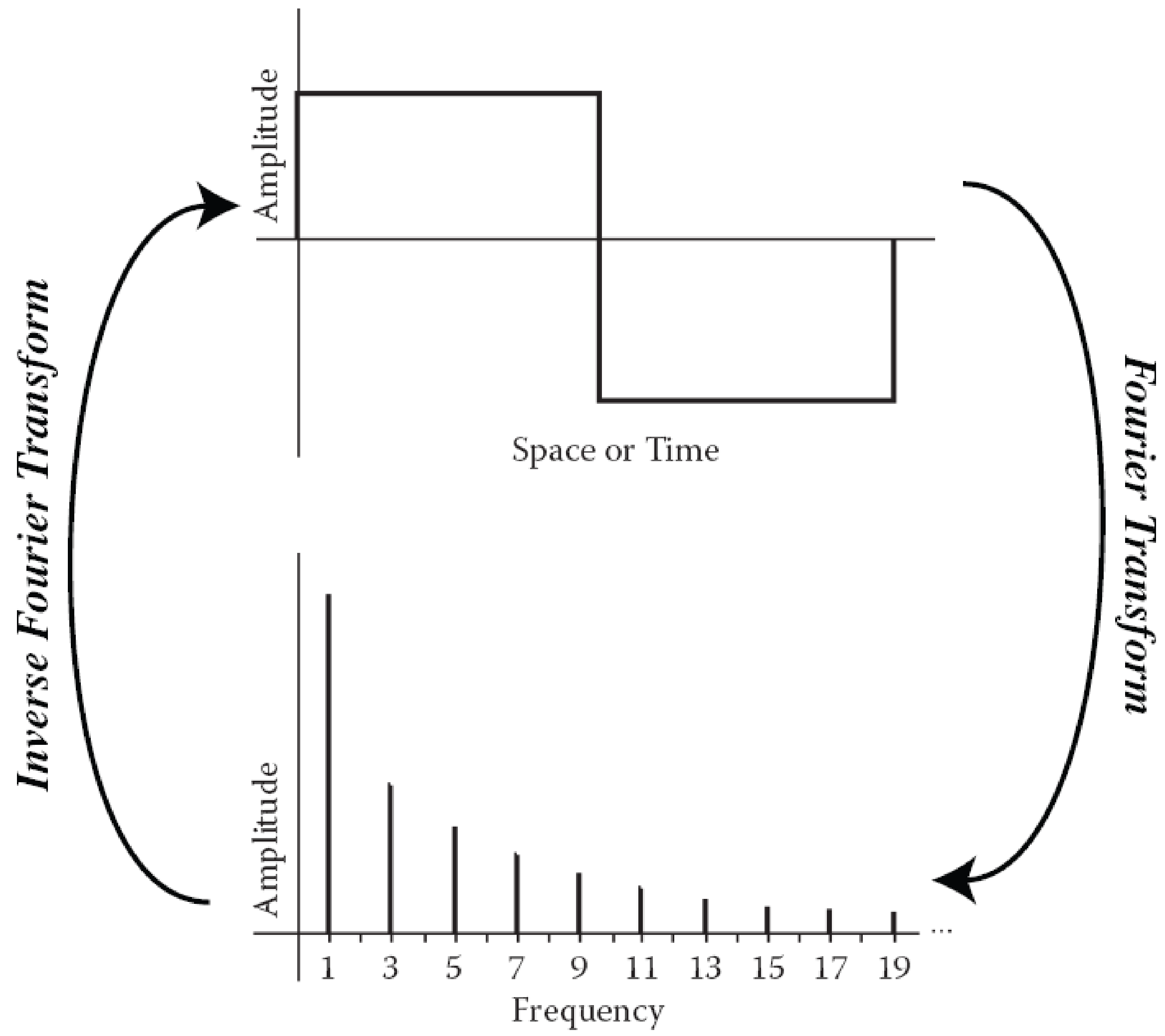
SEL 0449 - Processamento Digital de Imagens Médicas

Aula 5 – Propriedades da Transformada de Fourier

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira

mvieira@sc.usp.br

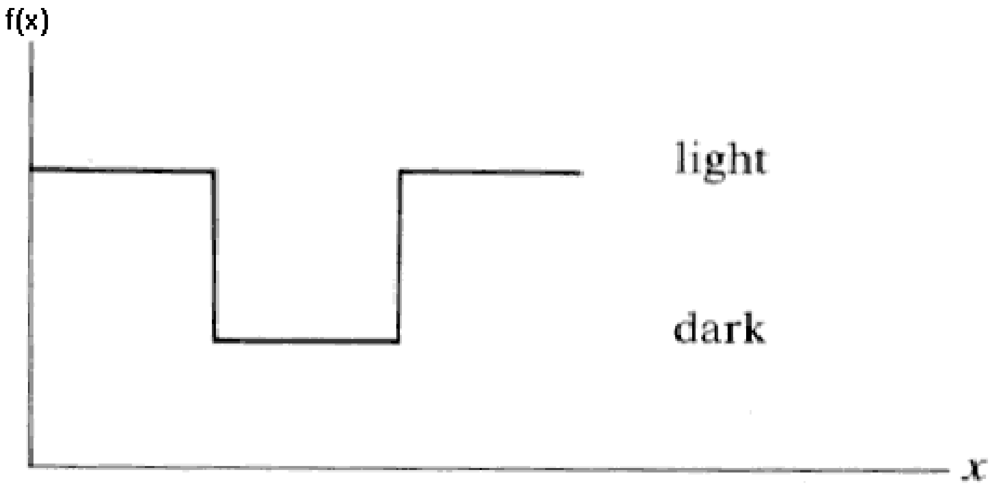
Transformada de Fourier



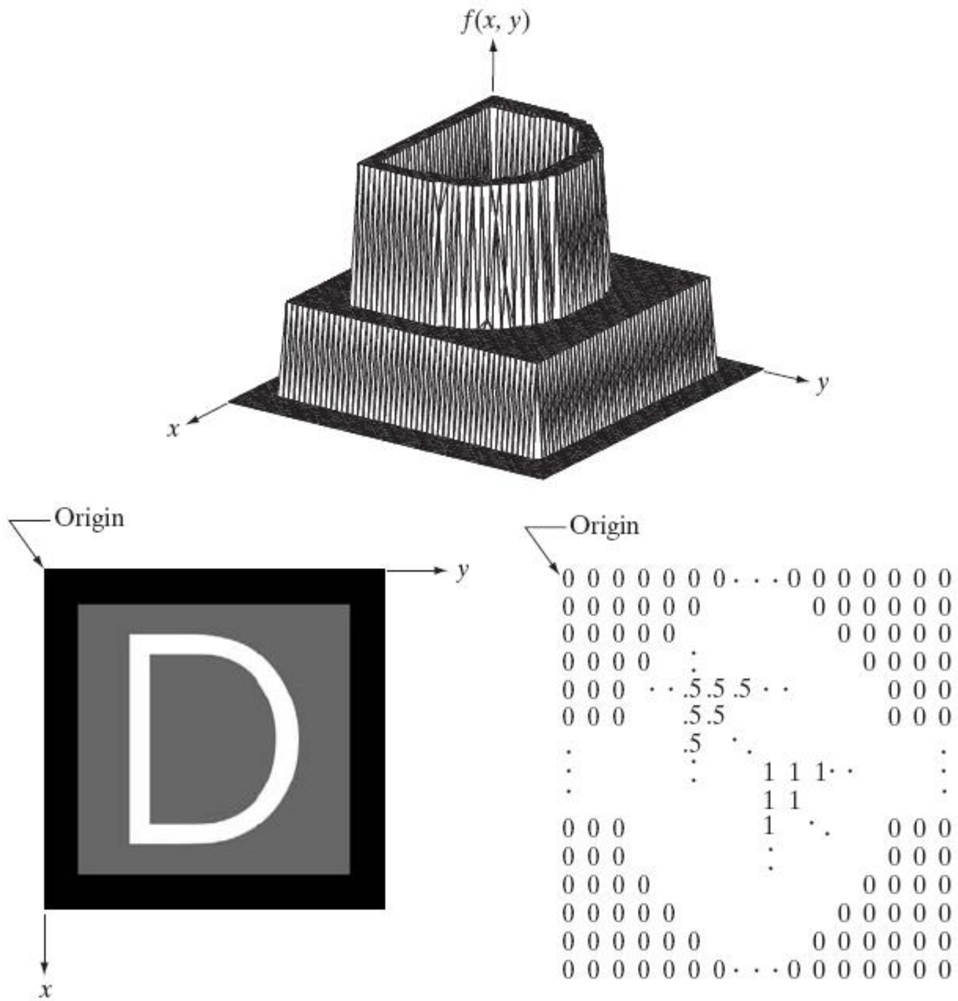
E em uma Imagem?

Uma linha de uma imagem formada por uma sequência de pixels de diferentes intensidades:

Pode ser representada no domínio do espaço como uma forma de onda:

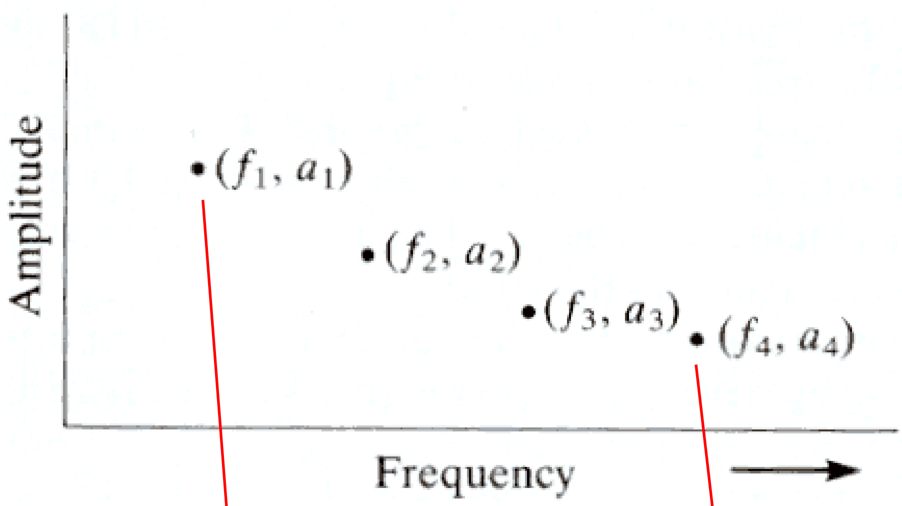


Representação de uma Imagem como uma função bidimensional



Domínio da frequência

E no **Domínio da Frequência** pode ser representada por uma soma de senos e cossenos, através de suas frequências (f) e amplitudes (a):



Que podem ser colocadas no formato de uma imagem como uma linha de amplitudes em escala de cinza.

Transformada inversa

Diz-se então, que a imagem gerada através das amplitudes das frequências:

É a **Transformada no domínio da frequência** da imagem original dada no domínio do espaço:

É possível aplicar sobre a imagem no domínio da frequência, uma **Transformada Inversa**, obtendo a Imagem original.

Propriedades da DFT 2-D

1) Periodicidade e Simetria Conjugada

	Domínio do espaço*		Domínio da frequência*
1	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2	$f(x, y)$ imaginária	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow$	$R(u, v)$ par; $I(u, v)$ ímpar
4	$f(x, y)$ imaginária	$\Leftrightarrow$	$R(u, v)$ ímpar; $I(u, v)$ par
5	$f(-x, -y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u, v)$ complexa
6	$f(-x, -y)$ complexa	$\Leftrightarrow$	$F(-u, -v)$ complexa
7	$f^*(x, y)$ complexa	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u, -v)$ complexa
8	$f(x, y)$ real e par	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real e par
9	$f(x, y)$ real e ímpar	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginária e ímpar
10	$f(x, y)$ imaginária e par	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginária e par
11	$f(x, y)$ imaginária e ímpar	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real e ímpar
12	$f(x, y)$ complexa e par	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complexa e par
13	$f(x, y)$ complexa e ímpar	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complexa e ímpar

Propriedades da DFT 2-D

1) Periodicidade e Simetria Conjugada

A transformada discreta de Fourier (DFT) e sua inversa são periódicas:

$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$

Sendo N a dimensão da imagem.

Se f(x,y) for real, a DFT apresenta simetria conjugada:

$$F(u,v) = F^{*}(-u,-v)$$

ou

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

Exemplo unidimensional

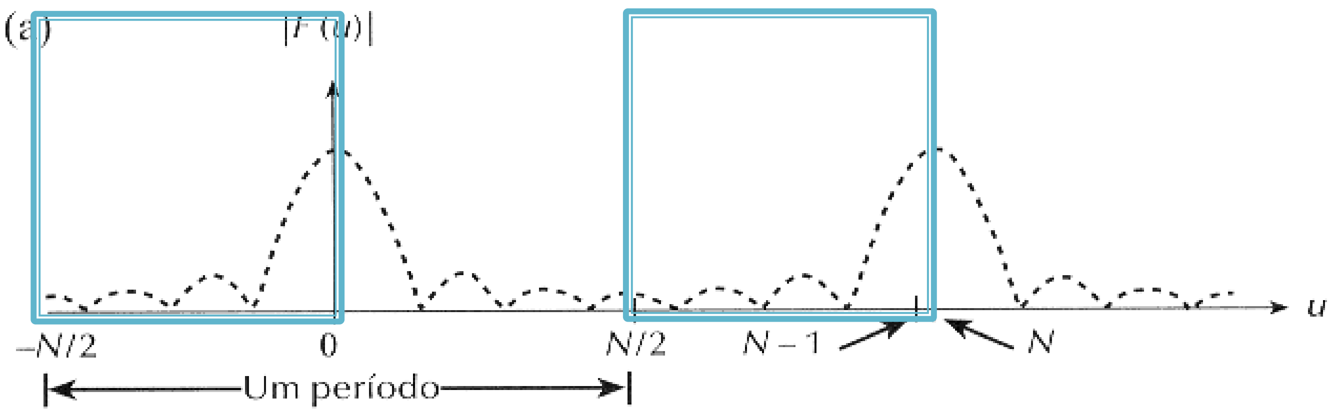
1) Periodicidade e Simetria Conjugada

$$F(u) = F(u+N)$$

$$|F(u)| = |F(-u)|$$

Magnitude centrada na origem

Reflexões



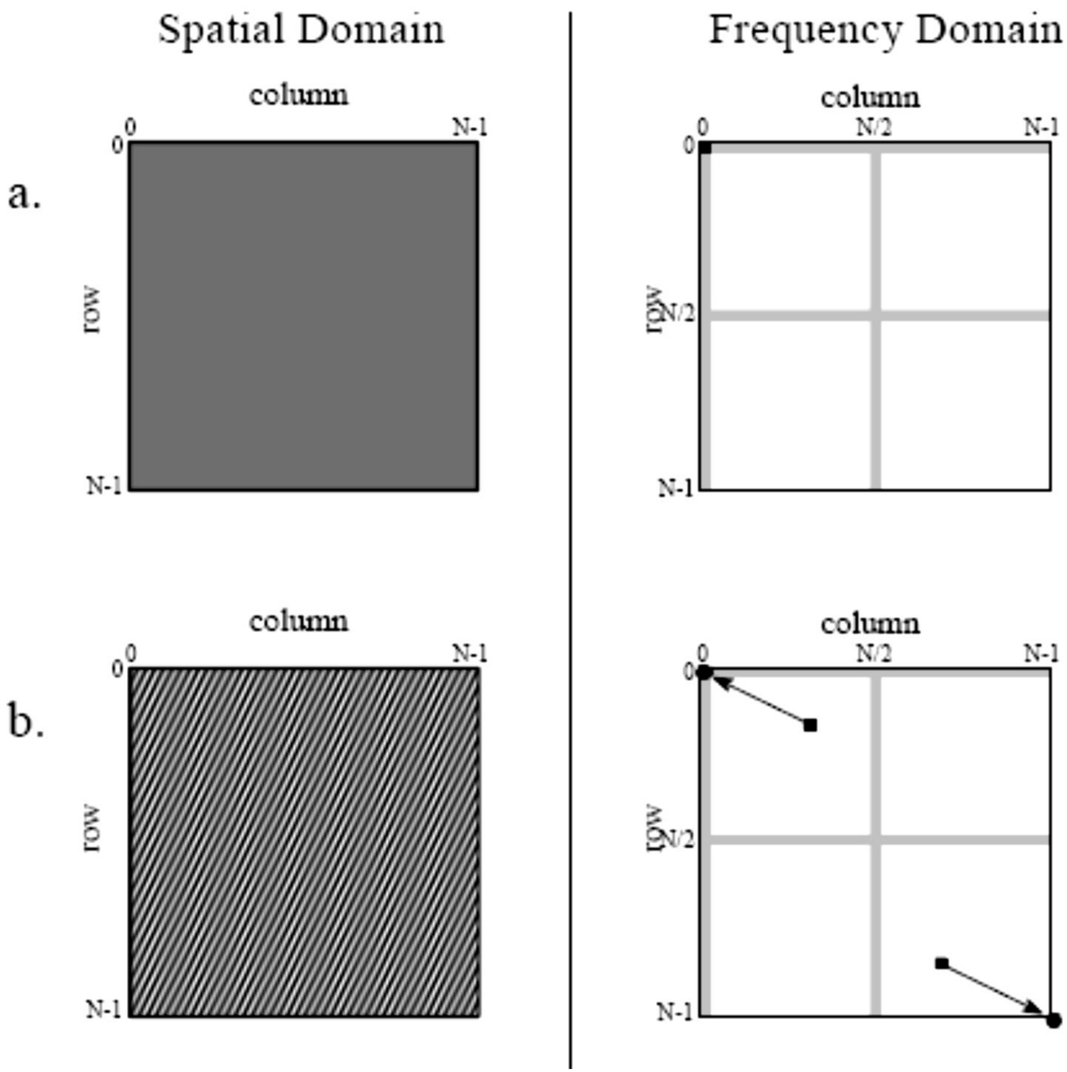
A transformada é formulada para valores de u no intervalo [0, N-1]

Espectro de Fourier 2-D (imagem)

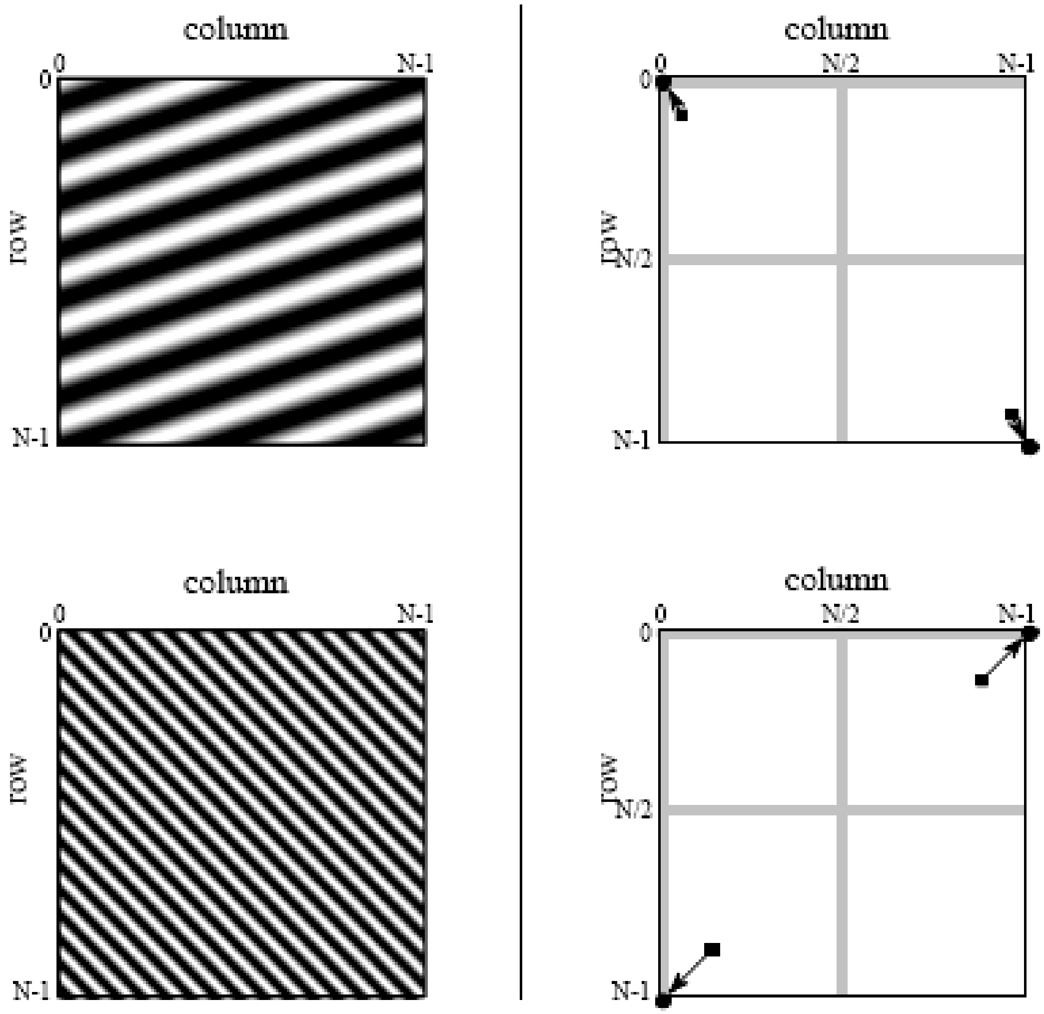
- Para uma função unidimensional, o espectro de Fourier fornece informação (frequência, amplitude e fase) sobre as senóides (1D) que devem ser somadas para formar a função desejada;

- Para uma função bidimensional, o espectro de Fourier fornece informação (frequência, amplitude, fase e direção) sobre as ondas senoidais (2D) que devem ser somadas para formar a função desejada;

Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)



Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)



Propriedades da Transformada 2-D

2) Translação

Multiplicar f(x,y) pelo termo exponencial, conforme abaixo, e fazer a transformada deste produto, resulta em um deslocamento da origem do plano das frequências para o ponto (u_0,v_0).

$$f(x,y)\exp\left[j2\pi\left(u_0x+v_0y\right)/N\right]\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

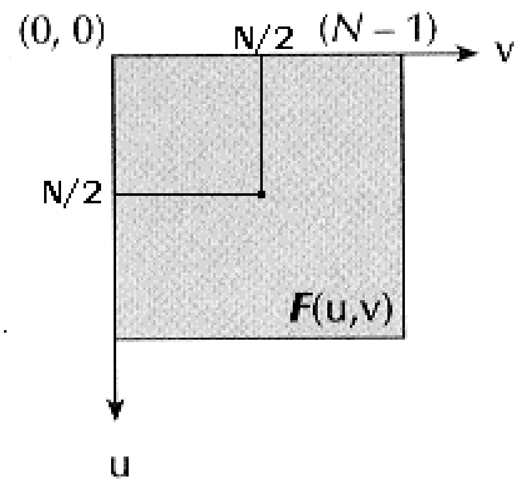
Multiplicar F(u,v) pelo termo exponencial, conforme abaixo, e fazer a Transformada Inversa deste produto, resulta em um deslocamento da origem do plano espacial para o ponto (x_0,y_0).

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)\exp\left[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N\right]$$

Propriedades da Transformada 2-D

Fazendo $u_0 = v_0 = N/2$ a origem da transformada de Fourier de f(x,y) pode ser movida para o centro do quadrado de frequências N x N.

$$\exp\left[j2\pi(u_0 x + v_0 y)/N\right] = e^{j\pi(x+y)} = \cos\pi + j sen\pi = (-1)^{x+y}$$



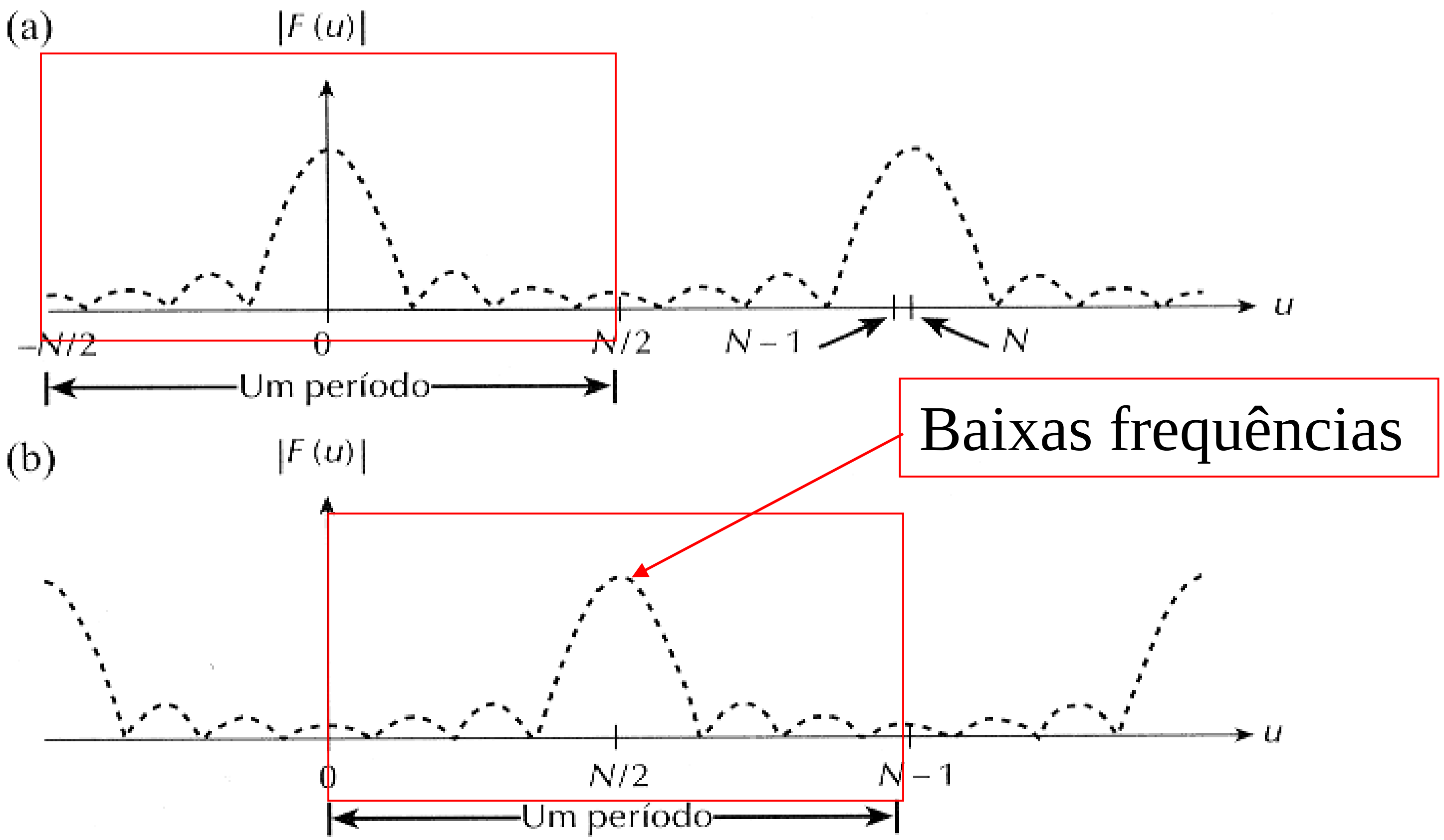
Ou seja:
Multiplicar *f(x,y)* por $(-1)^{x+y}$ e realizar a transformada de Fourier, simplesmente muda a origem das frequências para o centro do quadrado.

A magnitude da Ttansformada não é afetada:

$$\left|F(u,v)\exp\left[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N\right]\right| = \left|F(u,v)\right|$$

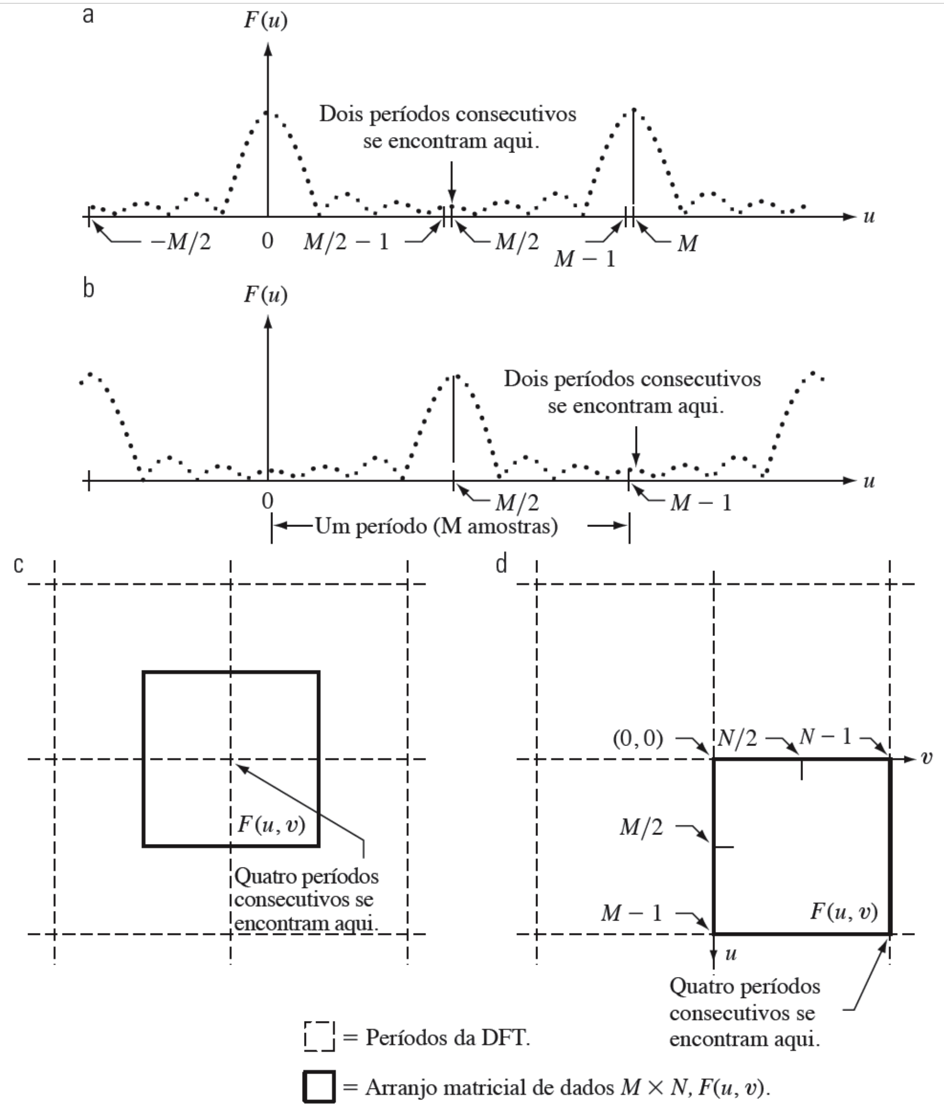
Exemplo unidimensional

Para exibir um período inteiro, basta mover a origem da transformada para o ponto $u = N/2$



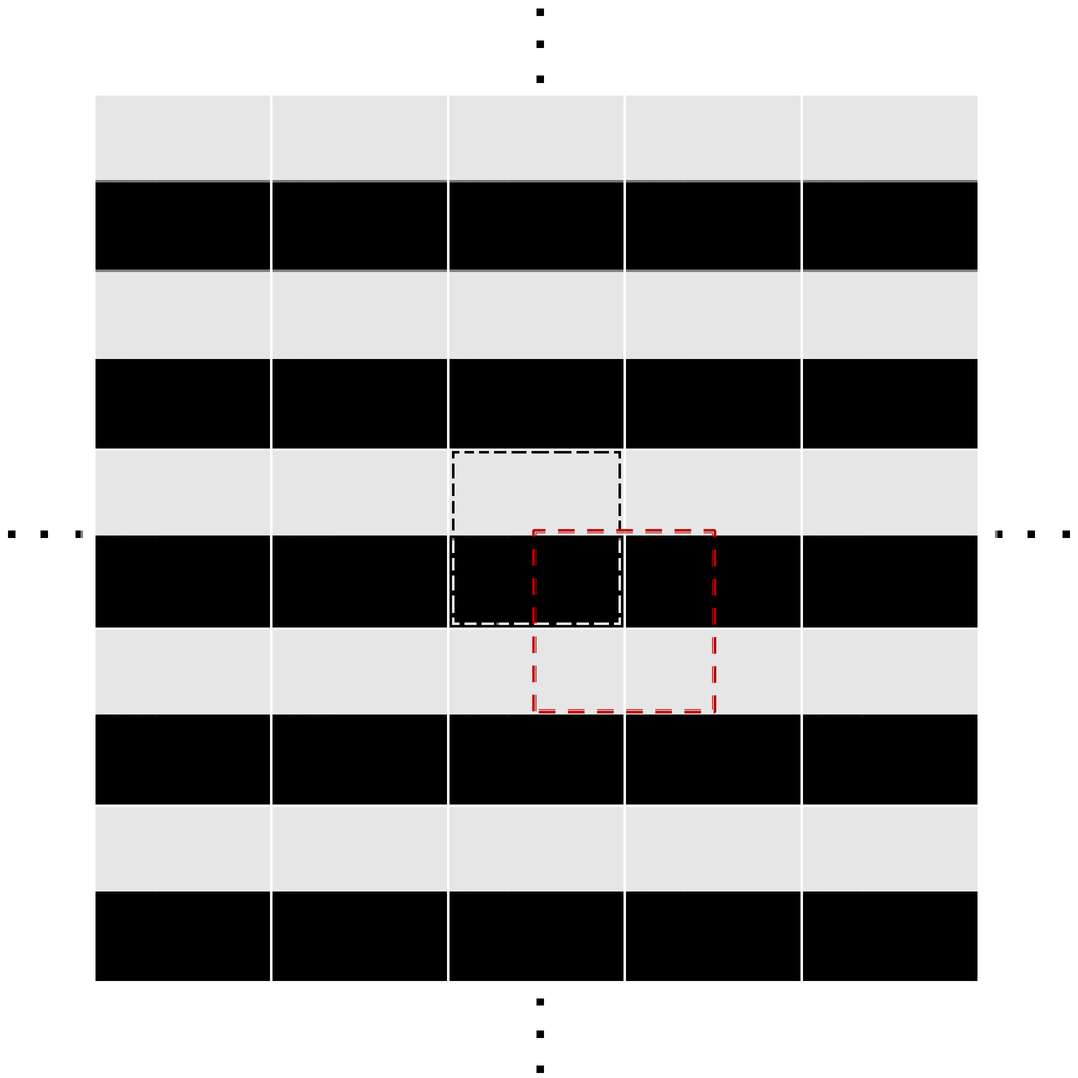
Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)

Frequência Zero deslocada para o centro



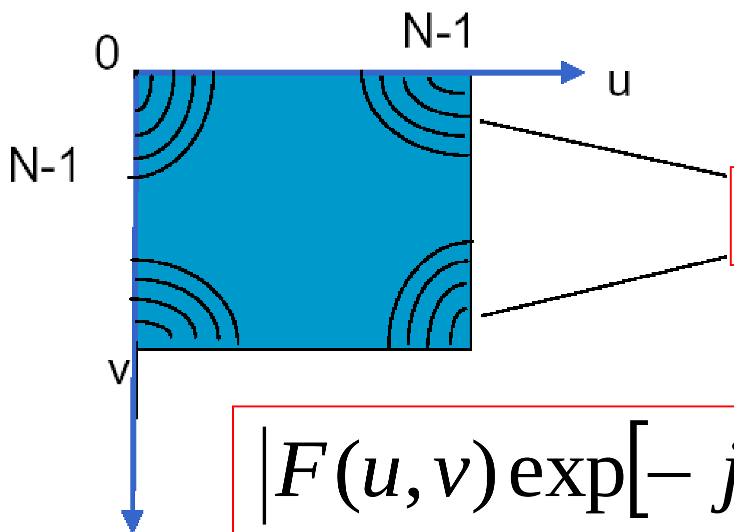
Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)

Frequência Zero deslocada para o centro



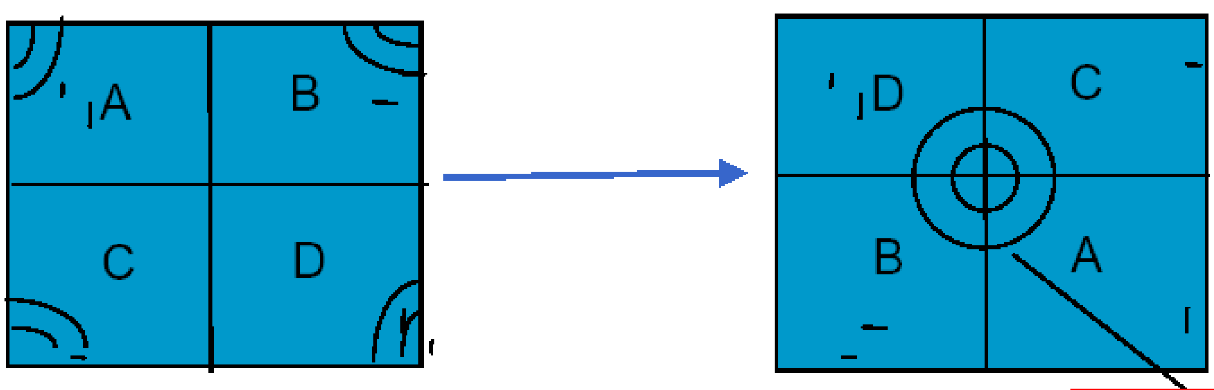
Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)

Frequência Zero deslocada para o centro



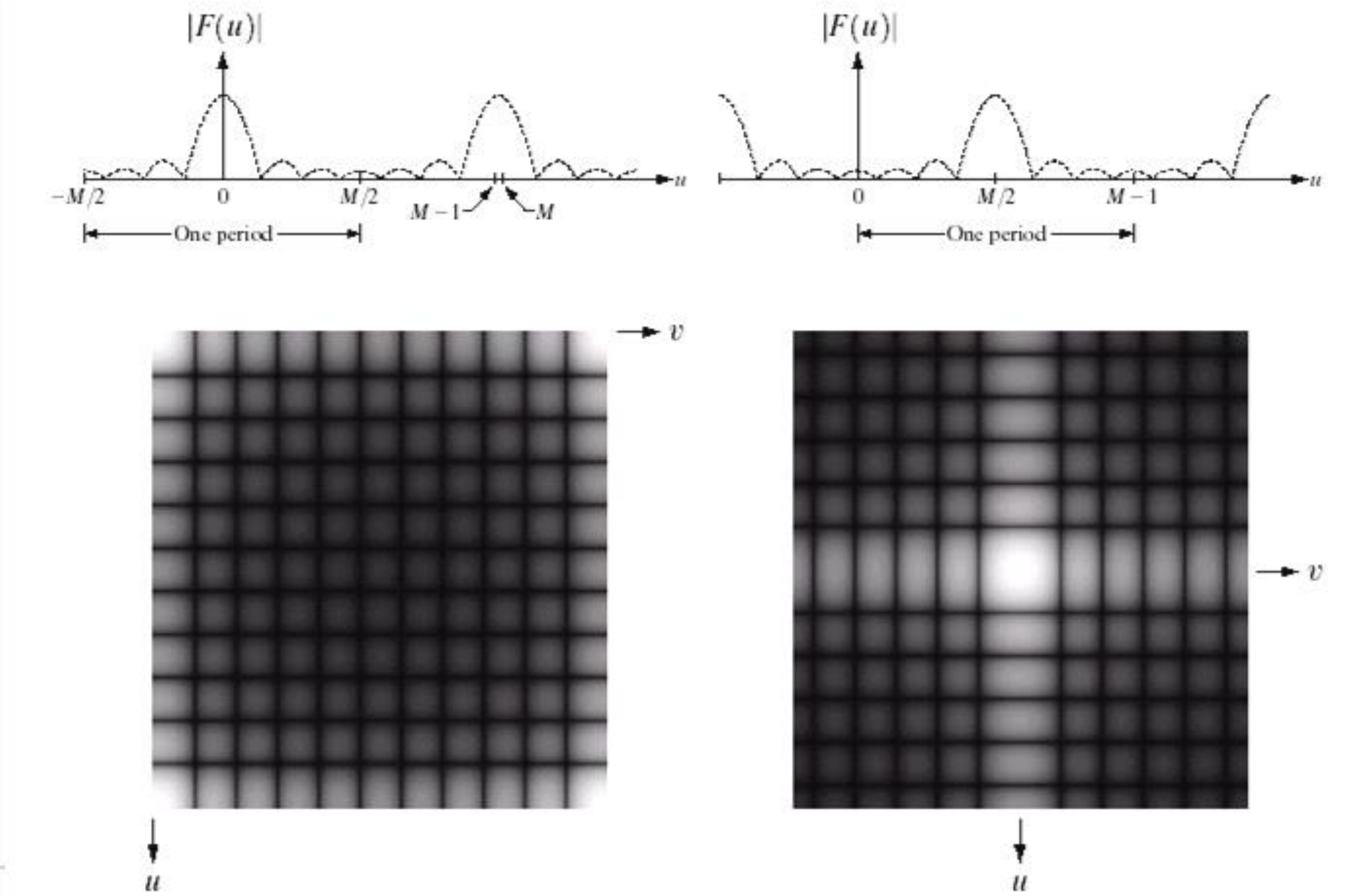
Baixas Frequências

$$\left|F(u,v)\exp\left[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N\right]\right| = \left|F(u,v)\right|$$

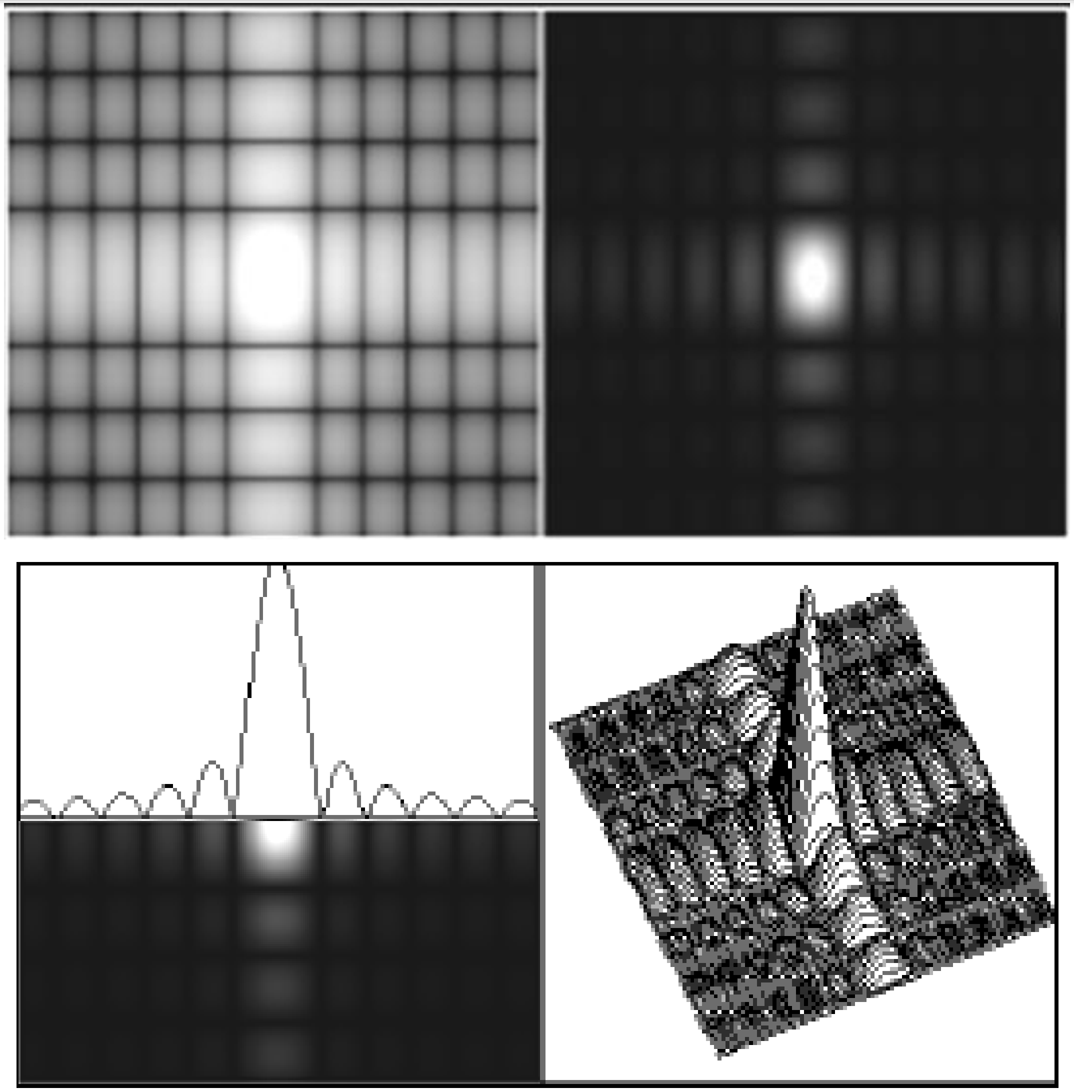


Baixas Frequências

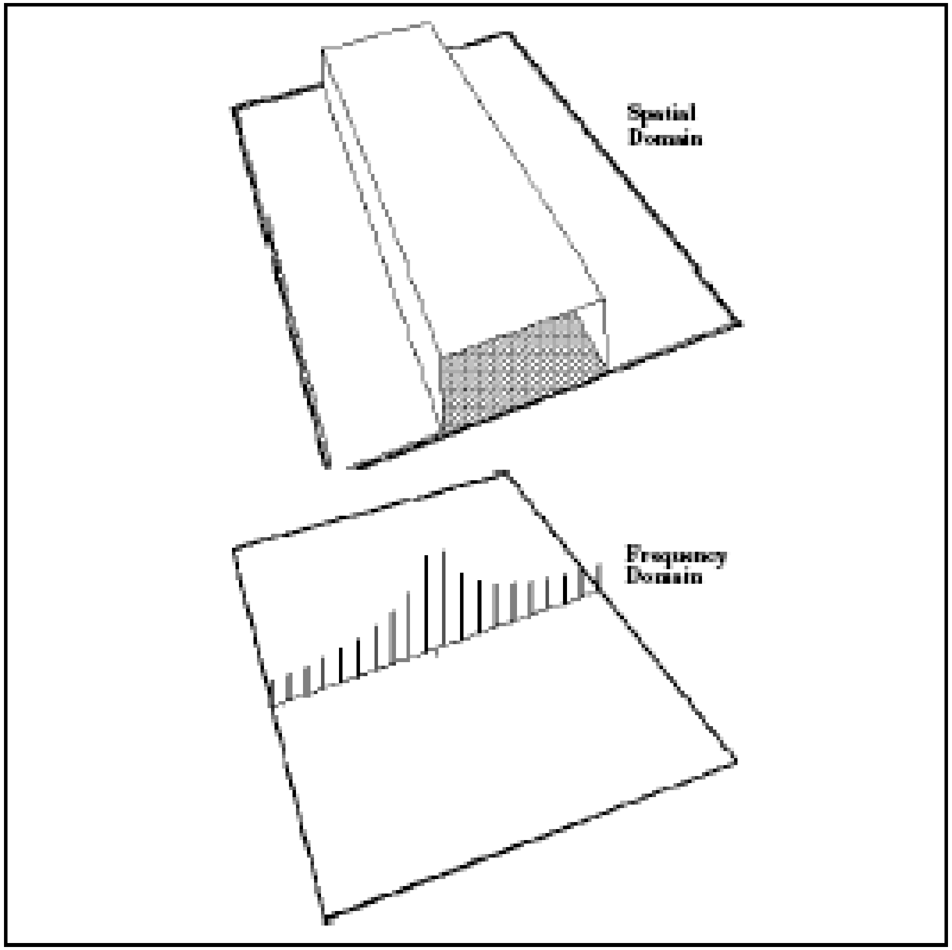
Espectro Unidimensional e Bidimensional



Espectro Unidimensional e Bidimensional



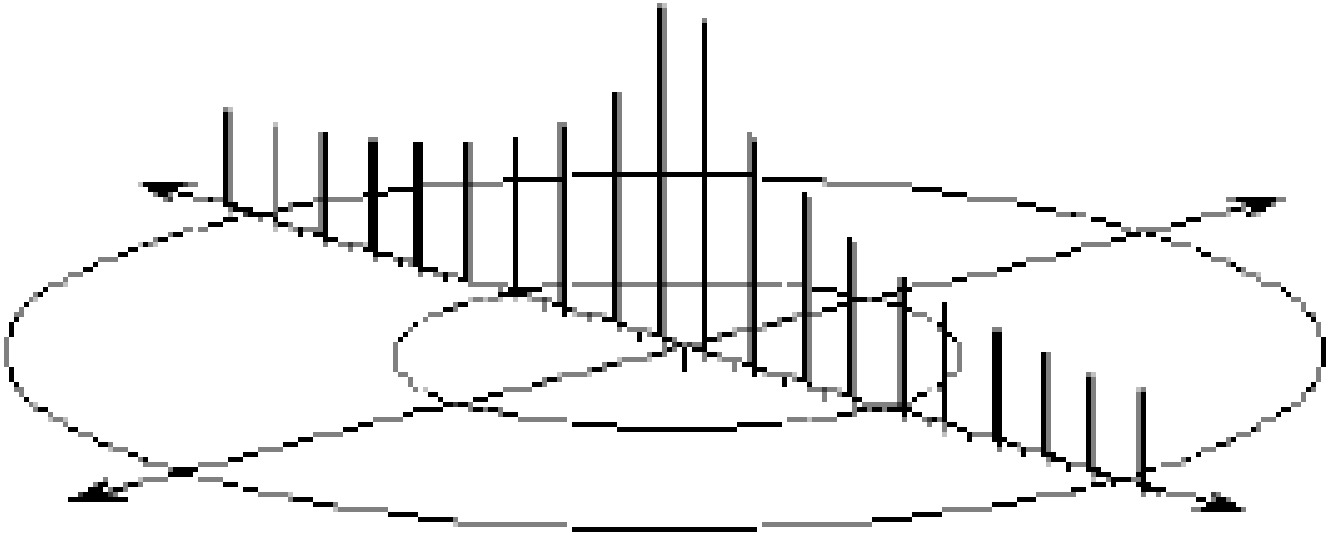
Exemplos:



Padrão com variação de freqüência em apenas uma direção (x). Nas outras direções a frequência é zero.

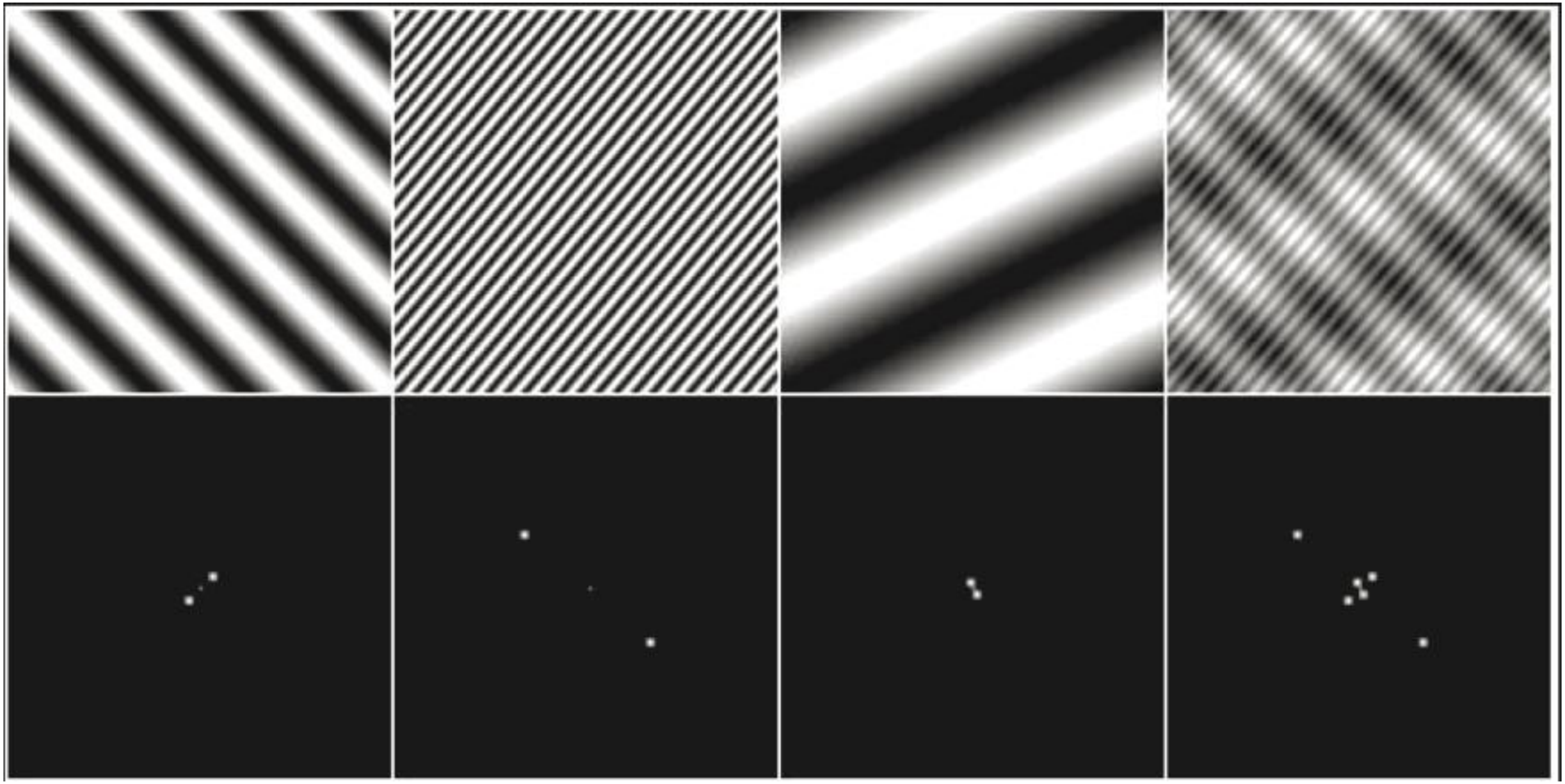
Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)

Frequência Zero deslocada para o centro



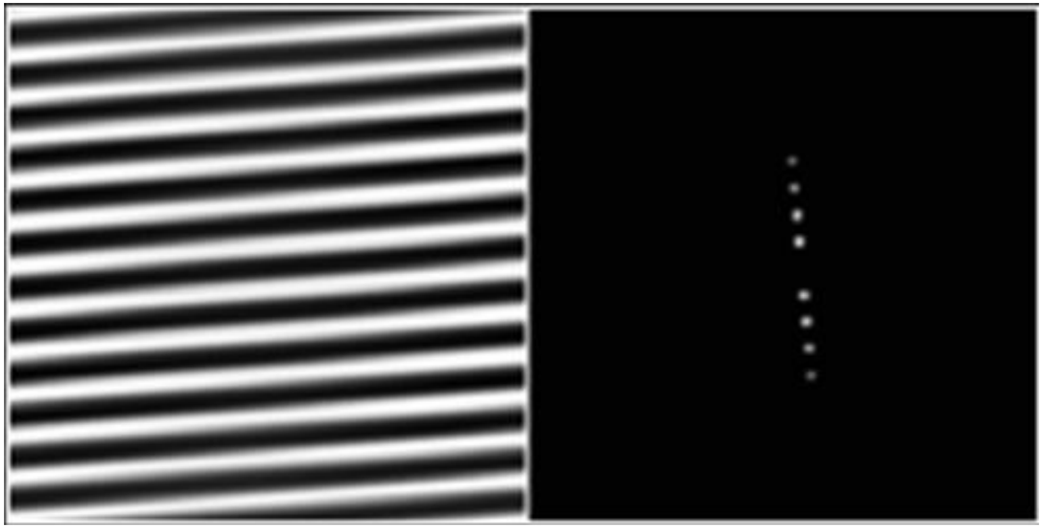
Espectro de Fourier Bidimensional (imagem)

Frequência Zero deslocada para o centro



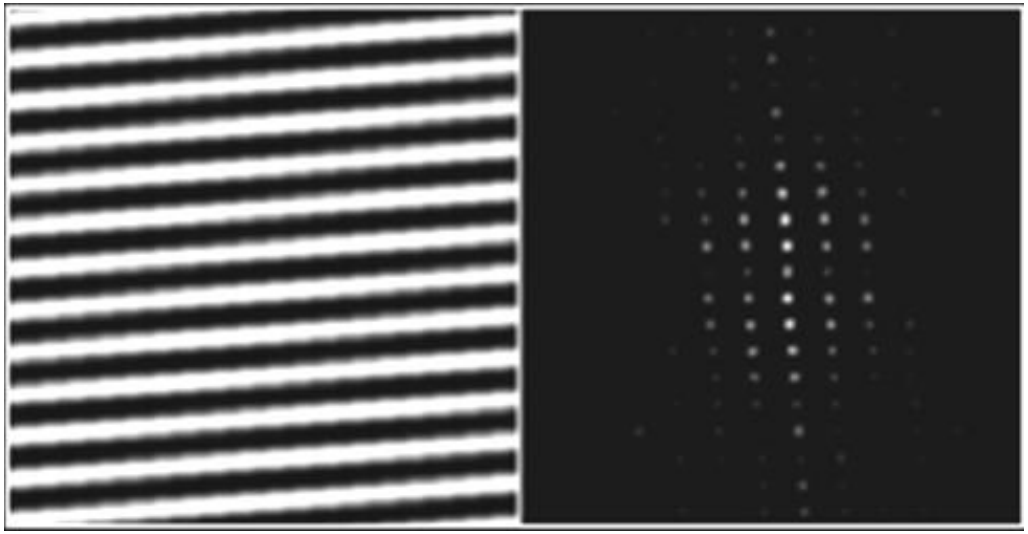
Exemplos de Texturas:

Padrão Senoidal

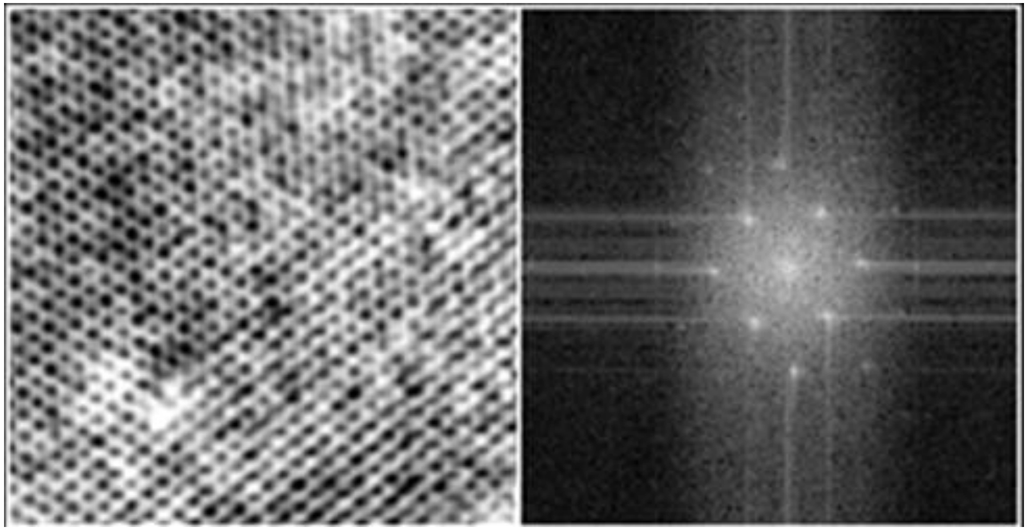


Padrão Não Senoidal

Exemplos de Texturas:

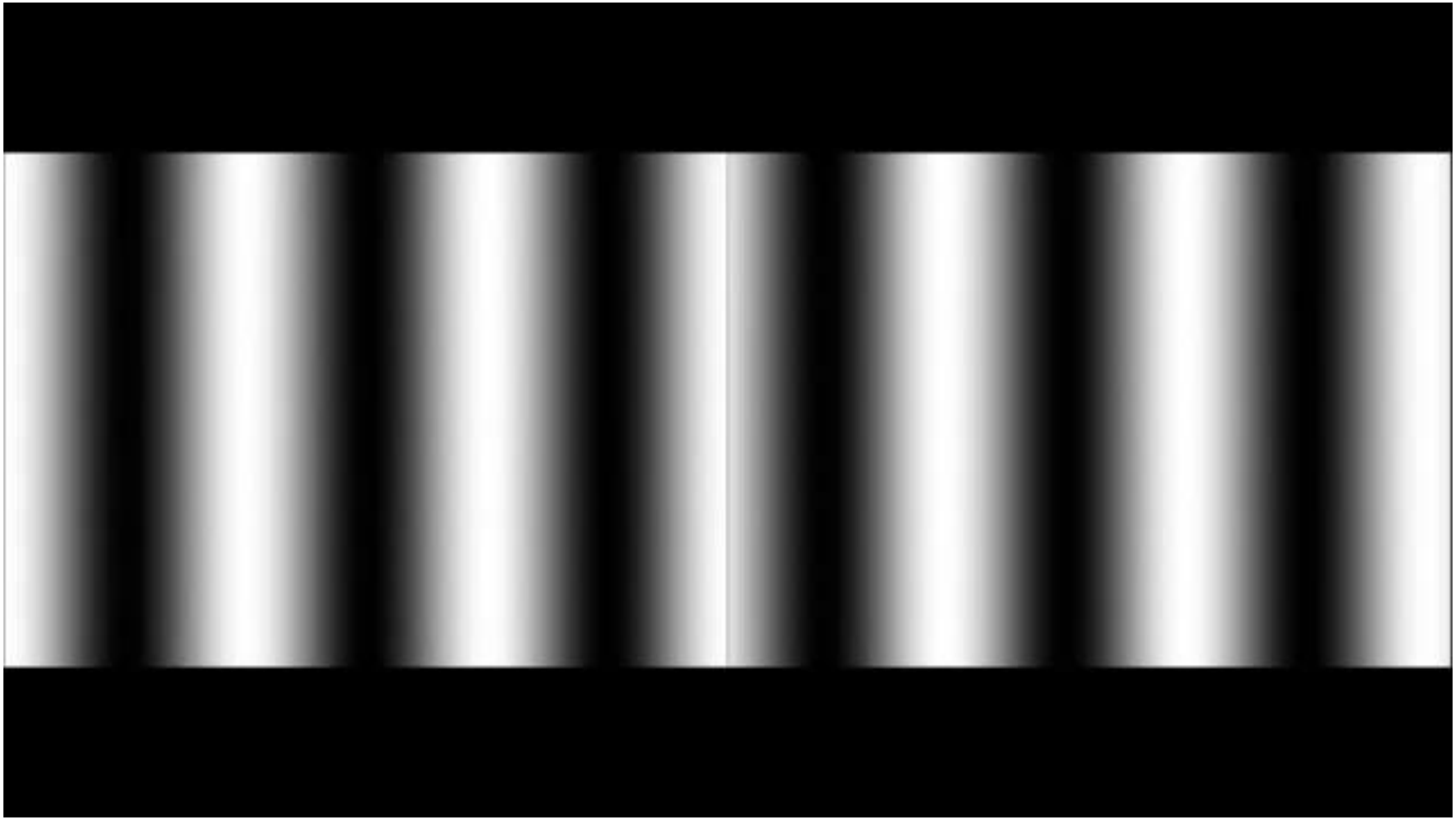


Padrão Não Senoidal com interferências em outras direções



Textura

Espectro de Fourier Bidimensional (Vídeo)

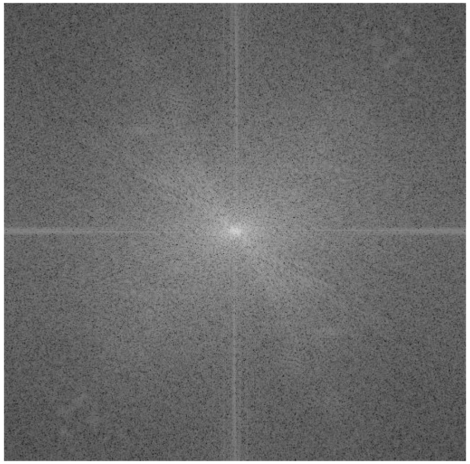


Visualização do espectro

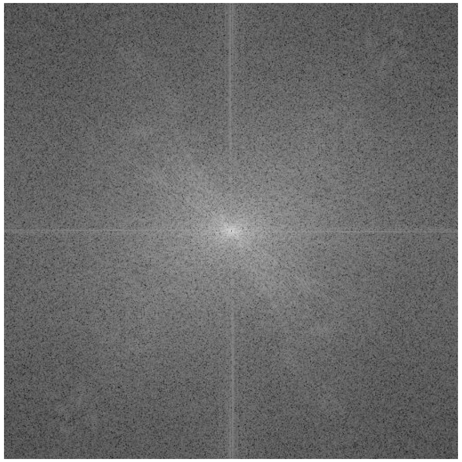
Forma Retangular X Forma Polar

$a_1, a_2, a_3...$
Amplitudes dos Cossenos

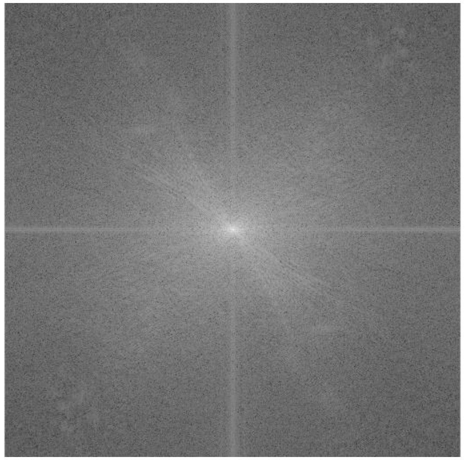
Parte Real



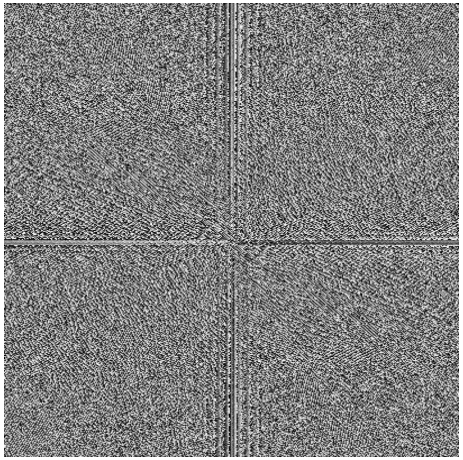
Parte Imaginária



$b_1, b_2, b_3...$
Amplitudes dos Senos

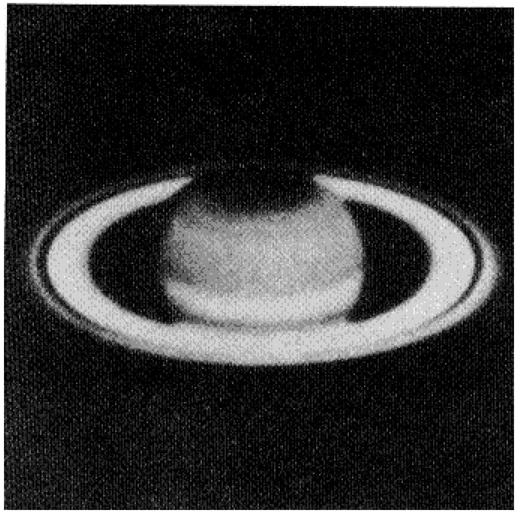


Módulo (Espectro)



Fase

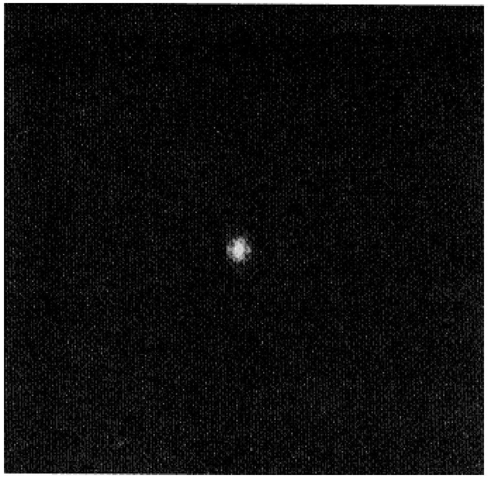
Visualização do espectro



A escala dinâmica dos espectros de Fourier mostrados como funções de Intensidades, são geralmente muito mais alta do que a capacidade de reprodução dos dispositivos.

Uma técnica útil é comprimir a escala através da exibição de uma função logaritmo.

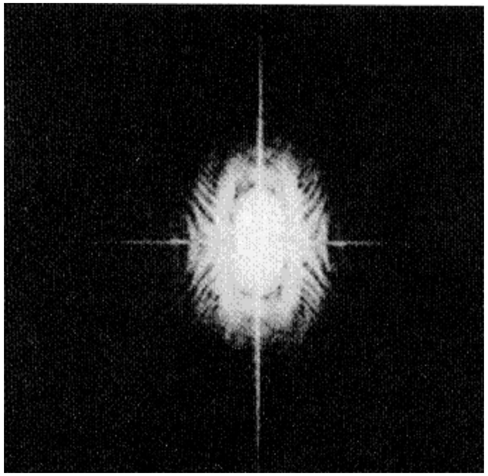
$$D(u,v) = c\log[1+|F(u,v)|]$$



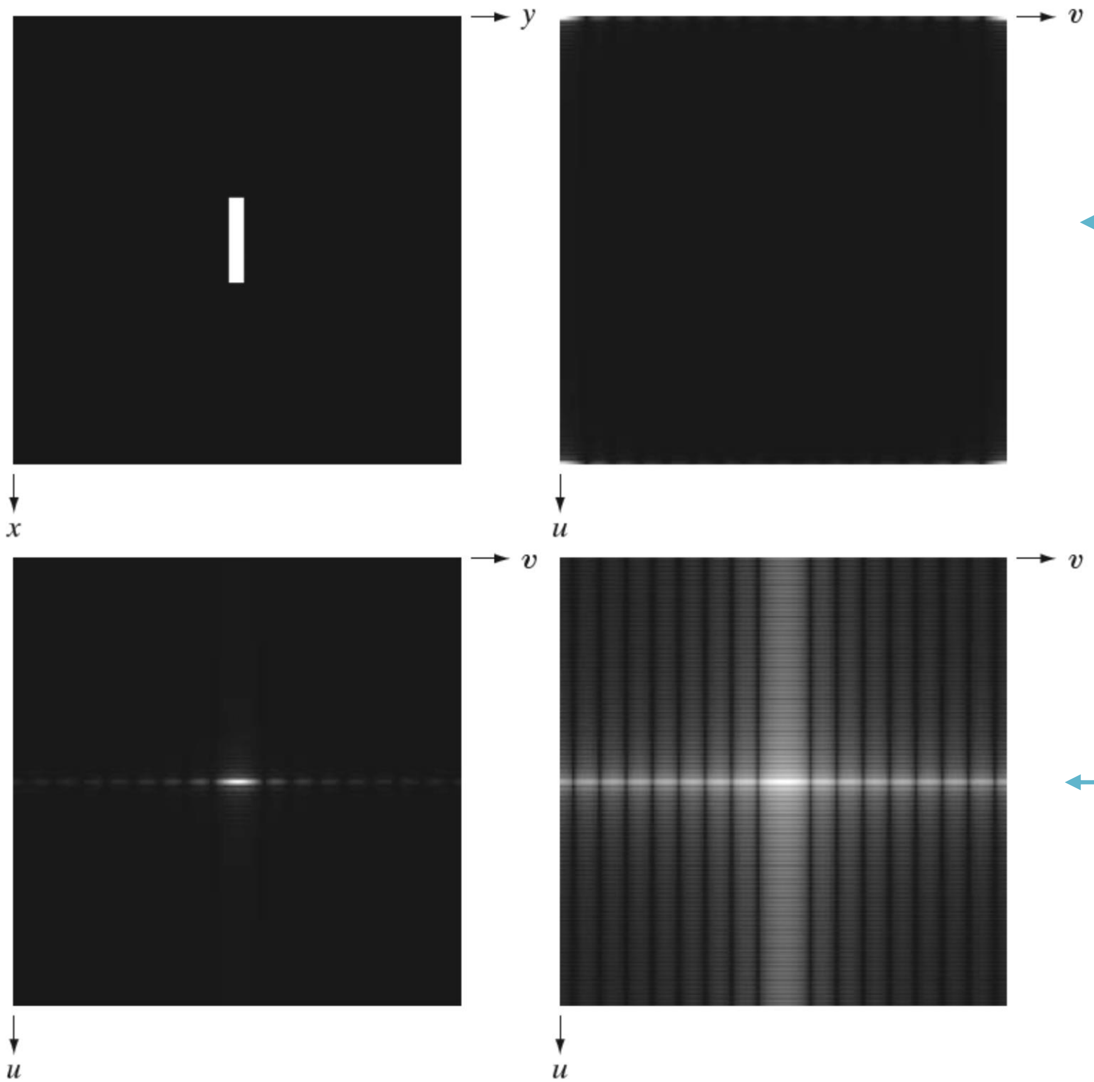
$|F(u,v)|$

[0 a 2,5x10^{6}]

[0 a 6,4]



Visualização do espectro



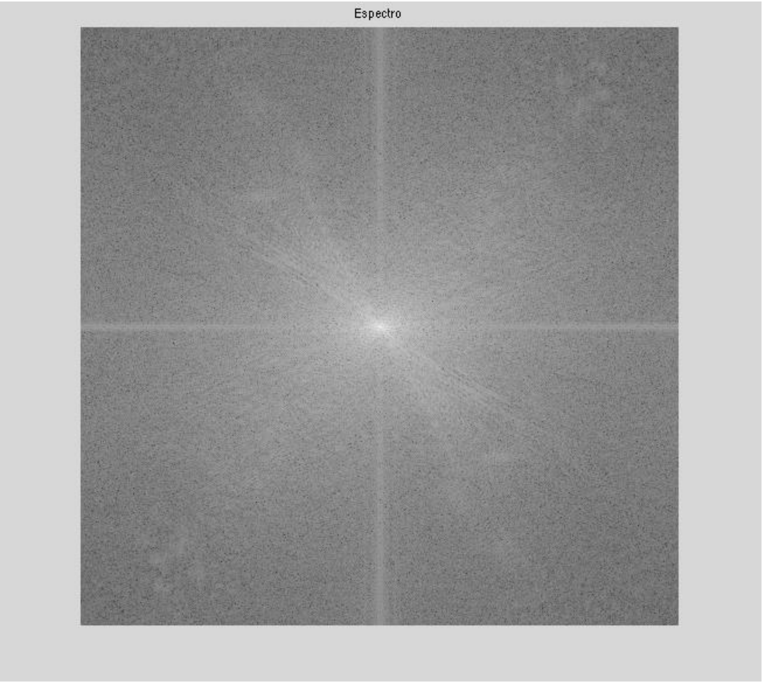
Deslocamento do espectro

Transformação logaritma

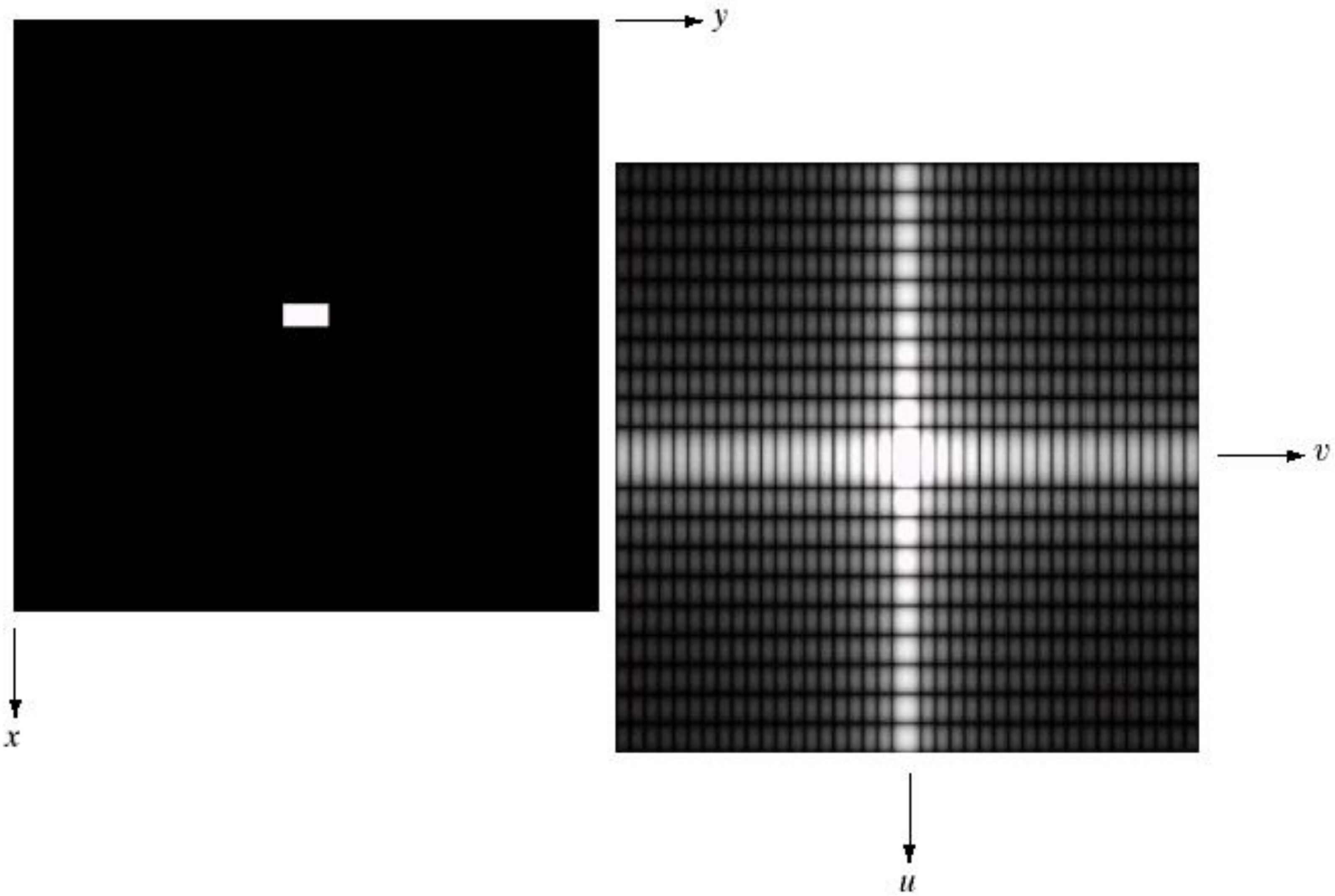
No MATLAB

```
clear all
close all
clc

f = imread('lena.tif');
imshow(f)

% FFT
F = fft2(double(f));
F = fftshift(F);

% Visualização do espectro
A = abs(F);
A = 35*log10(A+1);
A = uint8(A);
figure, imshow(A);
```

No MATLAB

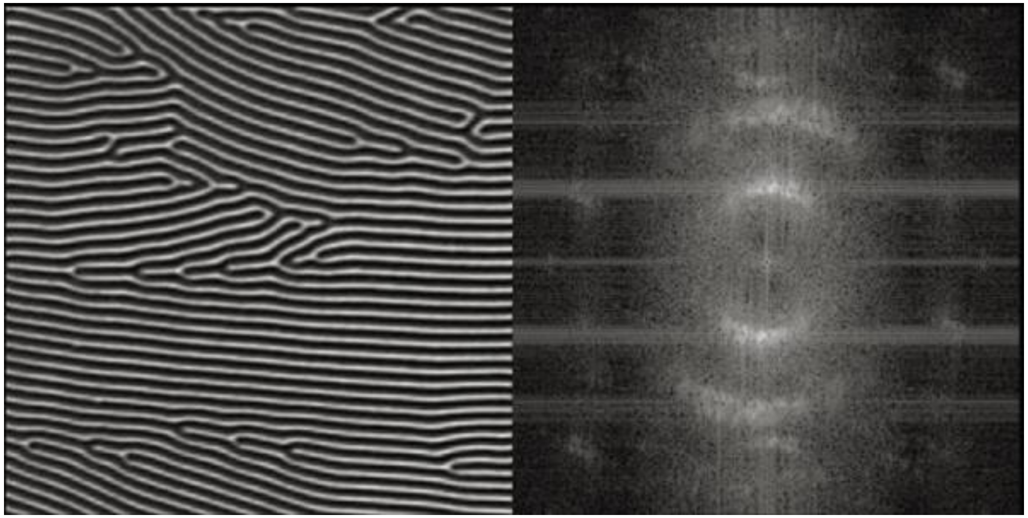


Espectro de uma imagem

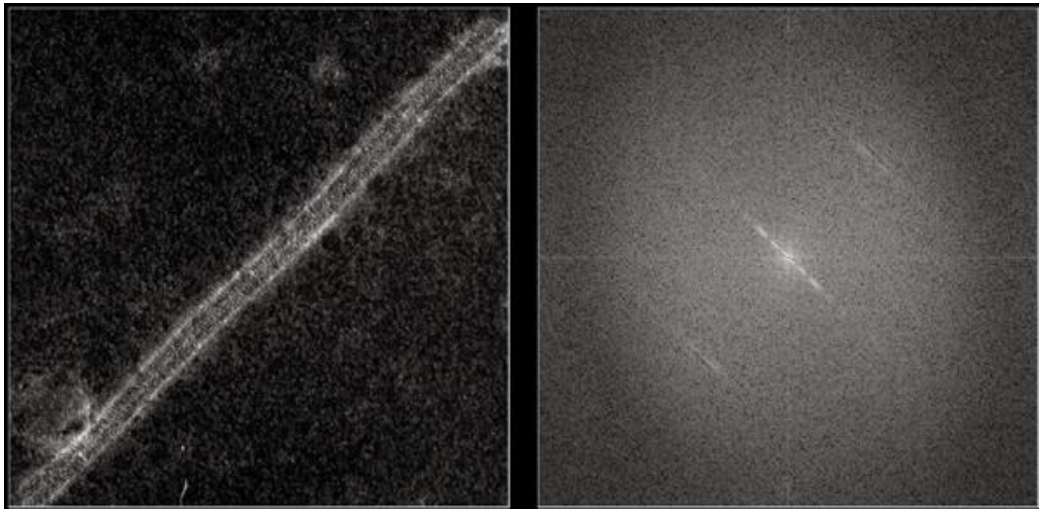


Exemplos:

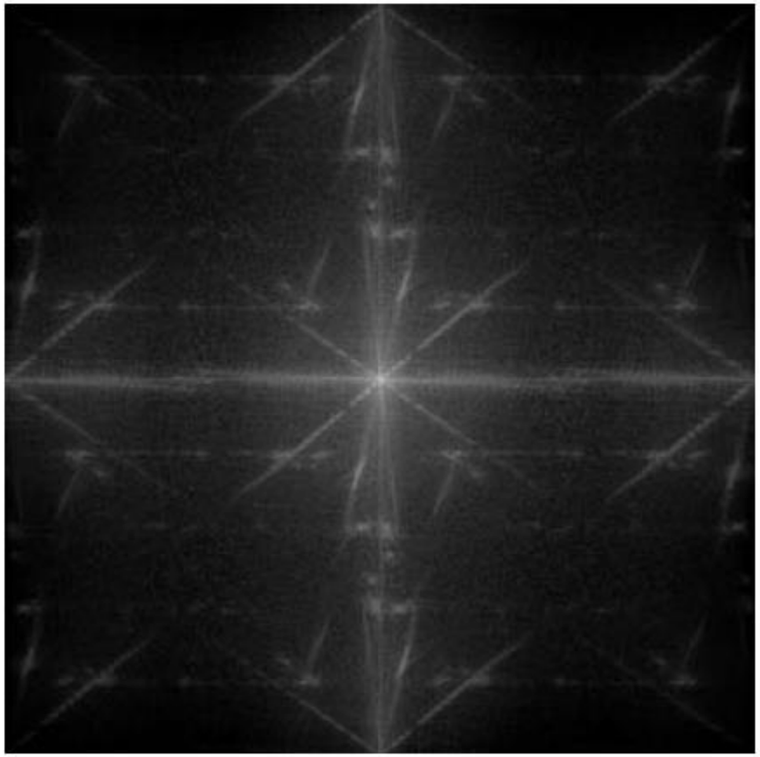
a)



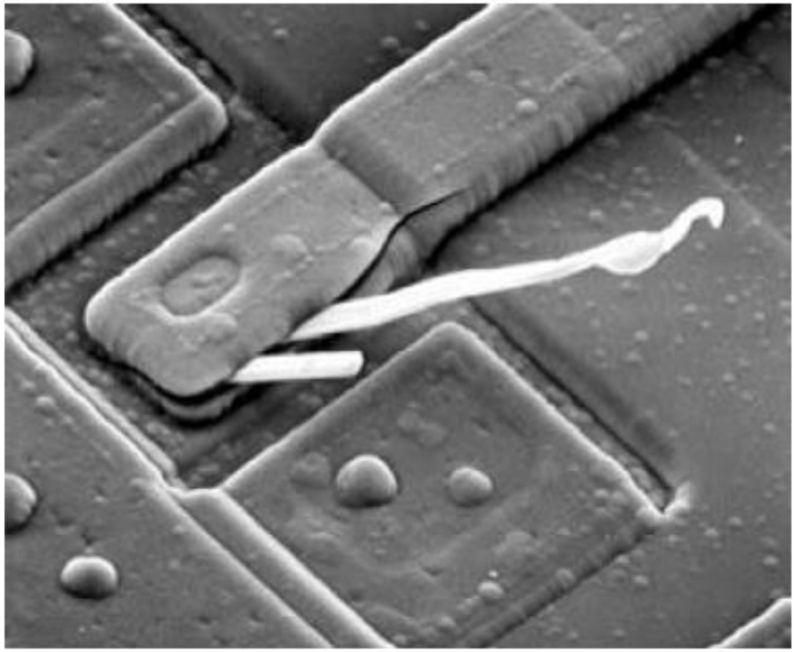
b)

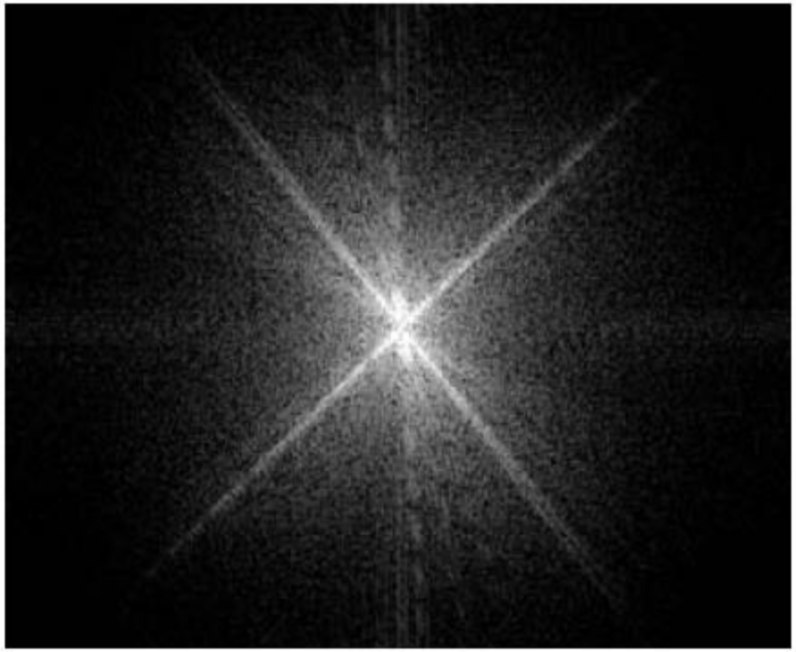


Exemplos:



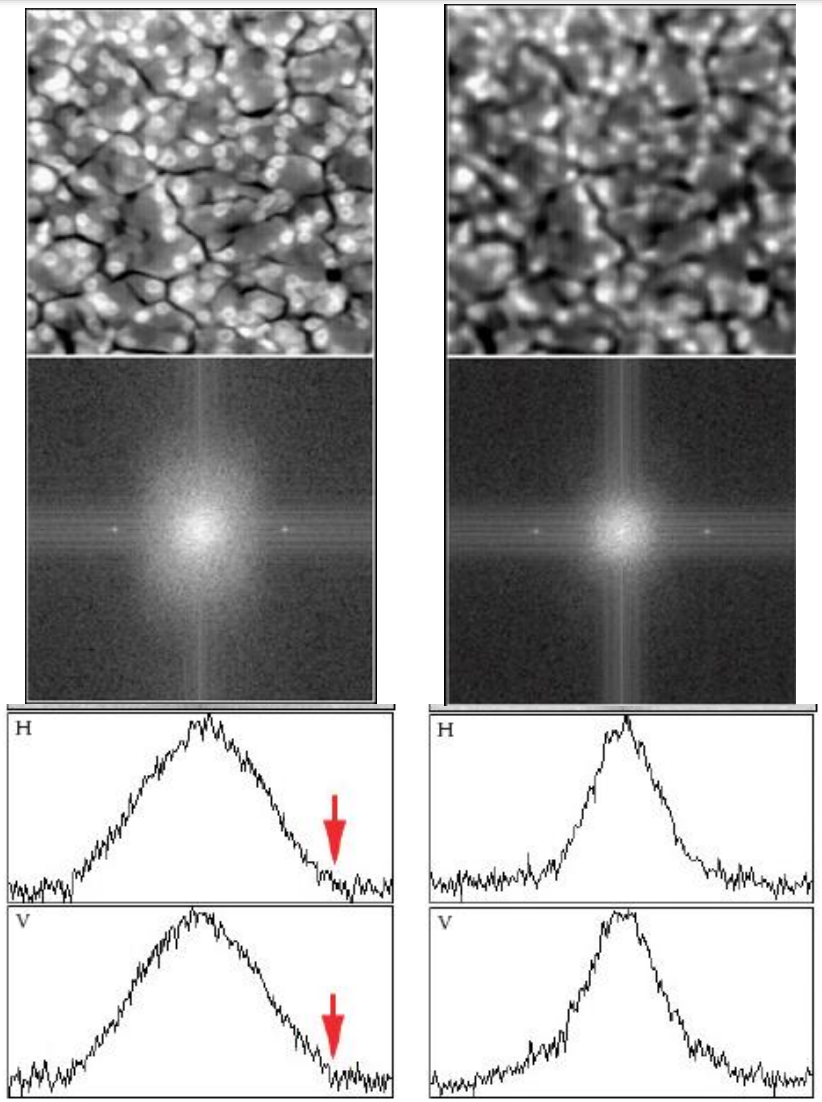
Exemplos:





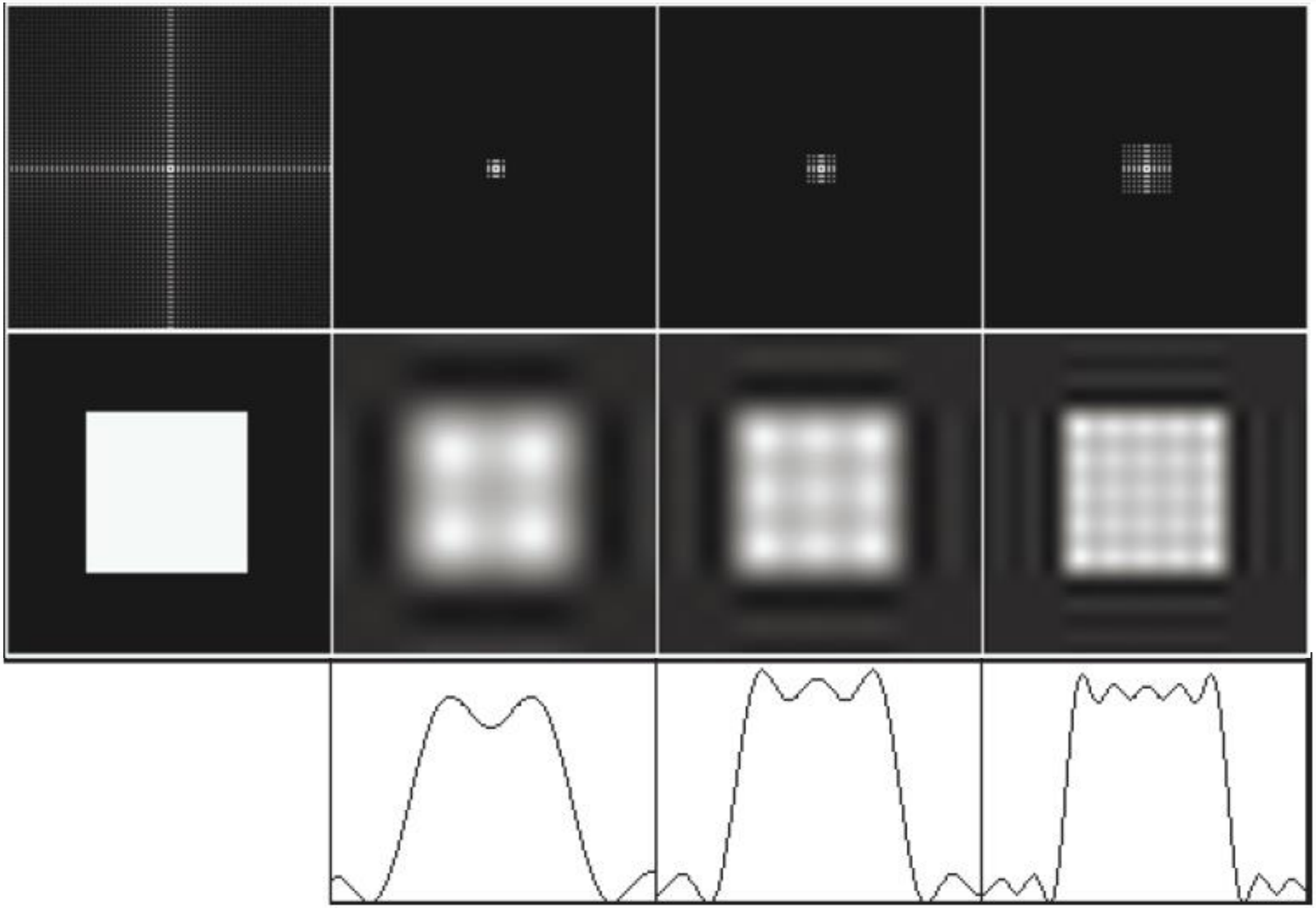
Exemplos:

Alta resolução espacial: presença de componentes de alta frequência



Baixa resolução espacial: perda de componentes de alta frequência

Espectro Unidimensional e Bidimensional



Propriedades da DFT 2-D

3) Separabilidade

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi(\frac{ux+vy}{N})]$$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp[-j2\pi ux/N]\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi vy/N]$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi(\frac{ux+vy}{N})]$$

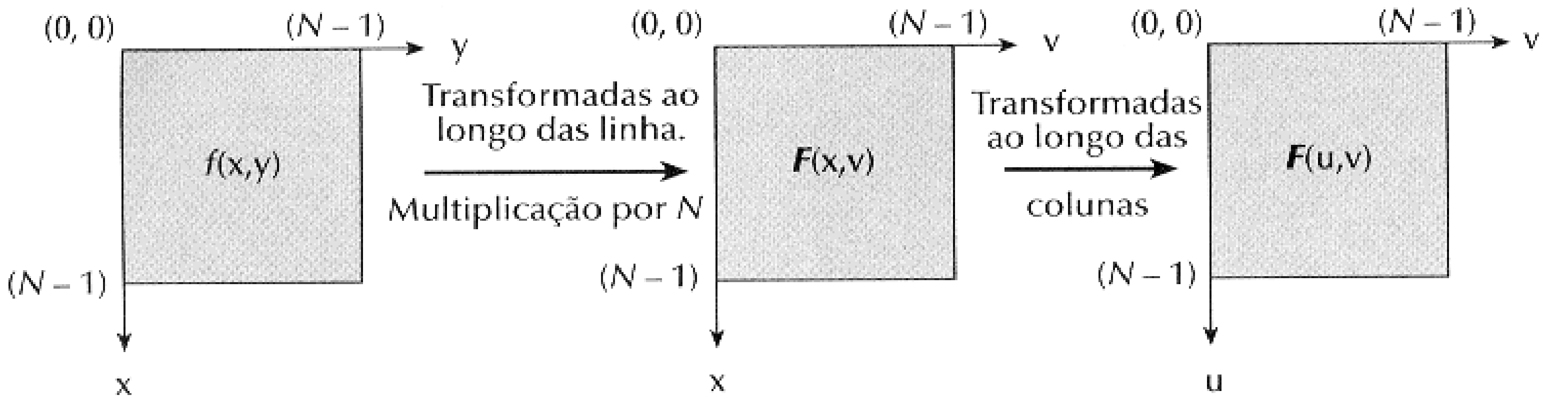
$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\exp[j2\pi ux/N]\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi vy/N]$$

Propriedades da DFT 2-D

A vantagem da **Separabilidade** é que a F(u,v) e a f(x,y) podem ser obtidas em dois passos por aplicações sucessivas da transformada de Fourier unidimensional:

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(x,v)\exp[-j2\pi ux/N]$$

$$F(x,v) = N\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi vy/N]\right]$$



Propriedades da DFT 2-D

4) Rotação

Introduzindo as coordenadas polares:

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad u = w\cos\phi \qquad v = w\,\mathrm{sen}\,\phi$

$f(x,y)$ e $F(u,v)$ tornam-se : $f(r,\theta)$ e $F(w,\phi)$

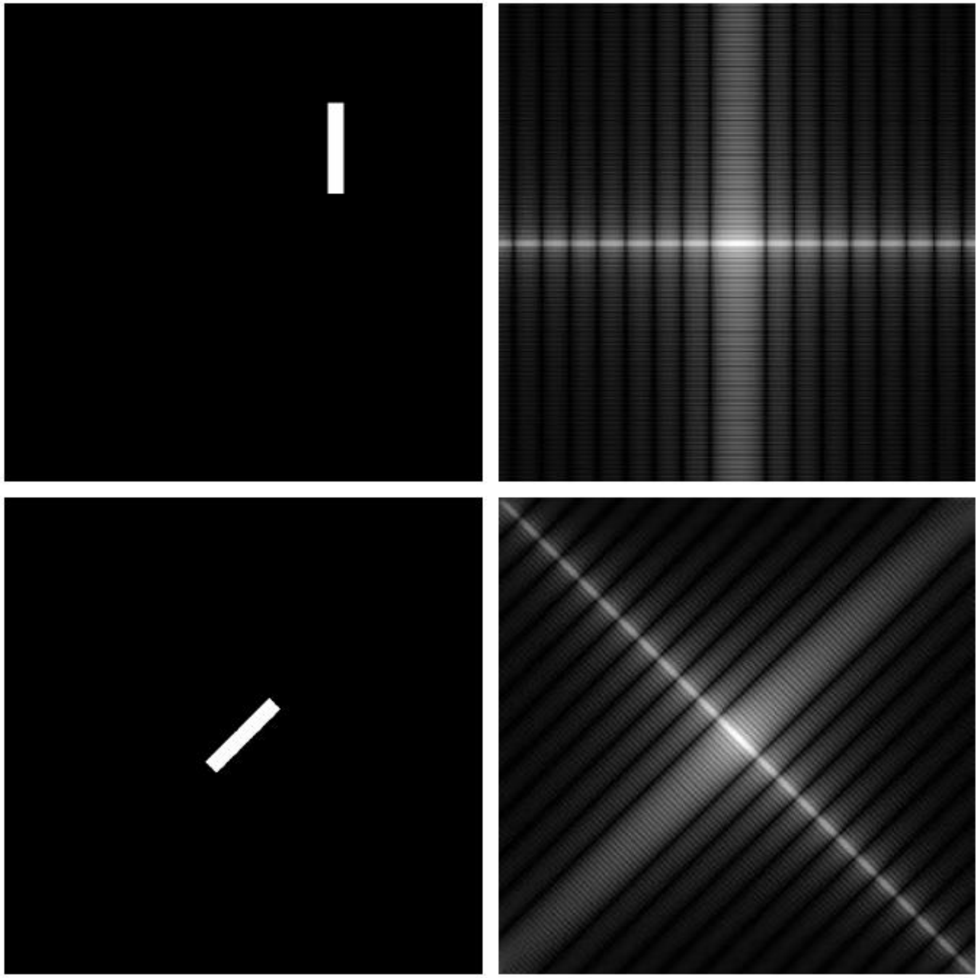
A substituição direta no par de Transformadas resulta:

$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(w,\phi+\theta_0)$$

Ou seja, a rotação de f(x,y) de um ângulo θ_0 implicará em uma rotação de F(u,v) deste mesmo ângulo.

Propriedades da DFT 2-D

4) Rotação



Propriedades da DFT 2-D

5) Distributividade

A Transformada de Fourier e sua Inversa são Distributivas com relação à Adição.

$$\Im\left\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\right\}=\Im\left\{f_1(x,y)\right\}+\Im\left\{f_2(x,y)\right\}$$

A Transformada de Fourier e sua Inversa Não são Distributivas com relação à Multiplicação.

$$\Im\left\{f_1(x,y).f_2(x,y)\right\}\neq\Im\left\{f_1(x,y)\right\}.\Im\left\{f_2(x,y)\right\}$$

Propriedades da DFT 2-D

6) Mudança de Escala:

Para dois escalares a e b:

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

7) Valor Médio:

Substituindo-se $u = v = 0$ na equação da transformada 2-D:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Logo, o valor médio de f(x,y) é:

$$\overline{f}(x,y) = \frac{1}{N} F(0,0)$$

No MATLAB

```
f = imread('lena.tif');

imshow(f)
title('original');

[M,N] = size(f);
soma = sum(f(:));
media = soma/(M*N);

% FFT
F = fft2(double(f));
ValorDC = F(1,1);
```

Workspace

Name ▲	Value	Min	Max
F	<512x512 complex double>	8.7310 – 2.0087i	18404084
M	512	512	512
N	512	512	512
ValorDC	18404084	18404084	18404084
f	<512x512 uint8>	0	228
media	70.2060	70.2060	70.2060
soma	18404084	18404084	18404084

No MATLAB

Editor – Fourier_Teste.m | Variables – F

F | f

F <512x512 complex double>

	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
241	7.0222e...	-4.6990e...	-1.5898e...	4.7043e+04 + 4.5196e+04i	-1.0865e+05 + 1.6992e+04i	9.9498e+03 + 3.7192e+04i	-5.7298e+03 + 7.6331e+03i	-4.5927e+04 - 8.7695e+04i	4.3913e...	5.4059e...	5.5404e...
242	-2.6146e...	3.2200e...	6.1804e...	-9.3030e+03 + 6.0172e+04i	-6.2860e+04 - 3.1217e+04i	1.5864e+04 + 1.2244e+05i	4.3808e+03 - 2.7632e+04i	-3.2526e+03 - 2.7110e+04i	-8.7874e...	6.3182e...	3.9156e...
243	5.4585e...	-2.6800e...	9.7722e...	6.9837e+04 - 4.4182e+04i	-3.3716e+04 + 9.7907e+04i	-6.1506e+04 + 4.9040e+04i	1.6649e+05 + 1.3256e+04i	-1.2349e+05 + 9.7661e+04i	9.9969e...	-2.7693e...	2.3335e...
244	8.4746e...	8.2216e...	-1.0247e...	9.1451e+04 - 5.4524e+04i	-9.0171e+04 - 1.1491e+03i	7.3890e+04 + 8.4533e+04i	-1.8855e+03 + 8.7493e+04i	-8.8385e+04 + 3.4033e+04i	-6.2312e...	3.7367e...	5.3612e...
245	6.0838e...	6.2956e...	-1.9439e...	3.1416e+04 - 6.3166e+04i	-7.3296e+04 + 3.5284e+04i	9.6437e+04 - 1.9804e+04i	-1.4756e+04 + 1.1042e+05i	-7.2945e+04 - 1.6855e+04i	1.0659e...	-1.2483e...	4.1667e...
246	3.2505e...	-1.1689e...	8.3204e...	-5.1690e+04 + 5.6431e+04i	2.2340e+04 - 2.9495e+04i	8.7077e+03 + 9.2136e+04i	1.2687e+03 - 1.1139e+05i	-3.9152e+04 + 8.8200e+03i	5.3381e...	1.3926e...	1.2428e...
247	-9.0148e...	3.6092e...	-1.3624e...	1.5645e+05 - 1.5462e+05i	-1.6982e+05 + 2.1784e+05i	8.6055e+03 - 1.0845e+04i	6.9410e+04 - 1.6365e+04i	3.4237e+04 - 1.0715e+04i	3.6128e...	1.2772e...	9.9861e...
248	-6.1911e...	-1.5519e...	-1.3746e...	1.7586e+04 - 1.0349e+05i	4.8112e+04 - 3.1655e+04i	5.9298e+04 + 2.1318e+05i	-1.0523e+05 - 3.1033e+04i	7.7272e+04 - 5.1989e+03i	-8.1886e...	1.8022e...	6.3171e...
249	4.0274e...	-1.3483e...	-4.1280e...	4.2900e+04 - 1.6177e+05i	4.1911e+04 + 1.7119e+05i	2.9228e+04 - 8.1039e+04i	2.0184e+05 + 3.1504e+05i	-2.8899e+05 + 5.7701e+04i	-5.1793e...	2.2197e...	-2.6523e...
250	-9.1127e...	2.3712e...	-1.8833e...	1.1235e+04 + 1.0427e+05i	-1.5357e+05 - 3.3534e+04i	1.4937e+05 + 1.5867e+05i	-2.0131e+05 + 4.6607e+04i	-7.5591e+03 - 9.2198e+04i	-1.2567e...	1.9806e...	-1.2958e...
251	-8.3721e...	-1.0202e...	3.5255e...	1.2064e+05 + 6.4058e+04i	-3.3198e+05 + 3.4171e+05i	-2.4514e+05 - 4.0553e+04i	6.6585e+04 + 1.1701e+05i	-1.3113e+05 - 4.3766e+05i	-4.0901e...	1.0688e...	1.1892e...
252	1.1099e...	-3.2271e...	1.8626e...	2.7136e+05 + 2.7341e+05i	9.7286e+04 + 1.3117e+05i	-4.2132e+05 + 4.8793e+05i	-2.8675e+05 - 2.8937e+05i	2.5611e+05 - 3.7721e+05i	-1.7207e...	8.4845e...	3.6410e...
253	6.5424e...	4.2296e...	-7.2159e...	4.0764e+05 - 5.0272e+05i	2.4898e+04 + 2.8557e+05i	5.6560e+04 + 1.9778e+05i	2.3218e+05 + 4.2285e+05i	-3.1649e+05 - 2.3930e+05i	1.4231e...	-6.0309e...	2.1798e...
254	2.4768e...	2.7172e...	1.0928e...	-4.6077e+05 - 1.1300e+05i	-2.5942e+05 + 5.9045e+05i	3.0976e+05 - 6.7362e+05i	1.1361e+06 + 1.0196e+06i	-9.4659e+05 + 2.5136e+05i	-1.0735e...	2.0703e...	-2.9959e...
255	-9.0376e...	-1.1981e...	-4.5006e...	7.4166e+05 + 7.2424e+05i	-5.3074e+05 - 2.5889e+05i	-8.3591e+05 - 1.2394e+05i	1.0407e+06 - 3.0601e+05i	-9.9303e+05 + 6.2590e+05i	6.5818e...	-8.5012e...	-7.6471e...
256	-6.7380e...	9.1693e...	-1.0107e...	-1.2544e+06 - 1.0767e+06i	-6.8463e+05 - 2.2557e+06i	1.6129e+05 + 1.5019e+06i	-1.0679e+05 - 1.3451e+06i	-2.4187e+05 - 2.8597e+05i	5.1318e...	1.9199e...	-7.6424e...
257	9.0935e...	1.0152e...	6.6594e...	2.0755e+06 + 6.0474e+05i	-9.7442e+05 - 2.9499e+06i	1.8404e+07 + 0.0000e+00i	-9.7442e+05 + 2.9499e+06i	2.0755e+06 - 6.0474e+05i	6.6594e...	1.0152e...	9.0935e...
258	-7.6424e...	1.9199e...	5.1318e...	-2.4187e+05 + 2.8597e+05i	-1.0679e+05 + 1.3451e+06i	1.6129e+05 - 1.5019e+06i	-6.8463e+05 + 2.2557e+06i	-1.2544e+06 + 1.0767e+06i	-1.0107e...	9.1693e...	-6.7380e...
259	-7.6471e...	-8.5012e...	6.5818e...	-9.9303e+05 - 6.2590e+05i	1.0407e+06 + 3.0601e+05i	-8.3591e+05 + 1.2394e+05i	-5.3074e+05 + 2.5889e+05i	7.4166e+05 - 7.2424e+05i	-4.5006e...	-1.1981e...	-9.0376e...
260	-2.9959e...	2.0703e...	-1.0735e...	-9.4659e+05 - 2.5136e+05i	1.1361e+06 - 1.0196e+06i	3.0976e+05 + 6.7362e+05i	-2.5942e+05 - 5.9045e+05i	-4.6077e+05 + 1.1300e+05i	1.0928e...	2.7172e...	2.4768e...
261	2.1798e...	-6.0309e...	1.4231e...	-3.1649e+05 + 2.3930e+05i	2.3218e+05 - 4.2285e+05i	5.6560e+04 - 1.9778e+05i	2.4898e+04 - 2.8557e+05i	4.0764e+05 + 5.0272e+05i	-7.2159e...	4.2296e...	6.5424e...
262	3.6410e...	8.4845e...	-1.7207e...	2.5611e+05 + 3.7721e+05i	-2.8675e+05 + 2.8937e+05i	-4.2132e+05 - 4.8793e+05i	9.7286e+04 - 1.3117e+05i	2.7136e+05 - 2.7341e+05i	1.8626e...	-3.2271e...	1.1099e...
263	1.1892e...	1.0688e...	-4.0901e...	-1.3113e+05 + 4.3766e+05i	6.6585e+04 - 1.1701e+05i	-2.4514e+05 + 4.0553e+04i	-3.3198e+05 - 3.4171e+05i	1.2064e+05 - 6.4058e+04i	3.5255e...	-1.0202e...	-8.3721e...
264	-1.2958e...	1.9806e...	-1.2567e...	-7.5591e+03 + 9.2198e+04i	-2.0131e+05 - 4.6607e+04i	1.4937e+05 - 1.5867e+05i	-1.5357e+05 + 3.3534e+04i	1.1235e+04 - 1.0427e+05i	-1.8833e...	2.3712e...	-9.1127e...
265	-2.6523e...	2.2197e...	-5.1793e...	-2.8899e+05 - 5.7701e+04i	2.0184e+05 - 3.1504e+05i	2.9228e+04 + 8.1039e+04i	4.1911e+04 - 1.7119e+05i	4.2900e+04 + 1.6177e+05i	-4.1280e...	-1.3483e...	4.0274e...
266	6.3171e...	1.8022e...	-8.1886e...	7.7272e+04 + 5.1989e+03i	-1.0523e+05 + 3.1033e+04i	5.9298e+04 - 2.1318e+05i	4.8112e+04 + 3.1655e+04i	1.7586e+04 + 1.0349e+05i	-1.3746e...	-1.5519e...	-6.1911e...
267	9.9861e...	1.2772e...	3.6128e...	3.4237e+04 + 1.0715e+04i	6.9410e+04 + 1.6365e+04i	8.6055e+03 + 1.0845e+04i	-1.6982e+05 - 2.1784e+05i	1.5645e+05 + 1.5462e+05i	-1.3624e...	3.6092e...	-9.0148e...
268	1.2428e...	1.3926e...	5.3381e...	-3.9152e+04 - 8.8200e+03i	1.2687e+03 + 1.1139e+05i	8.7077e+03 - 9.2136e+04i	2.2340e+04 + 2.9495e+04i	-5.1690e+04 - 5.6431e+04i	8.3204e...	-1.1689e...	3.2505e...
269	4.1667e...	-1.2483e...	1.0659e...	-7.2945e+04 + 1.6855e+04i	-1.4756e+04 - 1.1042e+05i	9.6437e+04 + 1.9804e+04i	-7.3296e+04 - 3.5284e+04i	3.1416e+04 + 6.3166e+04i	-1.9439e...	6.2956e...	6.0838e...
270	5.3612e...	3.7367e...	-6.2312e...	-8.8385e+04 - 3.4033e+04i	-1.8855e+03 - 8.7493e+04i	7.3890e+04 - 8.4533e+04i	-9.0171e+04 + 1.1491e+03i	9.1451e+04 + 5.4524e+04i	-1.0247e...	8.2216e...	8.4746e...
271	2.3335e...	-2.7693e...	9.9969e...	-1.2349e+05 - 9.7661e+04i	1.6649e+05 - 1.3256e+04i	-6.1506e+04 - 4.9040e+04i	-3.3716e+04 - 9.7907e+04i	6.9837e+04 + 4.4182e+04i	9.7722e...	-2.6800e...	5.4585e...
272	3.9156e...	6.3182e...	-8.7874e...	-3.2526e+03 + 2.7110e+04i	4.3808e+03 + 2.7632e+04i	1.5864e+04 - 1.2244e+05i	-6.2860e+04 + 3.1217e+04i	-9.3030e+03 - 6.0172e+04i	6.1804e...	3.2200e...	-2.6146e...
273	5.5404e...	5.4059e...	4.3913e...	-4.5927e+04 + 8.7695e+04i	-5.7298e+03 - 7.6331e+03i	9.9498e+03 - 3.7192e+04i	-1.0865e+05 - 1.6992e+04i	4.7043e+04 - 4.5196e+04i	-1.5898e...	-4.6990e...	7.0222e...

Soma de todos os valores de pixel da imagem = Valor Médio * (M x N)

No MATLAB

Editor – Fourier_Teste.m | Variables – F

F | f

F <512x512 complex double>

	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262
241	7.0222e...	-4.6990e...	-1.5898e...	4.7043e+04 + 4.5196e+04i	-1.0865e+05 + 1.6992e+04i	9.9498e+03 + 3.7192e+04i	-5.7298e+03 + 7.6331e+03i	-4.5927e+04 - 8.7695e+04i	4.3913e...	5.4059e...	5.5404e...
242	-2.6146e...	3.2200e...	6.1804e...	-9.3030e+03 + 6.0172e+04i	-6.2860e+04 - 3.1217e+04i	1.5864e+04 + 1.2244e+05i	4.3808e+03 - 2.7632e+04i	-3.2526e+03 - 2.7110e+04i	-8.7874e...	6.3182e...	3.9156e...
243	5.4585e...	-2.6800e...	9.7722e...	6.9837e+04 - 4.4182e+04i	-3.3716e+04 + 9.7907e+04i	-6.1506e+04 + 4.9040e+04i	1.6649e+05 + 1.3256e+04i	-1.2349e+05 + 9.7661e+04i	9.9969e...	-2.7693e...	2.3335e...
244	8.4746e...	8.2216e...	-1.0247e...	9.1451e+04 - 5.4524e+04i	-9.0171e+04 - 1.1491e+03i	7.3890e+04 + 8.4533e+04i	-1.8855e+03 + 8.7493e+04i	-8.8385e+04 + 3.4033e+04i	-6.2312e...	3.7367e...	5.3612e...
245	6.0838e...	6.2956e...	-1.9439e...	3.1416e+04 - 6.3166e+04i	-7.3296e+04 + 3.5284e+04i	9.6437e+04 - 1.9804e+04i	-1.4756e+04 + 1.1042e+05i	-7.2945e+04 - 1.6855e+04i	1.0659e...	-1.2483e...	4.1667e...
246	3.2505e...	-1.1689e...	8.3204e...	-5.1690e+04 + 5.6431e+04i	2.2340e+04 - 2.9495e+04i	8.7077e+03 + 9.2136e+04i	1.2687e+03 - 1.1139e+05i	-3.9152e+04 + 8.8200e+03i	5.3381e...	1.3926e...	1.2428e...
247	-9.0148e...	3.6092e...	-1.3624e...	1.5645e+05 - 1.5462e+05i	-1.6982e+05 + 2.1784e+05i	8.6055e+03 - 1.0845e+04i	6.9410e+04 - 1.6365e+04i	3.4237e+04 - 1.0715e+04i	3.6128e...	1.2772e...	9.9861e...
248	-6.1911e...	-1.5519e...	-1.3746e...	1.7586e+04 - 1.0349e+05i	4.8112e+04 - 3.1655e+04i	5.9298e+04 + 2.1318e+05i	-1.0523e+05 - 3.1033e+04i	7.7272e+04 - 5.1989e+03i	-8.1886e...	1.8022e...	6.3171e...
249	4.0274e...	-1.3483e...	-4.1280e...	4.2900e+04 - 1.6177e+05i	4.1911e+04 + 1.7119e+05i	2.9228e+04 - 8.1039e+04i	2.0184e+05 + 3.1504e+05i	-2.8899e+05 + 5.7701e+04i	-5.1793e...	2.2197e...	-2.6523e...
250	-9.1127e...	2.3712e...	-1.8833e...	1.1235e+04 + 1.0427e+05i	-1.5357e+05 - 3.3534e+04i	1.4937e+05 + 1.5867e+05i	-2.0131e+05 + 4.6607e+04i	-7.5591e+03 - 9.2198e+04i	-1.2567e...	1.9806e...	-1.2958e...
251	-8.3721e...	-1.0202e...	3.5255e...	1.2064e+05 + 6.4058e+04i	-3.3198e+05 + 3.4171e+05i	-2.4514e+05 - 4.0553e+04i	6.6585e+04 + 1.1701e+05i	-1.3113e+05 - 4.3766e+05i	-4.0901e...	1.0688e...	1.1892e...
252	1.1099e...	-3.2271e...	1.8626e...	2.7136e+05 + 2.7341e+05i	9.7286e+04 + 1.3117e+05i	-4.2132e+05 + 4.8793e+05i	-2.8675e+05 - 2.8937e+05i	2.5611e+05 - 3.7721e+05i	-1.7207e...	8.4845e...	3.6410e...
253	6.5424e...	4.2296e...	-7.2159e...	4.0764e+05 - 5.0272e+05i	2.4898e+04 + 2.8557e+05i	5.6560e+04 + 1.9778e+05i	2.3218e+05 + 4.2285e+05i	-3.1649e+05 - 2.3930e+05i	1.4231e...	-6.0309e...	2.1798e...
254	2.4768e...	2.7172e...	1.0928e...	-4.6077e+05 - 1.1300e+05i	-2.5942e+05 + 5.9045e+05i	3.0976e+05 - 6.7362e+05i	1.1361e+06 + 1.0196e+06i	-9.4659e+05 + 2.5136e+05i	-1.0735e...	2.0703e...	-2.9959e...
255	-9.0376e...	-1.1981e...	-4.5006e...	7.4166e+05 + 7.2424e+05i	-5.3074e+05 - 2.5889e+05i	-8.3591e+05 - 1.2394e+05i	1.0407e+06 - 3.0601e+05i	-9.9303e+05 + 6.2590e+05i	6.5818e...	-8.5012e...	-7.6471e...
256	-6.7380e...	9.1693e...	-1.0107e...	-1.2544e+06 - 1.0767e+06i	-6.8463e+05 - 2.2557e+06i	1.6129e+05 + 1.5019e+06i	-1.0679e+05 - 1.3451e+06i	-2.4187e+05 - 2.8597e+05i	5.1318e...	1.9199e...	-7.6424e...
257	9.0935e...	1.0152e...	6.6594e...	2.0755e+06 + 6.0474e+05i	-9.7442e+05 - 2.9499e+06i	1.8404e+07 + 0.0000e+00i	-9.7442e+05 + 2.9499e+06i	2.0755e+06 - 6.0474e+05i	6.6594e...	1.0152e...	9.0935e...
258	-7.6424e...	1.9199e...	5.1318e...	-2.4187e+05 + 2.8597e+05i	-1.0679e+05 + 1.3451e+06i	1.6129e+05 - 1.5019e+06i	-6.8463e+05 + 2.2557e+06i	-1.2544e+06 + 1.0767e+06i	-1.0107e...	9.1693e...	-6.7380e...
259	-7.6471e...	-8.5012e...	6.5818e...	-9.9303e+05 - 6.2590e+05i	1.0407e+06 + 3.0601e+05i	-8.3591e+05 + 1.2394e+05i	-5.3074e+05 + 2.5889e+05i	7.4166e+05 - 7.2424e+05i	-4.5006e...	-1.1981e...	-9.0376e...
260	-2.9959e...	2.0703e...	-1.0735e...	-9.4659e+05 - 2.5136e+05i	1.1361e+06 - 1.0196e+06i	3.0976e+05 + 6.7362e+05i	-2.5942e+05 - 5.9045e+05i	-4.6077e+05 + 1.1300e+05i	1.0928e...	2.7172e...	2.4768e...
261	2.1798e...	-6.0309e...	1.4231e...	-3.1649e+05 + 2.3930e+05i	2.3218e+05 - 4.2285e+05i	5.6560e+04 - 1.9778e+05i	2.4898e+04 - 2.8557e+05i	4.0764e+05 + 5.0272e+05i	-7.2159e...	4.2296e...	6.5424e...
262	3.6410e...	8.4845e...	-1.7207e...	2.5611e+05 + 3.7721e+05i	-2.8675e+05 + 2.8937e+05i	-4.2132e+05 - 4.8793e+05i	9.7286e+04 - 1.3117e+05i	2.7136e+05 - 2.7341e+05i	1.8626e...	-3.2271e...	1.1099e...
263	1.1892e...	1.0688e...	-4.0901e...	-1.3113e+05 + 4.3766e+05i	6.6585e+04 - 1.1701e+05i	-2.4514e+05 + 4.0553e+04i	-3.3198e+05 - 3.4171e+05i	1.2064e+05 - 6.4058e+04i	3.5255e...	-1.0202e...	-8.3721e...
264	-1.2958e...	1.9806e...	-1.2567e...	-7.5591e+03 + 9.2198e+04i	-2.0131e+05 - 4.6607e+04i	1.4937e+05 - 1.5867e+05i	-1.5357e+05 + 3.3534e+04i	1.1235e+04 - 1.0427e+05i	-1.8833e...	2.3712e...	-9.1127e...
265	-2.6523e...	2.2197e...	-5.1793e...	-2.8899e+05 - 5.7701e+04i	2.0184e+05 - 3.1504e+05i	2.9228e+04 + 8.1039e+04i	4.1911e+04 - 1.7119e+05i	4.2900e+04 + 1.6177e+05i	-4.1280e...	-1.3483e...	4.0274e...
266	6.3171e...	1.8022e...	-8.1886e...	7.7272e+04 + 5.1989e+03i	-1.0523e+05 + 3.1033e+04i	5.9298e+04 - 2.1318e+05i	4.8112e+04 + 3.1655e+04i	1.7586e+04 + 1.0349e+05i	-1.3746e...	-1.5519e...	-6.1911e...
267	9.9861e...	1.2772e...	3.6128e...	3.4237e+04 + 1.0715e+04i	6.9410e+04 + 1.6365e+04i	8.6055e+03 + 1.0845e+04i	-1.6982e+05 - 2.1784e+05i	1.5645e+05 + 1.5462e+05i	-1.3624e...	3.6092e...	-9.0148e...
268	1.2428e...	1.3926e...	5.3381e...	-3.9152e+04 - 8.8200e+03i	1.2687e+03 + 1.1139e+05i	8.7077e+03 - 9.2136e+04i	2.2340e+04 + 2.9495e+04i	-5.1690e+04 - 5.6431e+04i	8.3204e...	-1.1689e...	3.2505e...
269	4.1667e...	-1.2483e...	1.0659e...	-7.2945e+04 + 1.6855e+04i	-1.4756e+04 - 1.1042e+05i	9.6437e+04 + 1.9804e+04i	-7.3296e+04 - 3.5284e+04i	3.1416e+04 + 6.3166e+04i	-1.9439e...	6.2956e...	6.0838e...
270	5.3612e...	3.7367e...	-6.2312e...	-8.8385e+04 - 3.4033e+04i	-1.8855e+03 - 8.7493e+04i	7.3890e+04 - 8.4533e+04i	-9.0171e+04 + 1.1491e+03i	9.1451e+04 + 5.4524e+04i	-1.0247e...	8.2216e...	8.4746e...
271	2.3335e...	-2.7693e...	9.9969e...	-1.2349e+05 - 9.7661e+04i	1.6649e+05 - 1.3256e+04i	-6.1506e+04 - 4.9040e+04i	-3.3716e+04 - 9.7907e+04i	6.9837e+04 + 4.4182e+04i	9.7722e...	-2.6800e...	5.4585e...
272	3.9156e...	6.3182e...	-8.7874e...	-3.2526e+03 + 2.7110e+04i	4.3808e+03 + 2.7632e+04i	1.5864e+04 - 1.2244e+05i	-6.2860e+04 + 3.1217e+04i	-9.3030e+03 - 6.0172e+04i	6.1804e...	3.2200e...	-2.6146e...
273	5.5404e...	5.4059e...	4.3913e...	-4.5927e+04 + 8.7695e+04i	-5.7298e+03 - 7.6331e+03i	9.9498e+03 - 3.7192e+04i	-1.0865e+05 - 1.6992e+04i	4.7043e+04 - 4.5196e+04i	-1.5898e...	-4.6990e...	7.0222e...

Complexos Conjugados

Propriedades da DFT 2-D

8) Convolução

Teorema da Convolução.

$$f(x,y) * g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)$$

Convolução *no domínio do tempo/espaço* ⇔ ***Multiplicação*** *no domínio da frequência*

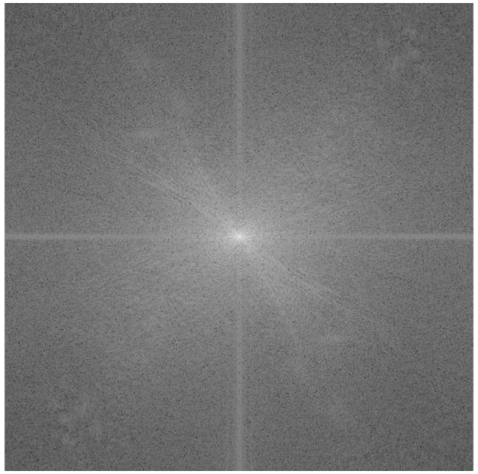
Multiplicação *no domínio do tempo/espaço* ⇔ ***Convolução*** *no domínio da frequência*

Magnitude x Fase

O que é mais importante?

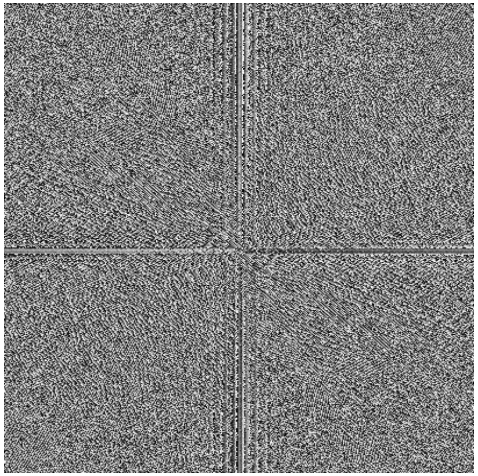
MÓDULO:

Amplitude de cada onda 2D



FASE:

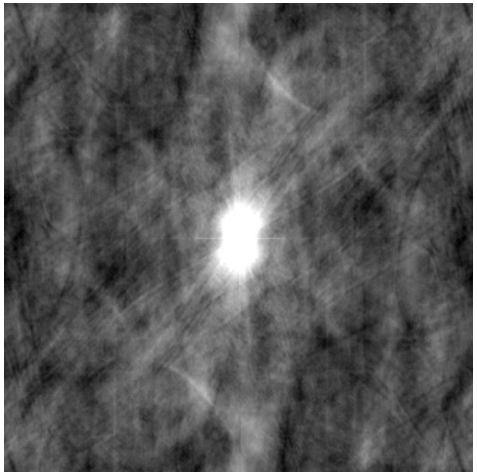
Direção de cada onda 2D



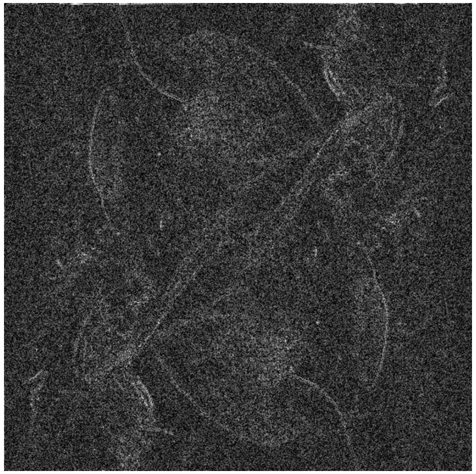
Magnitude x Fase

O que é mais importante?

Transformação inversa usando apenas o MÓDULO



Transformação inversa usando apenas a FASE



Parte Real x Parte Imaginária

Transformação inversa
usando apenas a parte
REAL

Transformação inversa
usando apenas a parte
IMAGINÁRIA

FIM