Resolução de Estruturas Hiperestáticas por Etapas

Edgard Sant'Anna de Almeida Neto
almeidae@usp.br

PEF – Departamento de Estruturas e Geotécnica
Escola Politécnica da USP
São Paulo, SP

24 de Agosto de 2018

Conteúdo

1. Resolução de Estruturas por Etapas

Dicas

- Explicite a variável independente no enunciado e estabeleça eventos nessa variável visando delimitar as etapas do problema.
  A variável pode ser uma carga, o tempo, a temperatura, a umidade etc.
- Faça esboços representativos de cada etapa.
  Desenhe a geometria e as ações; para depois acrescentar deslocamentos, alongamentos e forças normais relevantes.
- Faça a distinção entre uma variável e seus incrementos nas etapas.
  É usual caracterizar a etapa por valores das variáveis no final da etapa.
- Escolha nGL deslocamentos incógnitos se estiver resolvendo pelo método dos deslocamentos ou GH incógnitas hiperestáticas se estiver resolvendo pelo método dos esforços.
  Lembre-se que nGL e GH podem variar de etapa para etapa.
- Vale a pena representar as forças normais incógnitas como positivas e usar a intuição para verificar as respostas no final das etapas.

Estrutura com Folgas de Montagem

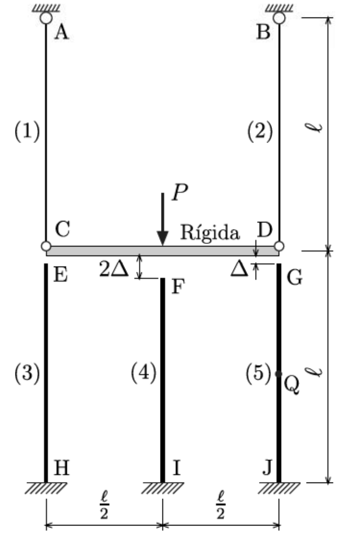
Exemplo (Q20-14P1Q2)

A carga P aplicada na estrutura da figura varia de 0 a 1 600 kN. Para esse intervalo, trace os seguintes gráficos:

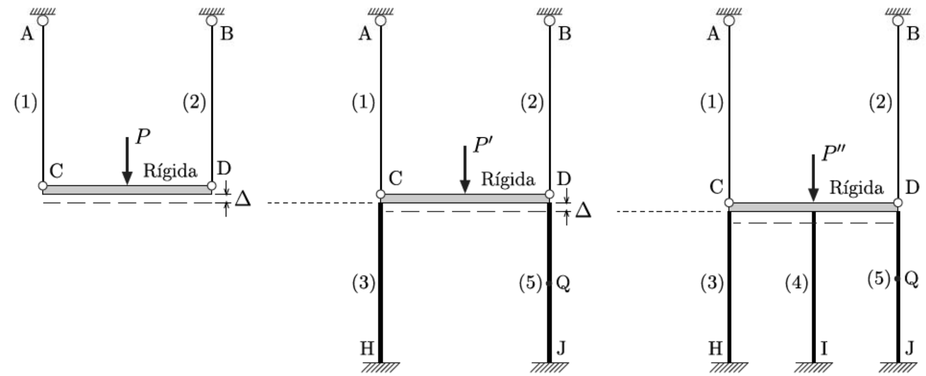
$$\sigma_1 \times P, \quad \sigma_3 \times P, \quad v_Q \times P.$$

sendo σ_1 e σ_3 as tensões normais nas barras 1 e 3, e v_Q o deslocamento vertical do ponto Q.

A barra CD é rígida, as barras 1 e 2 possuem produto de rigidez EA e as barras 3, 4 e 5 possuem produto de rigidez 2EA. São dados: $\ell = 100$ cm, $\Delta = 0{,}1$ cm, $E = 10\,000$ kN/cm^2, $A = 10$ cm^2.



Divisão em Etapas - Movimento de CD sob a ação de P



A – Até atingir (3) e (5)

$0 \leq P \leq P^{\mathrm{A}}$

B – Até atingir (4)

$P^{\mathrm{A}} \leq P \leq P^{\mathrm{B}}$

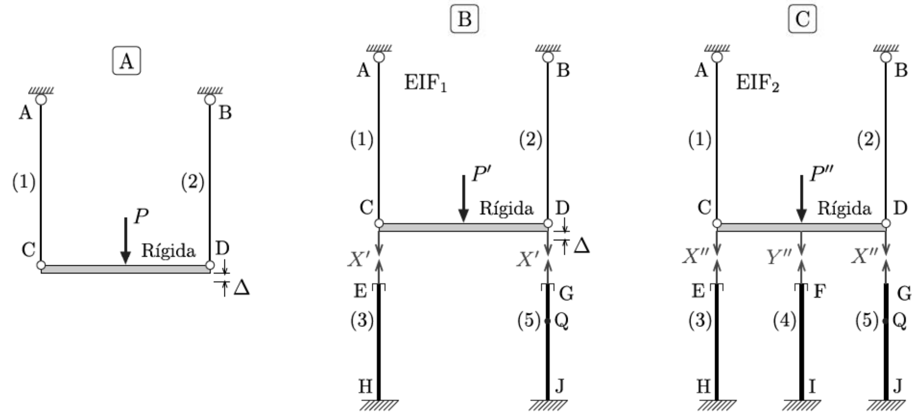
$0 \leq P' \leq P^{\mathrm{B}} - P^{\mathrm{A}}$

C – Até $P = 1600$ kN

$P^{\mathrm{B}} \leq P \leq 1600$

$0 \leq P'' \leq 1600 - P^{\mathrm{B}}$

Método dos Esforços - três estruturas distintas!



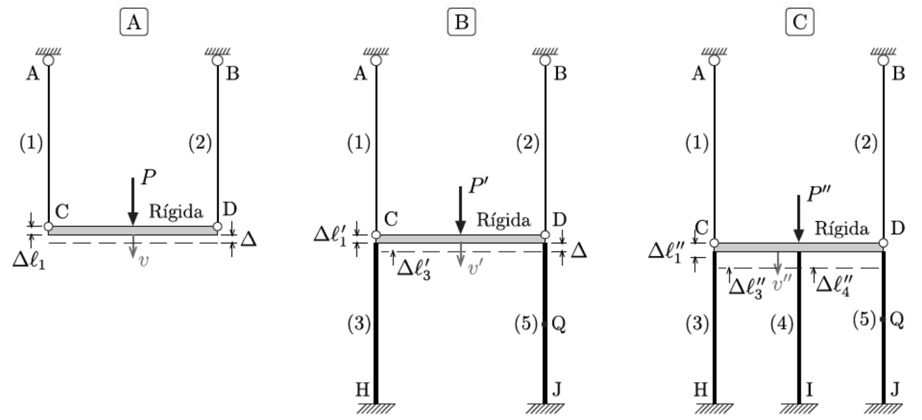
$GH = 1$

$\boxed{v'_{\mathrm{C}} = v'_{\mathrm{E}}}$

$GH = 2$

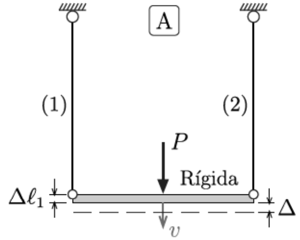
$\boxed{v''_{\mathrm{C}} = v''_{\mathrm{E}} = v''_{\mathrm{F}}}$

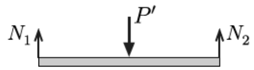
Método dos Deslocamentos - $nGL = 1$ nas três!



Etapa A

– Quando atinge (3) e (5)





- Compatibilidade

$$\boxed{v = \Delta\ell_1 = \Delta}$$

- Eq. constitutiva

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell}{EA} = \Delta \quad \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{EA}{\ell}\Delta = \frac{10^4 \times 10}{100}0{,}1 = 100\,\text{kN}$$

- Equilíbrio

$$P = N_1 + N_2 = 2N_1 = 200\,\text{kN}$$

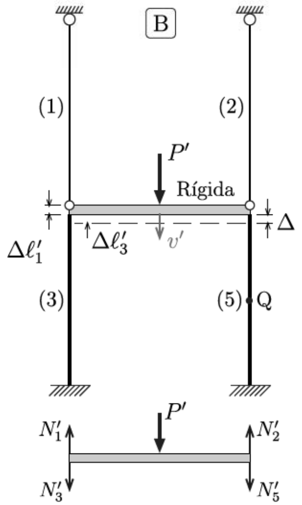
$P^{\mathrm{A}} = 200\,\text{kN}$

$N_1^{\mathrm{A}} = 100\,\text{kN}$ $\qquad N_3^{\mathrm{A}} = 0$ $\qquad v_Q^{\mathrm{A}} = 0$

$\sigma_1^{\mathrm{A}} = \dfrac{100}{10} = 10\,\text{kN/cm}^2$ $\qquad \sigma_3^{\mathrm{A}} = 0$

Etapa B

– Quando atinge (4)



- Compatibilidade

$$\boxed{v' = \Delta\ell_1' = -\Delta\ell_3' = \Delta}$$

- Eq. constitutiva

$$\frac{N_1'\ell}{EA} = -\frac{N_3'\ell}{2EA} = \Delta$$

$$N_1' = N_2' = \frac{EA}{\ell}\Delta = 100\,\text{kN}$$

$$N_3' = N_5' = -\frac{2EA}{\ell}\Delta = -200\,\text{kN}$$

- Equilíbrio

$$P' = 2N_1' - 2N_3' = 600\,\text{kN}$$

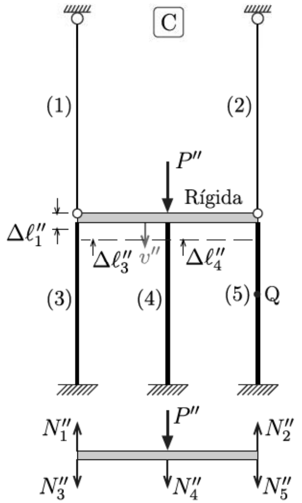
$P^{\mathrm{B}} = P^{\mathrm{A}} + P' = 800\,\text{kN}$

$N_1^{\mathrm{B}} = 200\,\text{kN}$ $\qquad N_3^{\mathrm{B}} = -200\,\text{kN}$ $\qquad v_Q^{\mathrm{B}} = \dfrac{\Delta}{2}$

$\sigma_1^{\mathrm{B}} = 20\,\text{kN/cm}^2$ $\qquad \sigma_3^{\mathrm{B}} = -10\,\text{kN/cm}^2$ $\qquad = 0{,}05\,\text{cm}$

Etapa C

– Quando $P = 1600\,\text{kN}$



$P'' = 1600 - P^{\mathrm{B}} = 800\,\text{kN}$

- Compatibilidade

$$\boxed{v'' = \Delta\ell_1'' = -\Delta\ell_3'' = -\Delta\ell_4''}$$

- Eq. constitutiva

$$\frac{N_1''\ell}{EA} = -\frac{N_3''\ell}{2EA} = -\frac{N_4''\ell}{2EA}$$

$$\Rightarrow \; N_3'' = N_4'' = -2N_1''$$

- Equilíbrio

$$P'' = 2N_1'' - 2N_3'' - N_4'' \;\Rightarrow\; 800 = (2+4+2)N_1''$$

$N_1'' = 100\,\text{kN}$ $\qquad N_3'' = N_4'' = -200\,\text{kN}$

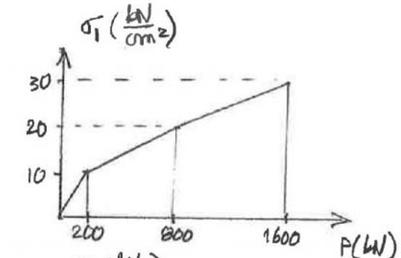
$v'' = 0{,}1\,\text{cm}$ $\qquad v_Q'' = 0{,}05\,\text{cm}$

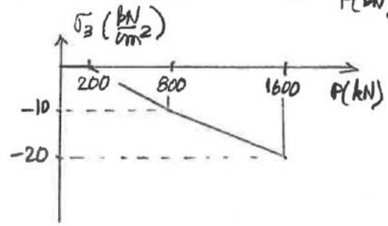
$P^{\mathrm{C}} = 1600\,\text{kN}$

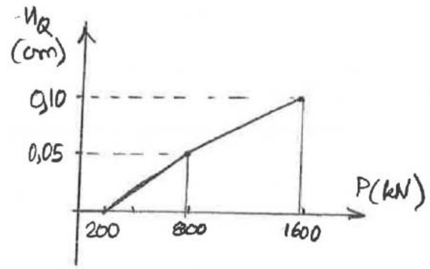
$N_1^{\mathrm{C}} = 300\,\text{kN}$ $\qquad N_3^{\mathrm{C}} = -400\,\text{kN}$ $\qquad v_Q^{\mathrm{C}} = 0{,}1\,\text{cm}$

$\sigma_1^{\mathrm{C}} = 30\,\text{kN/cm}^2$ $\qquad \sigma_3^{\mathrm{C}} = -20\,\text{kN/cm}^2$

Gráficos





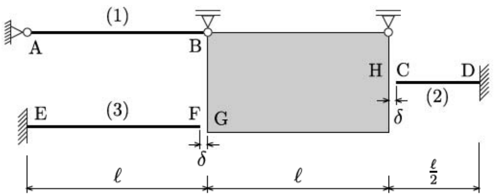


Problema (99P1Q2)

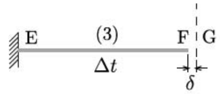
A barra EF da estrutura da figura sofre uma variação de temperatura de 250° C. Para mostrar o que ocorre na estrutura à medida que a temperatura aumenta, trace os seguintes gráficos no intervalo de $0 \leq \Delta t \leq 250°$ C:

a) $u_{\mathrm{F}} \times \Delta t$ *b)* $N_1 \times \Delta t$ *c)* $N_2 \times \Delta t$

A chapa GHB é infinitamente rígida e as barras AB, CD e EF são deformáveis, têm área $A = 10\,cm^2$ e seu material tem módulo de elasticidade $E = 1\,000\,kN/cm^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 20 \times 10^{-5°}\,C^{-1}$. Considere $\ell = 100\,cm$ e $\delta = 1\,cm$.

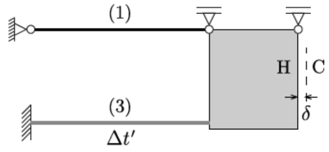


Divisão em Etapas



A – Até (3) atingir a chapa

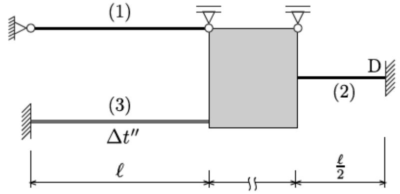
$$0 \leq \Delta t \leq \Delta t^{\mathrm{A}}$$



B – Até a chapa atingir (2)

$$\Delta t^{\mathrm{A}} \leq \Delta t \leq \Delta t^{\mathrm{B}}$$

$$0 \leq \Delta t' \leq \Delta t^{\mathrm{B}} - \Delta t^{\mathrm{A}}$$

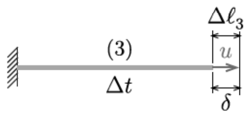


C – Até $\Delta t = 250°$ C

$$\Delta t^{\mathrm{B}} \leq \Delta t \leq 250$$

$$0 \leq \Delta t'' \leq 250 - \Delta t^{\mathrm{B}}$$

Etapa A
– Quando (3) atinge a chapa



- Compatibilidade

$$u = \Delta\ell_3 = \delta$$

- Eq. constitutiva

$$\Delta\ell_3 = \alpha\ell\Delta t = \delta$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\delta}{\alpha\ell} = \frac{1}{2 \times 10^{-4} \times 100} = 50°\,\mathrm{C}$$

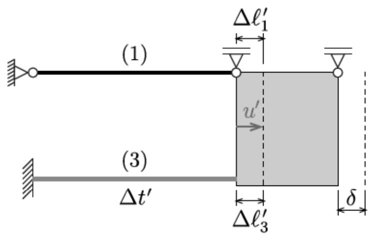
- Equilíbrio

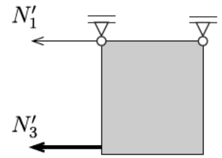
$$N_3 = 0$$

$\Delta t^{\mathrm{A}} = 50°$ C

$N_1^{\mathrm{A}} = 0 \qquad N_2^{\mathrm{A}} = 0 \qquad N_3^{\mathrm{A}} = 0$

Etapa B
– Quando a chapa atinge (2)





- Compatibilidade

$$u' = \Delta\ell_1' = \Delta\ell_3' = \delta$$

- Eqs. constitutivas

$$\frac{N_1'\ell}{EA} = \frac{N_3'\ell}{EA} + \alpha\ell\Delta t' = \delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1' = \dfrac{EA}{\ell}\delta = 100\,\mathrm{kN} \\ \Delta t' = \left(\delta - \dfrac{N_3'}{EA}\right)\dfrac{1}{\alpha\ell} \end{cases}$$

- Equilíbrio

$$N_3' = -N_1' = -100\,\mathrm{kN}$$

$$\Delta t' = 100°\,\mathrm{C}$$

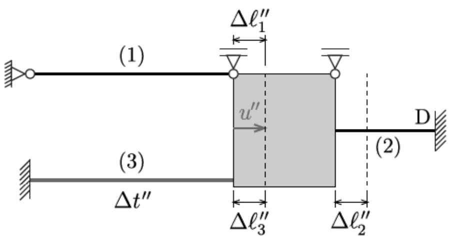
$\Delta t^{\mathrm{B}} = 150°$ C

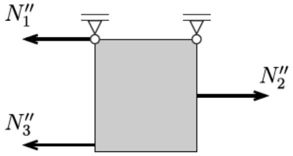
$N_1^{\mathrm{B}} = 100\,\mathrm{kN} \quad N_2^{\mathrm{A}} = 0 \quad N_3^{\mathrm{A}} = -100\,\mathrm{kN}$

Etapa C

– Quando $\Delta t = 250°$ C

$\Delta t'' = 250 - 150 = 100°$ C





- Compatibilidade

$$u'' = \Delta\ell_1'' = \Delta\ell_3'' = -\Delta\ell_2''$$

- Eqs. constitutivas

$$\frac{N_1''\ell}{EA} = \frac{N_3''\ell}{EA} + \alpha\ell\Delta t'' = -\frac{N_2''\frac{\ell}{2}}{EA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_2'' = -2N_1'' \\ N_3'' = N_1'' - \alpha\Delta t'' EA \end{cases}$$

- Equilíbrio

$$N_2'' = N_1'' + N_3''$$
$$-2N_1'' = N_1'' + N_1'' - \alpha\Delta t'' EA$$
$$N_1'' = \frac{2\times10^{-4}\times100\times1\times10^4}{4} = 50\,\text{kN}$$

$$N_2'' = -100\,\text{kN} \quad N_3'' = -150\,\text{kN}$$

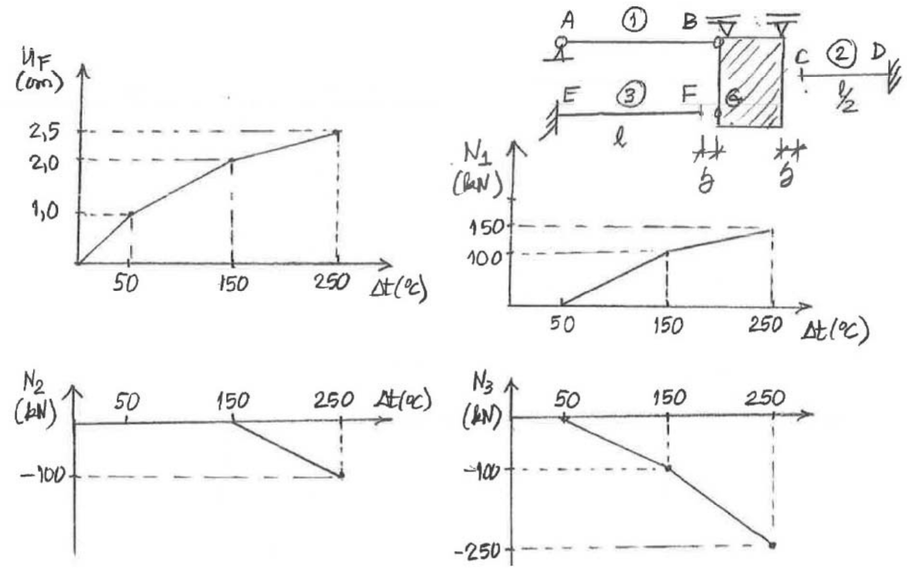
$\Delta t^{\mathrm{C}} = 250°$ C

$$N_1^{\mathrm{C}} = 150\,\text{kN} \qquad N_2^{\mathrm{C}} = -100 \qquad N_3^{\mathrm{C}} = -250\,\text{kN}$$

Deslocamento do ponto F:

$$u_{\mathrm{F}} = \Delta\ell_3 \begin{cases} \Delta t = 50°\text{ C} & u_{\mathrm{F}}^{\mathrm{A}} = \delta = 1\,\text{cm} \\ \Delta t = 100°\text{ C} & u_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}} = 2\delta = 2\,\text{cm} \\ \Delta t = 250°\text{ C} & u_{\mathrm{F}}^{\mathrm{C}} = \dfrac{N_3\ell}{EA} + \alpha\ell\Delta t \\ & \quad = \dfrac{-250\times100}{1\times10^4} + 2\times10^{-4}\times100\times250 \\ & \quad = -2{,}5 + 5 = 2{,}5\,\text{cm} \end{cases}$$

Gráficos

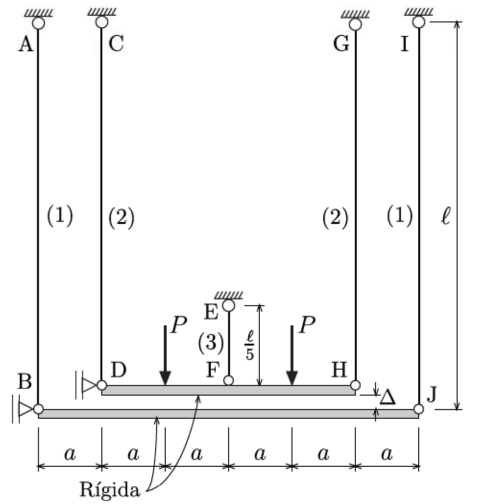


Exemplo (Q21-15P1Q3 – Ruptura de barra)

Na estrutura da figura, as barras DH e BJ são infinitamente rígidas. As barras 1 e 2 têm comprimento ℓ e a barra 3, comprimento $\ell/5$. As barras 1, 2 e 3 têm área A e seu material possui módulo de elasticidade E e tensão de ruptura à tração σ_{rt}. Trace os diagramas de

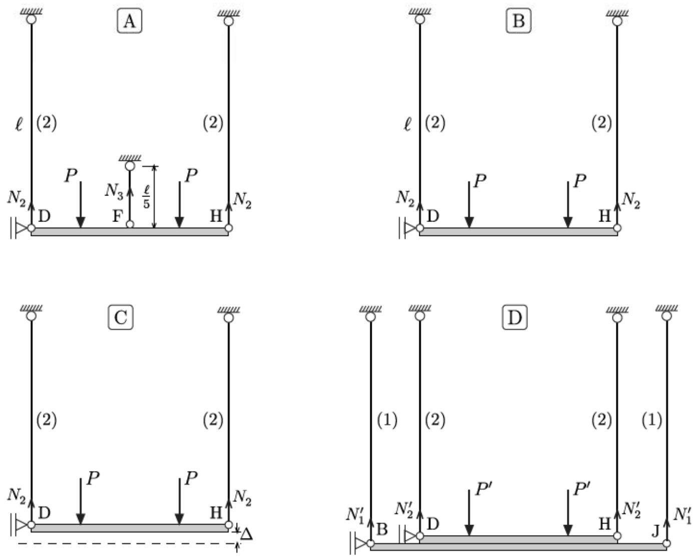
$$\sigma_1 \times P, \quad \sigma_2 \times P, \quad \sigma_3 \times P$$

quando P varia de 0 a 40 kN.
São dados: $\ell = 100$ cm,
$\Delta = 0{,}075$ cm,
$E = 20\,000\ kN/cm^2$, $A = 2\ cm^2$,
$\sigma_{rt} = 20\ kN/cm^2$



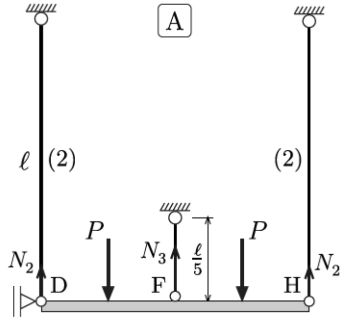
Método dos Deslocamentos – $nGL = 1$

ETAPAS:



Etapa A

– Instante da ruptura de (3)



- Compatibilidade $\boxed{v = \Delta\ell_2 = \Delta\ell_3}$
- Eq. constitutiva

$$\frac{N_2 \ell}{EA} = \frac{N_3 \ell}{5EA} \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{N_3}{5}$$

- Equilíbrio

$$2N_2 + N_3 = 2P \;\Rightarrow\; N_3 = \frac{10P}{7} \quad N_2 = \frac{2P}{7}$$

Ruptura da barra 3 $\quad \sigma_3 = \sigma_{rt} = 20\,\mathrm{kN/cm^2}$

$$\sigma_3 = \frac{10P}{7 \times 2} = 20 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 28\,\mathrm{kN}}$$

$N_3 = 40\,\mathrm{kN}$ $N_2 = 8\,\mathrm{kN}$

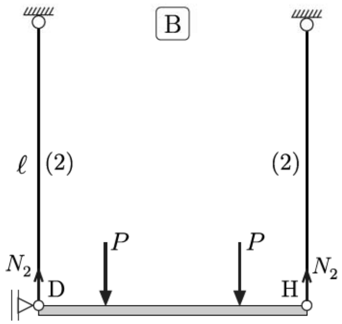
Barra DFH encosta em BJ $\quad v_{\mathrm{F}} = \Delta$

$$v_{\mathrm{F}} = \Delta\ell_3 = \Delta \;\Rightarrow\; \frac{\frac{10P}{7} \times 100}{5 \times 40 \times 10^3} = 0{,}075$$

$P = 105\,\mathrm{kN}$

Etapa B

– Logo após a ruptura ($N_3 = 0$)



- Equilíbrio

$$N_2 = P = 28\,\mathrm{kN}$$

$P^{\mathrm{B}} = 28\,\mathrm{kN}$

$N_1^{\mathrm{B}} = 0 \quad N_2^{\mathrm{B}} = 28\,\mathrm{kN} \quad N_3^{\mathrm{B}} = 0$

$\sigma_1^{\mathrm{B}} = 0 \quad \sigma_2^{\mathrm{B}} = 14\,\mathrm{kN/cm^2} \quad \sigma_3^{\mathrm{B}} = 0$

Encosta nas barras inferiores?

$$\Delta\ell_2 = \frac{28 \times 100}{20000 \times 2} = 0{,}07 < \Delta$$

Não encosta!

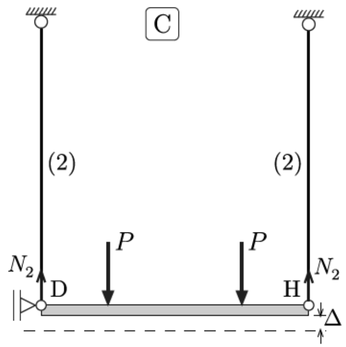
$P^{\mathrm{A}} = 28\,\mathrm{kN}$

$N_1^{\mathrm{A}} = 0 \quad N_2^{\mathrm{A}} = 8\,\mathrm{kN} \quad N_3^{\mathrm{A}} = 40\,\mathrm{kN}$

Etapa C

– Quando DFH toca BJ

$v = \Delta$



- Equilíbrio

$$N_2 = P$$

- Eq. constitutiva e compatibilidade

$$\frac{N_2 \ell}{EA} = \frac{P\ell}{EA} = \Delta \;\Rightarrow$$

$$\frac{P \times 100}{40 \times 10^3} = 0{,}075 \;\Rightarrow$$

$P = 30\,\mathrm{kN}$

$P^{\mathrm{C}} = 30\,\mathrm{kN}$

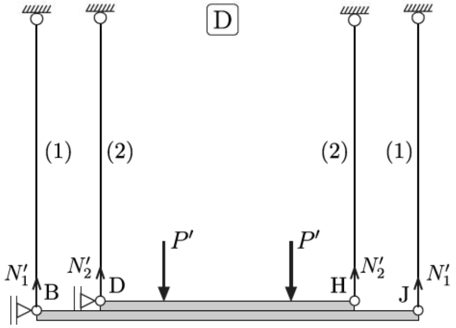
$N_1^{\mathrm{C}} = 0 \quad N_2^{\mathrm{C}} = 30\,\mathrm{kN} \quad N_3^{\mathrm{C}} = 0$

$\sigma_1^{\mathrm{C}} = 0 \quad \sigma_2^{\mathrm{C}} = 15\,\mathrm{kN/cm^2} \quad \sigma_3^{\mathrm{C}} = 0$

Etapa D

– Após DFH tocar BJ

$P' = 40 - P^{\mathrm{C}} = 10\,\mathrm{kN}$



- Compatibilidade e eqs. constitutivas (PE)

$$v' = \Delta\ell_1' = \Delta\ell_2' \Rightarrow$$

$$\frac{N_1'\ell}{EA} = \frac{N_2'\ell}{EA}$$

$$N_1' = N_2'$$

- Equilíbrio

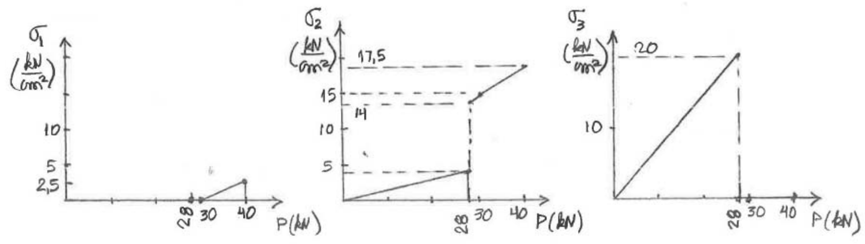
$$2N_2' + 2N_1' = 2P' \Rightarrow$$

$$N_1' = N_2' = \frac{P'}{2} = 5\,\mathrm{kN}$$

$P^{\mathrm{D}} = 40\,\mathrm{kN}$

$N_1^{\mathrm{D}} = 5\,\mathrm{kN}$	$N_2^{\mathrm{D}} = 35\,\mathrm{kN}$	$N_3^{\mathrm{D}} = 0$
$\sigma_1^{\mathrm{D}} = 2{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$	$\sigma_2^{\mathrm{D}} = 17{,}5\,\mathrm{kN/cm^2}$	$\sigma_3^{\mathrm{D}} = 0$

Gráficos



Método dos Esforços – $nGH = 2$

- Equilíbrio

$$2N_1 = Y \quad \Rightarrow N_1 = \frac{Y}{2}$$

$$2N_2 + X + Y = 2P \quad \Rightarrow N_2 = P - \frac{X+Y}{2}$$

$$N_3 = X$$

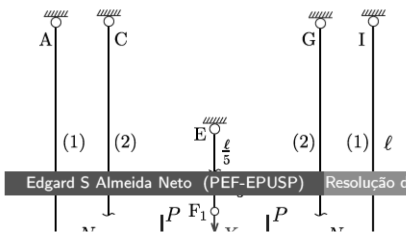
- Eqs. constitutivas

$$\Delta\ell_1 = \frac{Y\ell}{EA}$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{P\ell}{EA} - \frac{(X+Y)\ell}{EA}$$

$$\Delta\ell_3 = \frac{X\ell}{EA}$$

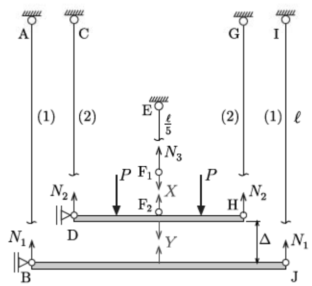
EIF



- Compatibilidade

Etapa A

– Antes de DFH tocar BJ ($Y = 0$)



$$v_{\mathrm{F1}} = v_{\mathrm{F2}} \overset{(1)}{\Rightarrow} X = \frac{10P}{7}$$

$$N_1 = 0 \quad N_2 = \frac{2P}{7} \quad N_3 = \frac{10P}{7}$$

Ruptura da barra 3 $\quad \sigma_3 = \sigma_{rt} = 20\,\mathrm{kN/cm^2}$

$$\sigma_3 = \frac{5P}{7} = 20 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 28\,\mathrm{kN}}$$

$$N_3 = 40\,\mathrm{kN} \; N_2 = 8\,\mathrm{kN}$$

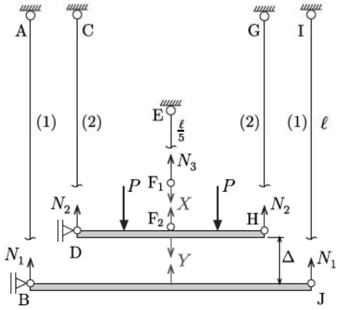
Barra DFH toca BJ $\quad v_{\mathrm{F}} = \Delta$

$$v_{\mathrm{F}} = \Delta\ell_3 = \Delta \Rightarrow \frac{\frac{10P}{7} \times 100}{5 \times 40 \times 10^3} = 0{,}075$$

$$P = 105\,\mathrm{kN}$$

$P^{\mathrm{A}} = 28\,\mathrm{kN}$

$N_1^{\mathrm{A}} = 0$	$N_2^{\mathrm{A}} = 8\,\mathrm{kN}$	$N_3^{\mathrm{A}} = 40\,\mathrm{kN}$
$\sigma_1^{\mathrm{A}} = 0$	$\sigma_2^{\mathrm{A}} = 4\,\mathrm{kN/cm^2}$	$\sigma_3^{\mathrm{A}} = 20\,\mathrm{kN/cm^2}$



Etapa B

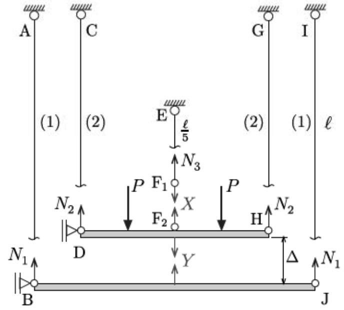
– Logo após a ruptura
$(X = 0, Y = 0, P = 28\,\text{kN})$

$$N_2 = \frac{P}{2}$$

$P^{\mathrm{A}} = 28\,\text{kN}$

$$N_1^{\mathrm{B}} = 0 \qquad N_2^{\mathrm{B}} = 28\,\text{kN} \qquad N_3^{\mathrm{B}} = 0$$

$$\sigma_1^{\mathrm{B}} = 0 \qquad \sigma_2^{\mathrm{B}} = 14\,\text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_3^{\mathrm{B}} = 0$$



Etapa C

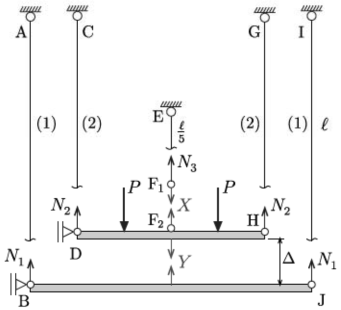
– Até DFH tocar BJ
$(X = 0, Y = 0)$

$$v_{\mathrm{D}} = \Delta\ell_2 = \Delta \;\Rightarrow\; \frac{P \times 100}{40 \times 10^3} = 0{,}075$$
$$P = 30\,\text{kN}$$

$P^{\mathrm{C}} = 30\,\text{kN}$

$$N_1^{\mathrm{C}} = 0 \qquad N_2^{\mathrm{C}} = 30\,\text{kN} \qquad N_3^{\mathrm{C}} = 0$$

$$\sigma_1^{\mathrm{C}} = 0 \qquad \sigma_2^{\mathrm{C}} = 15\,\text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_3^{\mathrm{C}} = 0$$



Etapa D

– Após DFH tocar BJ
$(X = 0, P = 40\,\text{kN})$

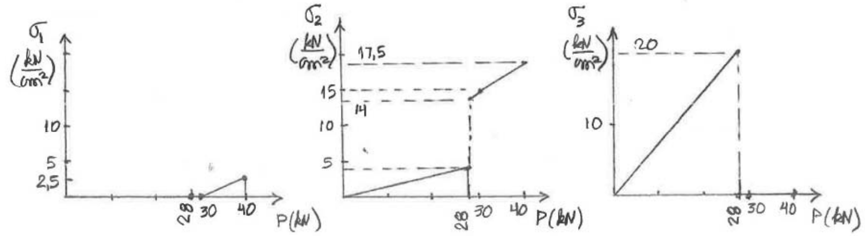
$$v_{\mathrm{D}} = v_{\mathrm{B}} + \Delta \overset{(2)}{\Rightarrow} Y = -\frac{EA\Delta}{\ell} + P \;\Rightarrow$$
$$Y = -30 + 40 = 10\,\text{kN}$$

$P^{\mathrm{D}} = 40\,\text{kN}$

$$N_1^{\mathrm{D}} = 5\,\text{kN} \qquad N_2^{\mathrm{D}} = 35\,\text{kN} \qquad N_3^{\mathrm{D}} = 0$$

$$\sigma_1^{\mathrm{D}} = 2{,}5\,\text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_2^{\mathrm{D}} = 17{,}5\,\text{kN/cm}^2 \qquad \sigma_3^{\mathrm{D}} = 0$$

Gráficos



Problema (13P1Q1)

O material das barras da estrutura da figura tem módulo de elasticidade E, coeficiente de dilatação térmica α e tensão de ruptura à compressão σ_r. As seções transversais das barras 2 e 3 têm o dobro da área da seção da barra 1, ou seja, $A_1 = A$ e $A_2 = A_3 = 2A$.

Admitindo que as barras 2 e 3 sofram um acréscimo de temperatura $0 \leq \Delta T \leq 250°C$ e que o material se desintegre no caso da barra se romper, trace os gráficos de a) $\sigma_{\mathrm{P}} \times \Delta T$, b) $\sigma_{\mathrm{Q}} \times \Delta T$, c) $u_{\mathrm{R}} \times \Delta T$; em que σ_{P} e σ_{Q} são tensões normais nos pontos médios das barras 1 e 2 e u_{R} é o deslocamento horizontal do ponto médio da barra 3.

São dados: $E = 10\,000\ kN/cm^2$, $\alpha = 2 \times 10^{-5}\ °\mathrm{C}^{-1}$, $\sigma_r = 24\ kN/cm^2$, $\ell = 100\ cm$, $\delta = 0{,}1\ cm$ e $A = 50\ cm^2$,