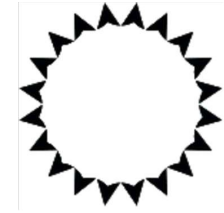




PEF2603
Estruturas na Arquitetura III -
Sistemas Reticulados e Laminares



Tensões de Cisalhamento na Flexão e na
Torção

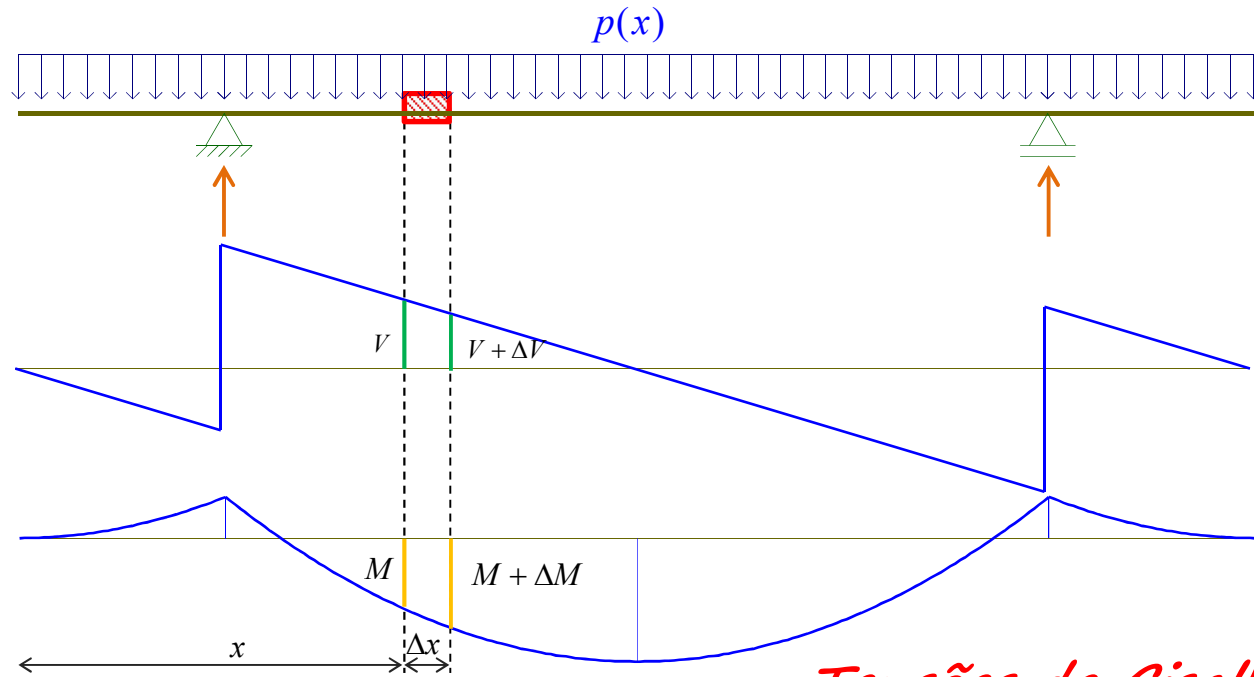
(25/02/2019)

Professores

Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Cristina Meneghetti, Luís Bitencourt

1º Semestre 2019

TENSÕES de CISCALHAMENTO na FLEXÃO

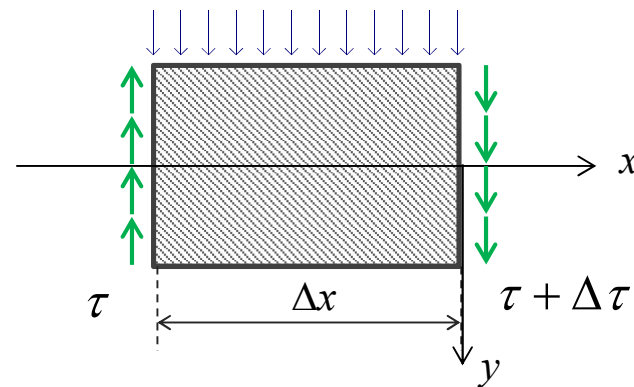
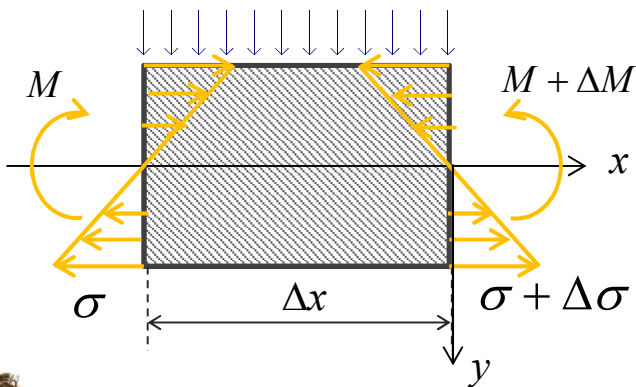


Tensões de Cisalhamento

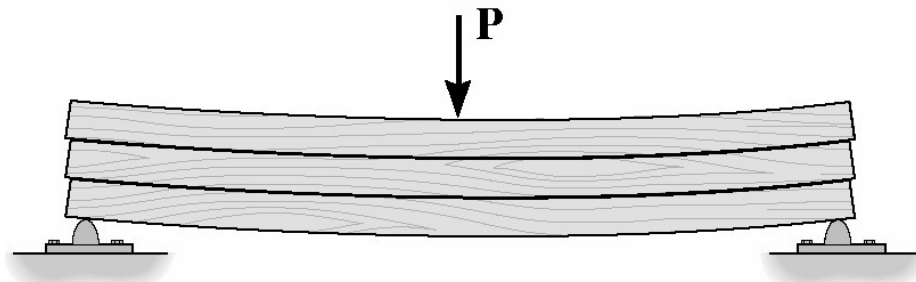
τ

Tensões Normais

σ

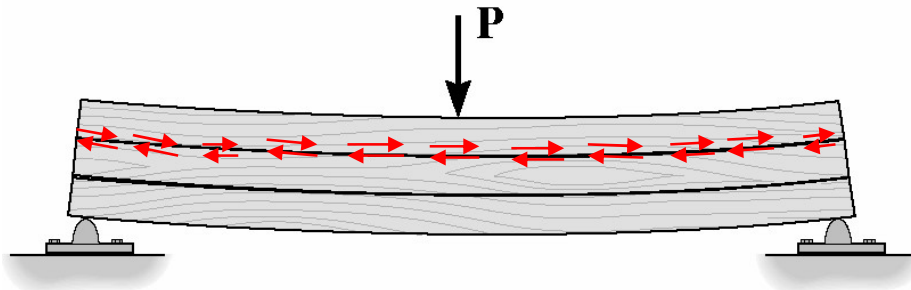


Peças de madeira simplesmente empilhadas



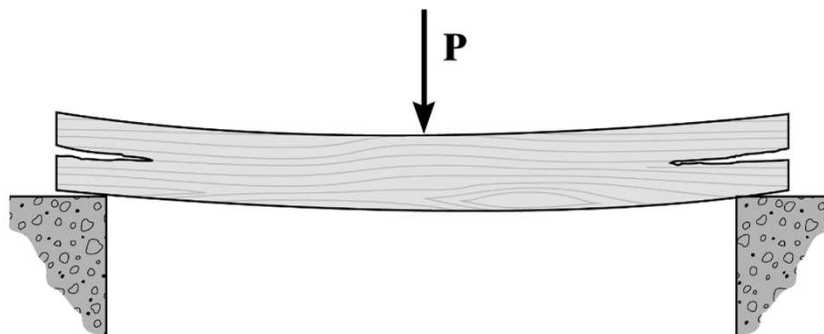
Tendência de deslizamento de uma tábua em relação à outra

Peças de madeira coladas



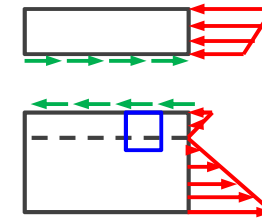
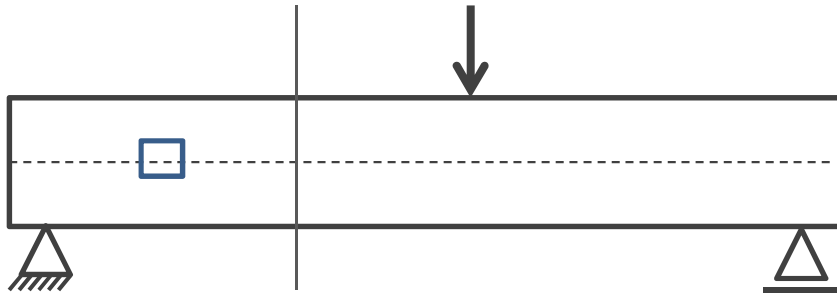
Surgimento de tensões horizontais de cisalhamento como consequência da tendência ao deslizamento

Em uma peça única....

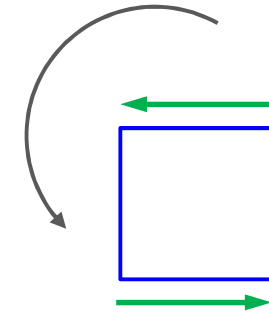


Falha típica por cisalhamento em vigas de madeira





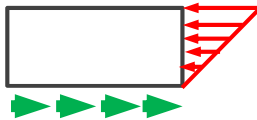
Tensões em uma porção da viga



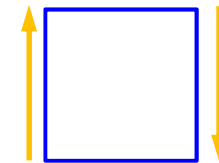
Momento produzido pelas tensões de cisalhamento horizontais



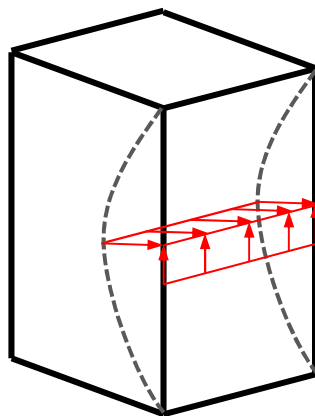
Próximo à superfície as forças horizontais são pequenas, pois se desenvolvem em uma pequena área



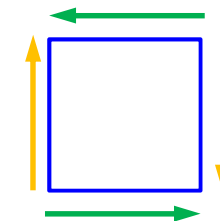
Na linha neutra, se desenvolvem as máximas forças horizontais possíveis



Momento produzido pelas tensões de cisalhamento verticais



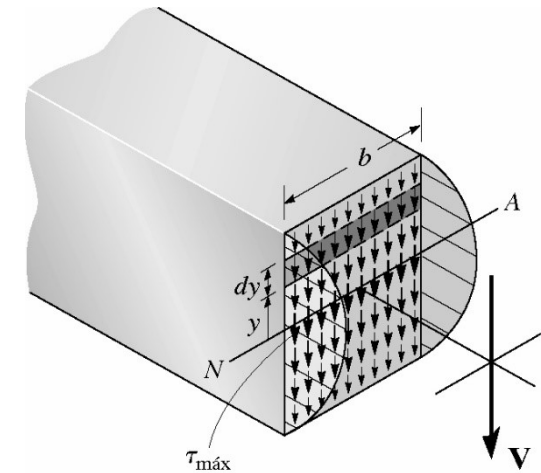
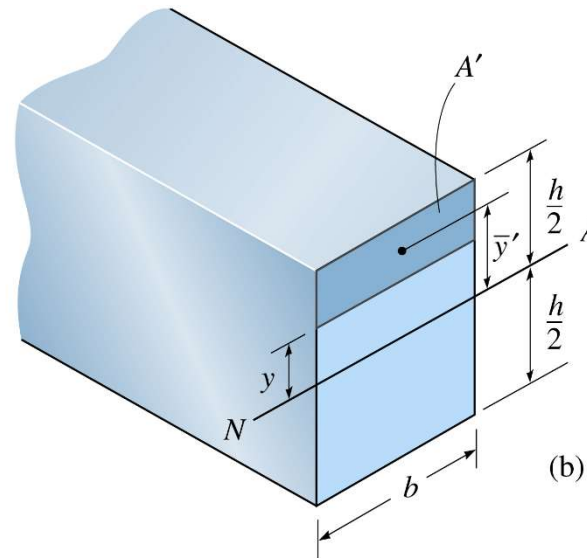
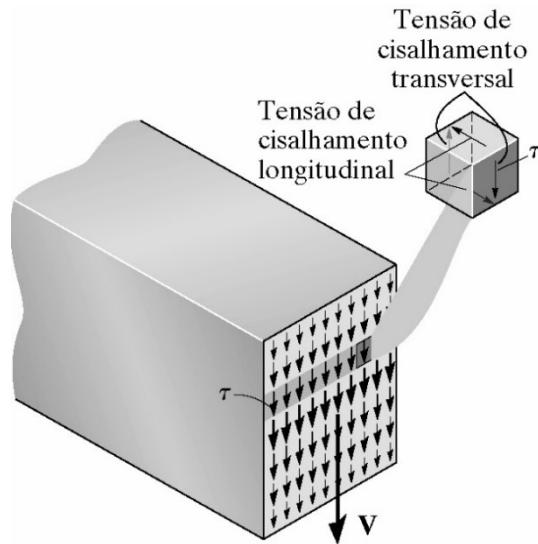
Variação das tensões em uma viga retangular



Equilíbrio de momentos



Fórmula para cálculo da tensão de cisalhamento τ



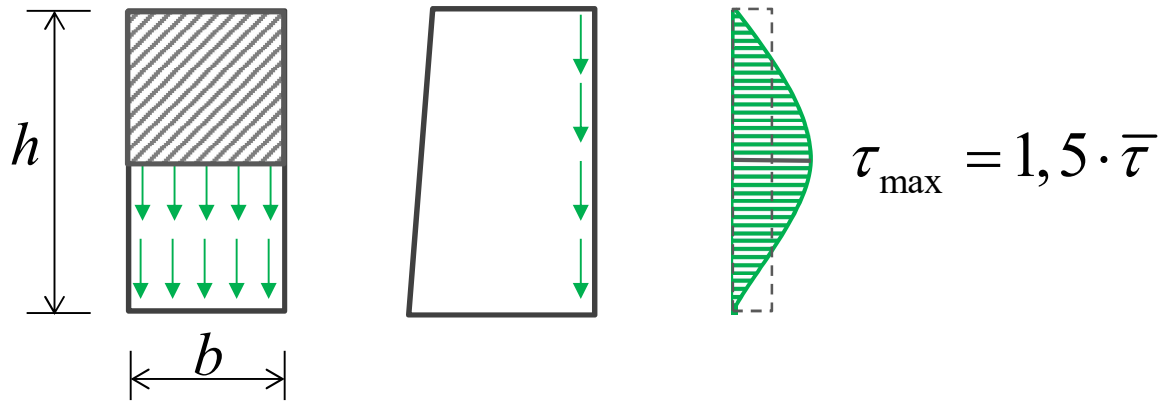
$$\tau = \frac{Vs^*}{Ib} \quad s^* = A' \cdot \bar{y}'$$

$$V = \int_{ST} \tau dA$$

onde: $\left\{ \begin{array}{l} V = \text{esforço cortante na seção} \\ s^* = \text{momento estático área hachurada} \\ I = \text{momento de inércia} \\ b = \text{base da área hachurada} \end{array} \right.$



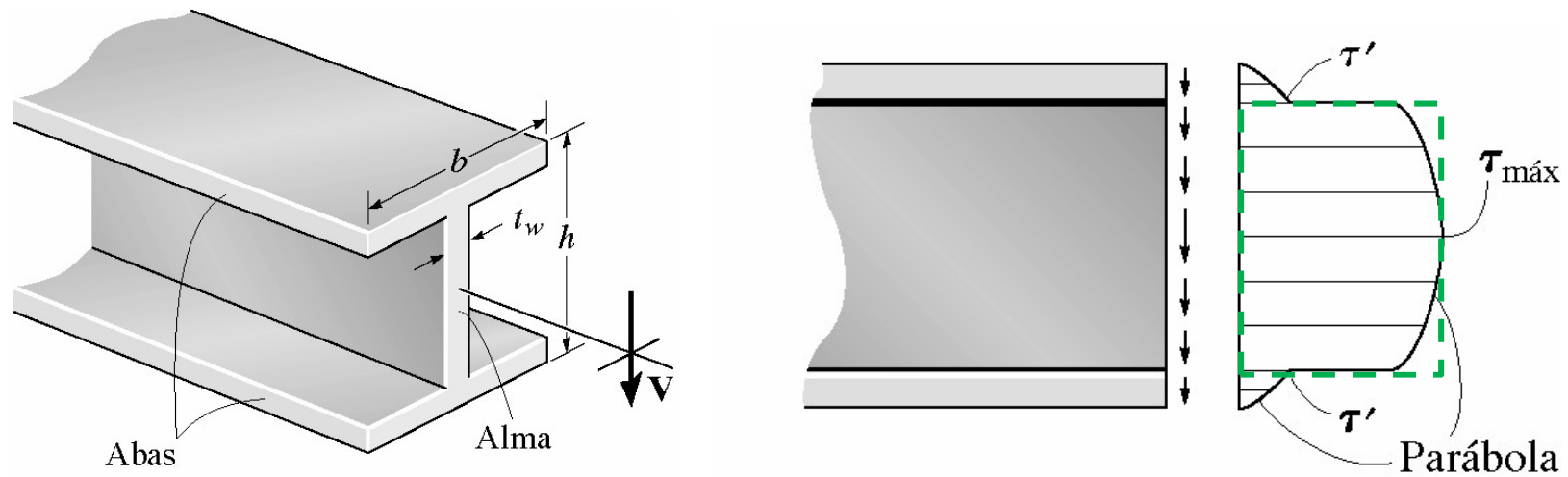
Para uma seção retangular, a distribuição de tensões é parabólica e o seu valor máximo situa-se na linha neutra.



$$\tau = \frac{Vs^*}{Ib} = \frac{V(A \cdot \bar{y})}{Ib} = \frac{V(bh/2)(h/4)}{(bh^3/12)b} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A}$$



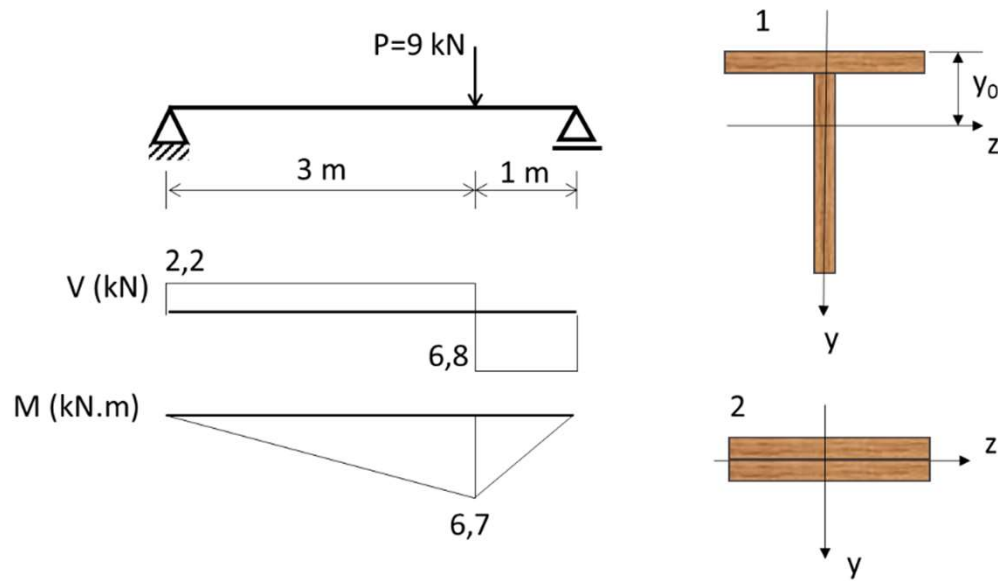
Distribuição de tensões em um perfil metálico I



$$\tau_{\text{max}} \cong \bar{\tau}$$



Exemplo: P2/Q3, 2015 (3,0) Uma viga bi-apoiada deve ser construída por meio da colagem de duas placas de madeira (2,5 cm x 15 cm). Os diagramas de esforços solicitantes, devido a atuação de uma carga pontual $P=9\text{ kN}$, estão mostrados na figura abaixo. Considerando que a seção transversal da viga possa assumir duas configurações distintas, conforme pode ser visto na figura, escolha a seção mais eficiente.



Respostas	Valor	Unidade
$Y_{0,1}$	5,625	cm
$I_{z0,1}$	2158,2	cm ⁴
$I_{z0,2}$	156,25	cm ⁴
τ_1	2,1	MPa
$\sigma_{c,1}$	-17,5	MPa
$\sigma_{t,1}$	36,4	MPa
τ_2	1,4	MPa
$\sigma_{c,2}$	-107,2	MPa
$\sigma_{t,2}$	107,2	MPa
Seção escolhida	Configuração 1	

Esforços solicitantes:

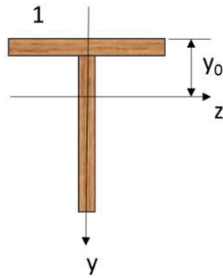
$$V = 6,8 \text{ kN} \quad ; \quad M = 6,7 \times 10^2 \text{ kNcm}$$

Dimensões das placas:

$$b = 2,5 \text{ cm} \quad ; \quad h = 15 \text{ cm}$$



1. CONFIGURAÇÃO 1:



1.2 Momento de Inércia:

$$I_1 = \frac{hb^3}{12} + (b \times h) \times \left(y_0 - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{bh^3}{12} + (b \times h) \times \left(\left(b + \frac{h}{2} \right) - y_0 \right)^2$$

$$I_1 = 2158,2 \text{ cm}^4 = 2,1582 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

1.3 Momento estático na altura da interface: $S_1 = (b \times h) \times \left(y_0 - \frac{b}{2} \right) = 164,06 \text{ cm}^3 = 1,6406 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

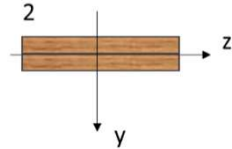
1.4 Tensão de cisalhamento na interface: $\tau_1 = \frac{VS_1}{bI_1} = 0,20677 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 2,0677 \text{ MPa}$

1.5. Máxima tensão de compressão: $\sigma_{c,1} = -\frac{M}{I_1} y_0 = -1,7462 \text{ kN} / \text{cm}^2 = -17,462 \text{ MPa}$

1.6. Máxima tensão de tração: $\sigma_{t,1} = \frac{M}{I_1} (h + b - y_0) = 3,6865 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 36,42 \text{ MPa}$



2. CONFIGURAÇÃO 2:



2.1. altura do baricentro
(desde a face superior da viga):

$$y_2 = b = 2,5 \text{ cm}$$

2.2 Momento de Inércia:
$$I_2 = \frac{h \times (2b)^3}{12} = 156,25 \text{ cm}^4 = 1,5625 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

2.3 Momento estático na altura da interface:
$$S_2 = (b \times h) \times \left(\frac{b}{2}\right) = 46,875 \text{ cm}^3 = 4,6875 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

2.4 Tensão de cisalhamento na interface:
$$\tau_2 = \frac{VS_2}{hI_2} = 0,136 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 1,36 \text{ MPa}$$

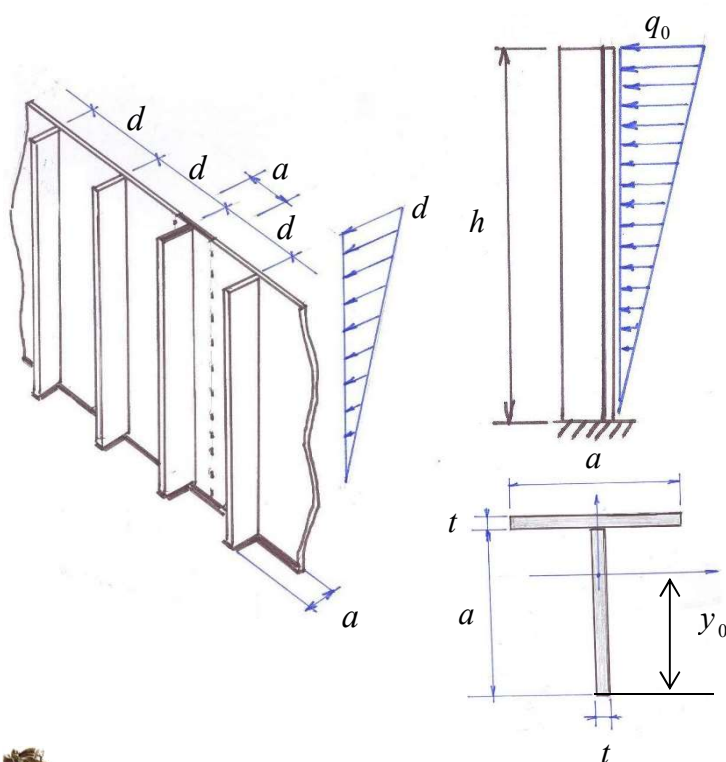
(Verificando: $\tau_2 = 1,5 \frac{V}{2A} = 1,5 \frac{V}{2(b \times h)} = 0,136 \text{ kN} / \text{cm}^2$, OK!)

2.5. Máxima tensão de compressão:
$$\sigma_{c,2} = -\frac{M}{I_2} y_2 = -10,72 \text{ kN} / \text{cm}^2 = -107,2 \text{ MPa}$$

1.6. Máxima tensão de tração:
$$\sigma_{t,2} = +\frac{M}{I_2} (2b - y_2) = 10,72 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 107,72 \text{ MPa}$$



Exercício: PSub, / Q2, 2008 (3,0) A parede de vidro mostrada na figura está sujeita a um carregamento transversal de intensidade máxima. A parede é reforçada por diafragmas de vidro, colados com PVB. Um estudo simplificado do comportamento estrutural da parede pode ser feito considerando uma viga equivalente, engastada em sua base, conforme mostrado na figura. Considerando $h = 5\text{m}$, $a = 20\text{cm}$, $t = 16\text{mm}$ e admitindo que a largura da mesa da seção transversal equivalente seja igual à largura dos diafragmas, resultam $I = 2940\text{cm}^2$; $A = 64\text{cm}^2$; $y_0 = 15,4\text{cm}$.



- determine o valor q_0 (em kN/m) do carregamento transversal a ser aplicado na viga equivalente;
- sendo $E_V = 70\text{GPa}$ o módulo de elasticidade do vidro, determine o máximo deslocamento lateral da parede;
- determine a máxima tensão de cisalhamento na cola de PVB.



Exercício: P2/ Q2 / 2006 (3,0) A figura abaixo esquematiza um degrau típico de uma escada, composto por duas placas de vidro laminado, coladas com uma camada de PVB (polivinil-butiral). A escada deve ser projetada para o carregamento indicado na figura, sendo o carregamento dado por $P = (3 + 0,2m)kN$, onde m é o penúltimo algarismo não-nulo de seu número USP.

(a) determine os diagramas de esforços solicitantes da viga, para esta condição de carregamento;

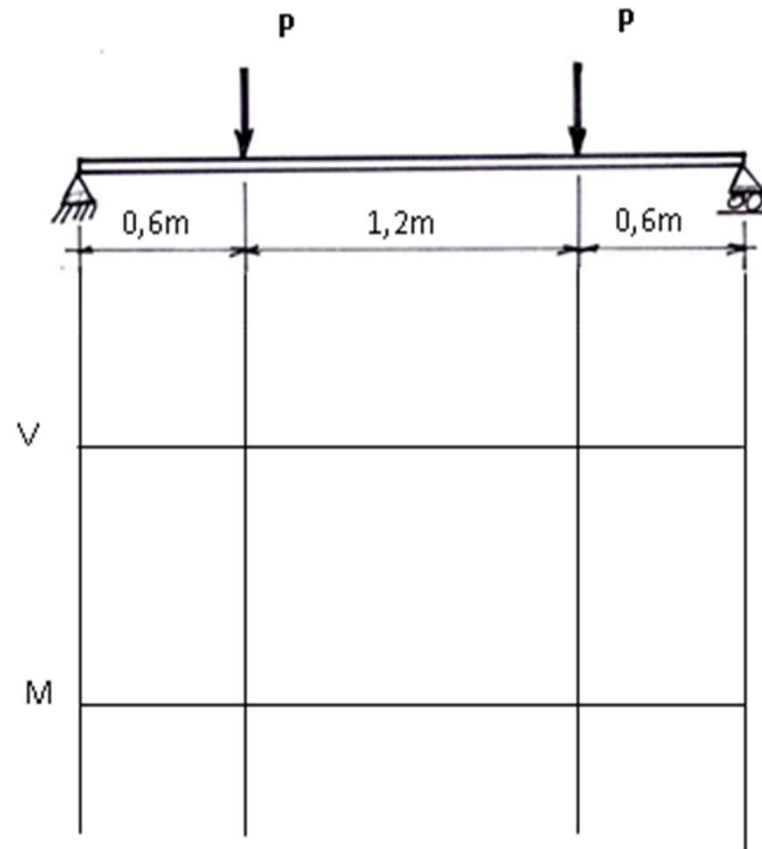
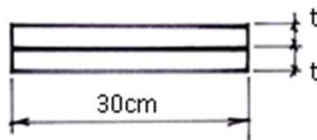
(b) determine as espessuras mínimas das placas de vidro, sabendo que a escada deve trabalhar com um fator de segurança $s=3$, e que as tensões de ruptura do vidro são

$$\sigma_R^t = 45MPa \quad (\text{à tração})$$

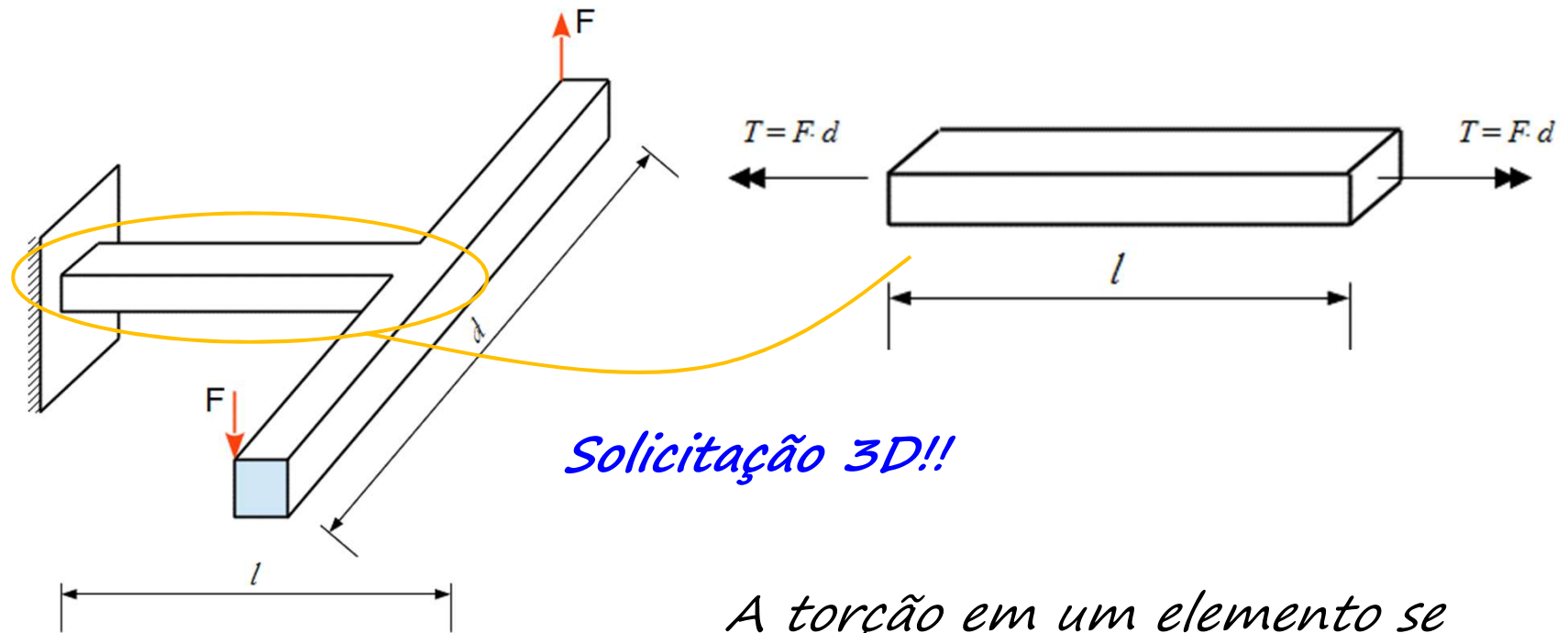
$$\sigma_R^c = 800MPa \quad (\text{à compressão});$$

despreze a espessura do filme de PVB;

(c) com essas dimensões, determine a tensão de ruptura ao cisalhamento que deve ser especificada para o filme de PVB.



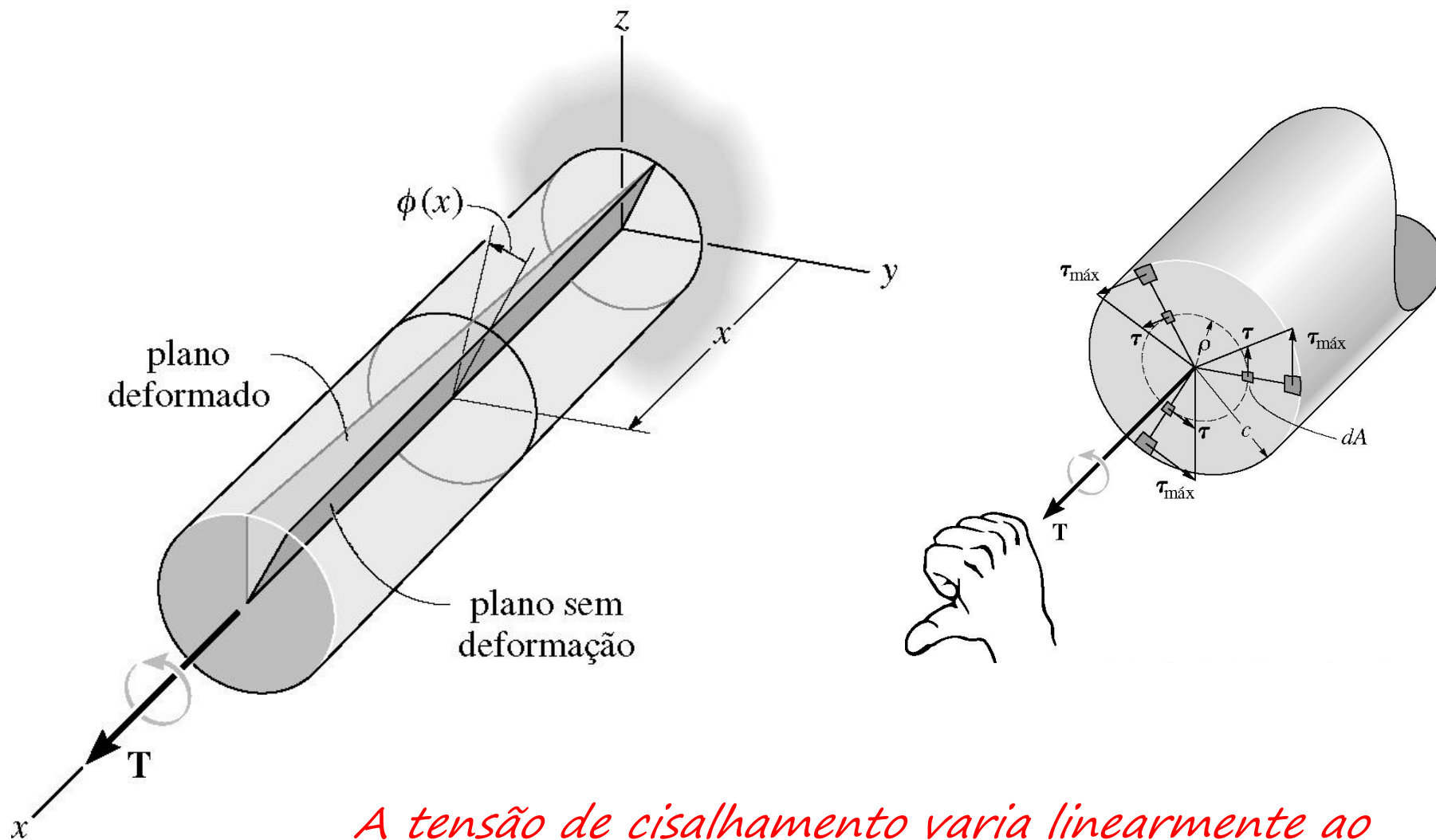
TENSÕES de CISALHAMENTO na TORÇÃO



Solicitação 3D!!

A torção em um elemento se desenvolve pela aplicação direta de um momento torsional ou indiretamente pela aplicação de forças ou momentos em um outro elemento estrutural





A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada reta radial da seção transversal, e é proporcional à distância ao baricentro da seção transversal



Cisalhamento na torção

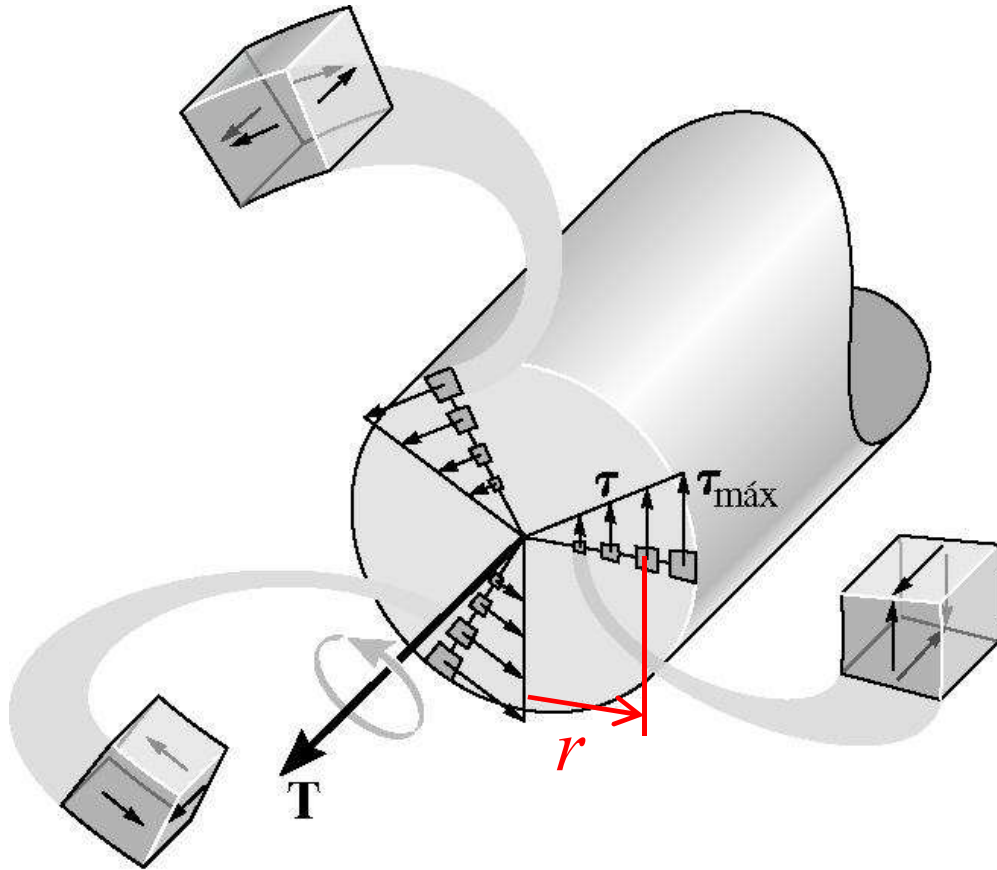
$$\tau_{(r)} = \frac{T}{J_o} r$$

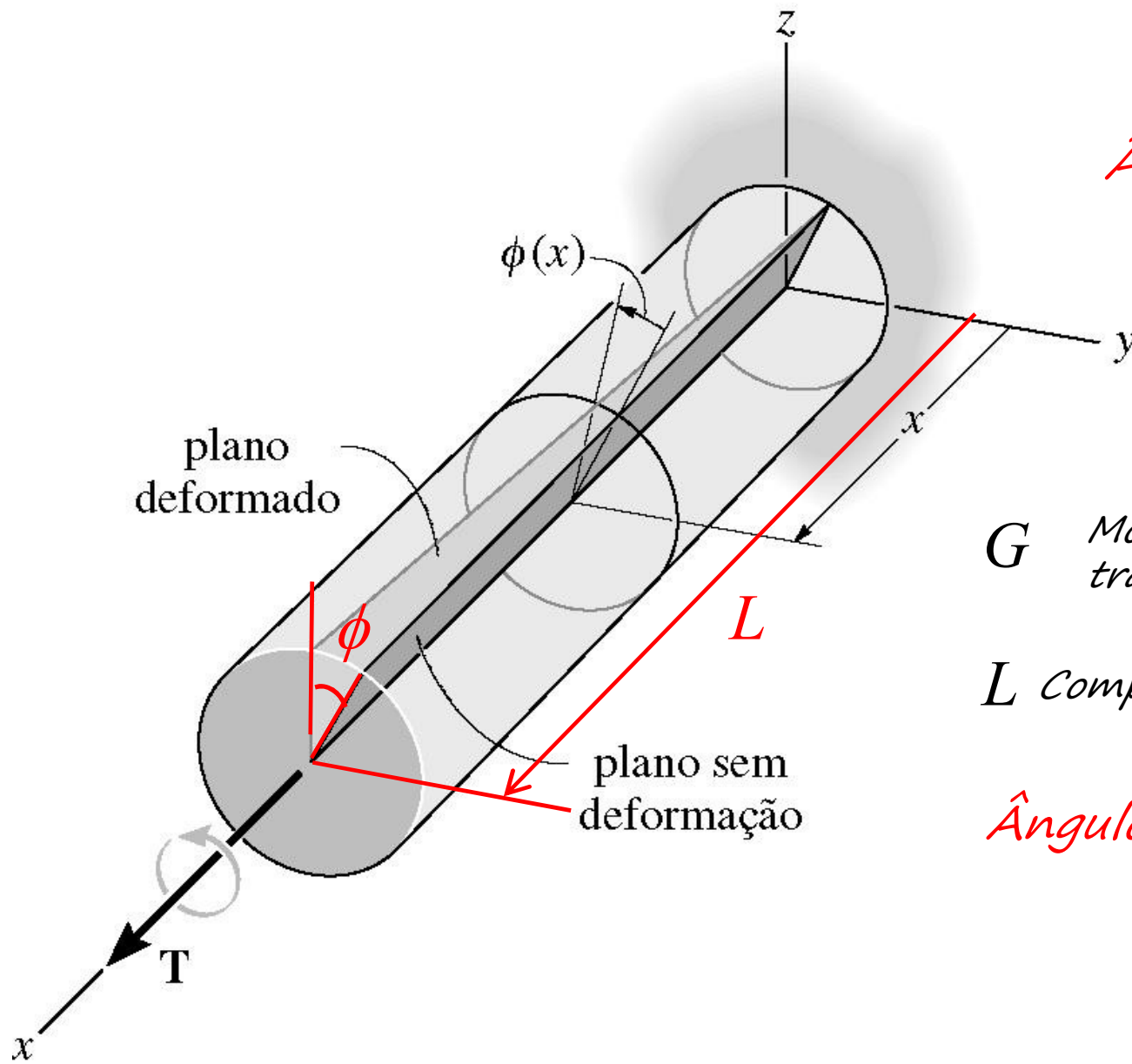
T Momento torsor

r Raio

J_o Momento Polar de inércia

$$J_o = I_{y_o} + I_{z_o}$$





Ângulo de torção

$$\phi(x) = \frac{Tx}{GJ_o}$$

G *Módulo de elasticidade transversal*

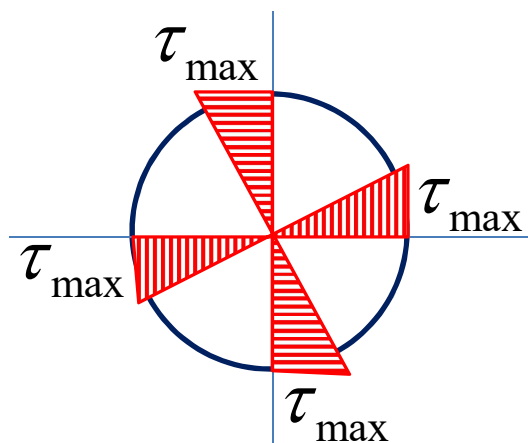
L *Comprimento do eixo*

Ângulo total de torção

$$\phi = \frac{TL}{GJ_o}$$



Tensões de cisalhamento devidas à torção em uma barra de seção transversal circular:



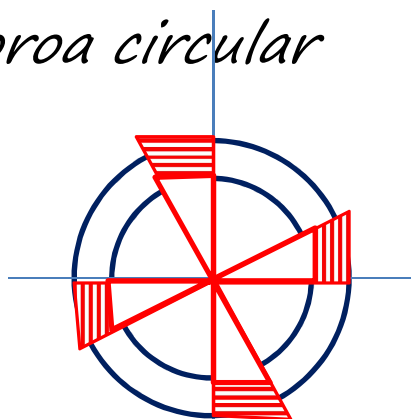
$$J_o = 2I_{z_o} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\pi d^4 / 32} \cdot d/2 = \frac{T}{\pi d^3 / 16}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

Módulo de resistência à torção

Seção coroa circular

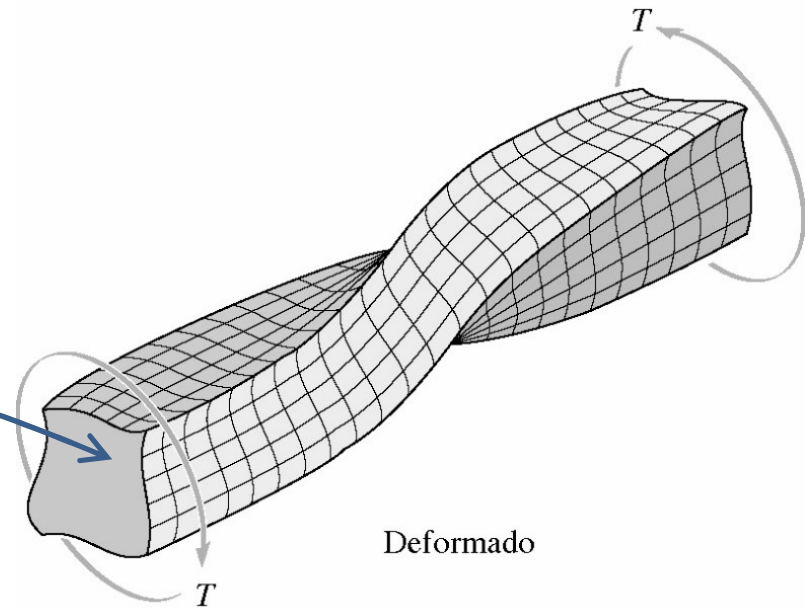


$$J_o = \frac{\pi (d_e^4 - d_i^4)}{32}$$

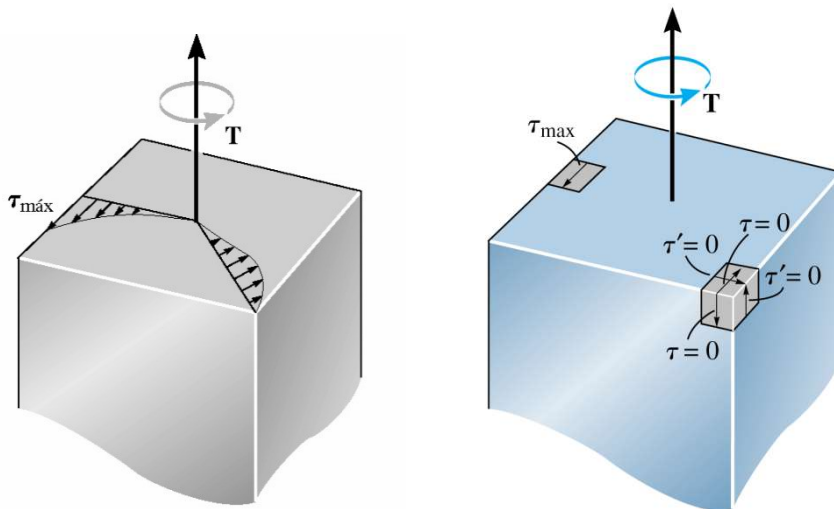


A análise torção em eixos de seção não circular torna-se mais complexa

*Empenamento:
seção transversal deixa de ser plana!*



Distribuição de tensões ao longo de duas retas radiais



Resolução numérica para uma seção quadrada de lado "a"

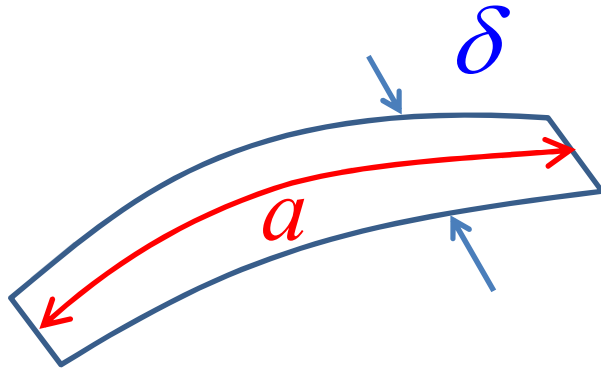
$$\tau_{\max} = \frac{T}{0,208 \cdot a^3}$$

Seções retangulares:

$$\tau = \frac{T}{\alpha hb^2}$$



Seções abertas de parede fina

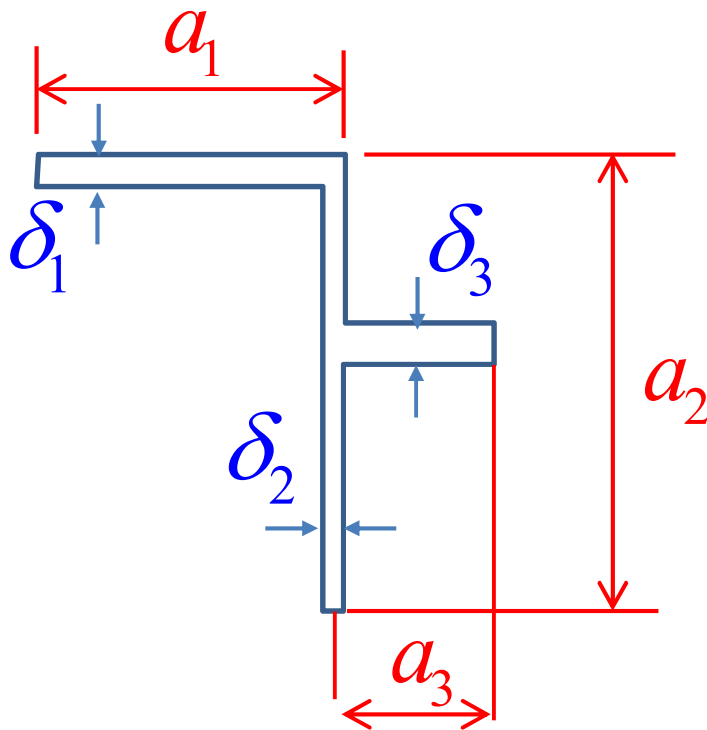


$$\tau = \frac{T}{W_t}$$

$$W_t = \frac{a\delta^2}{3}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_t}$$

$$I_t = \frac{a\delta^3}{3}$$



$$I_t = \sum \frac{a_i \delta_i^3}{3}$$

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}$$

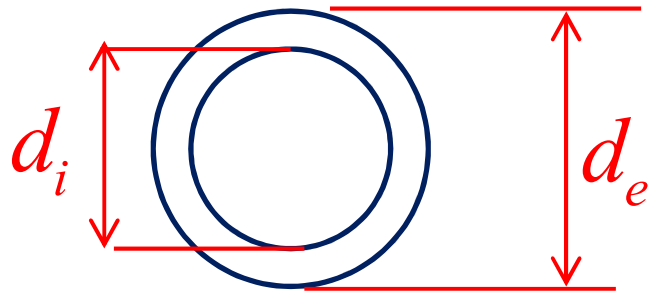
τ_{\max} ocorre na parede de maior espessura!



Exemplo:

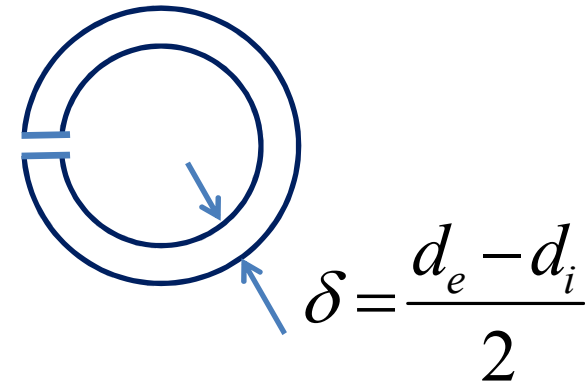
Comparar a rigidez e a resistência de um tubo íntegro e um tubo cortado longitudinalmente

(1) Tubo íntegro



$$\phi_1 = \frac{TL}{GI_P}$$

(2) Tubo cortado



$$\phi_2 = \frac{TL}{GI_t}$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{I_P}{I_t}$$



Exemplo:

Rigidez:

$$I_P = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)$$

$$I_t = \frac{a\delta^3}{3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{d_e + d_i}{2} \right) \left(\frac{d_e - d_i}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{48} (d_e + d_i) (d_e - d_i)^3$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{3}{2} \frac{(d_e^4 - d_i^4)}{(d_e + d_i) (d_e - d_i)^3}$$

Por exemplo: $d_e = 20\text{cm}$; $d_i = 18\text{cm}$ $\therefore \frac{\phi_2}{\phi_1} = 271,5$



Exemplo:

Resistência: Tubo íntegro:

$$\tau_{\max,1} = \frac{T}{I_P} \cdot \frac{d_e}{2}$$

Tubo cortado

$$\tau_{\max,2} = \frac{T}{I_t} \cdot \delta = \frac{T}{I_t} \cdot \left(\frac{d_e - d_i}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = \frac{I_P}{I_t} \cdot \frac{2\delta}{d_e} = \frac{I_P}{I_t} \cdot \frac{d_e - d_i}{d_e}$$

$$\frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = \frac{3}{2} \frac{(d_e^4 - d_i^4)}{(d_e + d_i)(d_e - d_i)^3} \frac{d_e - d_i}{d_e} = \frac{3}{2} \frac{(d_e^4 - d_i^4)}{d_e (d_e + d_i)(d_e - d_i)^2}$$

Para: $d_e = 20\text{cm}$; $d_i = 18\text{cm}$ $\therefore \frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = 27,15$

