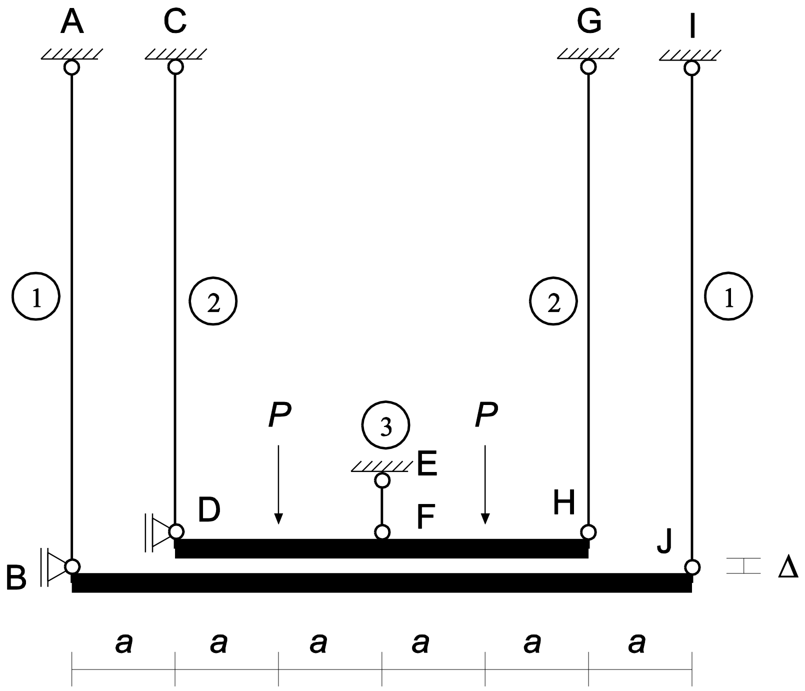
3ª Questão (3,5):

Na estrutura da figura, as barras DH e BJ são infinitamente rígidas. As barras 1 e 2 têm comprimento ℓ e a barra 3, comprimento $\ell/5$. As barras 1, 2 e 3 têm área A e seu material possui módulo de elasticidade E e tensão de ruptura à tração $\sigma_{r,t}$.

Traçar os diagramas $\sigma_1 \times P$, $\sigma_2 \times P$ e $\sigma_3 \times P$ quando P varia de 0 a $40kN$. São dados:

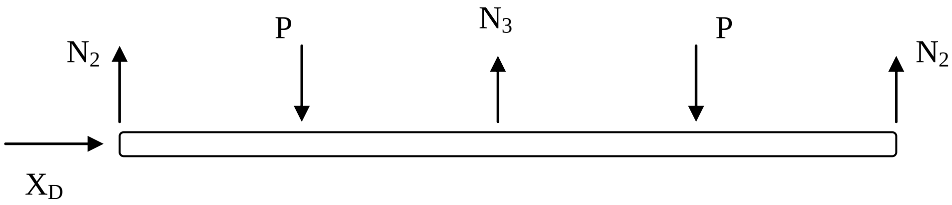
$\ell = 100cm, \Delta = 0{,}075cm, A = 2cm^2, E = 20000\,kN/cm^2, \sigma_{r,t} = 20\,kN/cm^2$



Resolução:

1) Antes de a barra DH encostar na barra BJ

A estrutura é uma vez hiperestática



Obs: as forças nas barras 2 são iguais por simetria.

Equações de equilíbrio:

$$\sum Fx = 0 \ \rightarrow \ Xd = 0$$

$$\sum Fy = 0 \ \rightarrow \ 2\,N_2 + N_3 = 2P \ \ (1)$$

Equação de compatibilidade de deslocamento:

$$v_D = v_F$$

$$v_D = \Delta l_2 = \frac{N_2 . l}{EA}$$

$$v_F = \Delta l_3 = \frac{N_3 . {}^{l}\!/_{5}}{EA}$$

$$\frac{N_2 . l}{EA} = \frac{N_3 . {}^{l}\!/_{5}}{EA}$$

$$N_3 = 5N_2 \ \ (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$2N_2 + 5N_2 = 2P$$

$$N_2 = \frac{2P}{7}$$

$$N_3 = \frac{10P}{7}$$

- Determinação do valor de N_3 que leva a barra DH a encostar na barra BJ:

$$v_F = \Delta l_3 = \frac{N_3 . {}^{l}/_{5}}{EA} = \Delta$$

$$N_3 = \frac{5\ EA\ \Delta}{l} = \frac{5 . 20000 . 2 . 0{,}075}{100} = 150\ kN$$

Para essa força, a tensão na barra 3 é:

$$\sigma_3 = \frac{150}{2} = 75 \frac{kN}{cm^2} > \sigma_{r,t} = 20\ kN/cm^2$$

Logo a barra 3 se rompe antes de a barra DH encostar na barra BJ. Quando ela se rompe, a estrutura passa a ser isostática e N_2 = P.

- Determinação da força P que rompe a barra 3:

$$\sigma_3 = \frac{10P}{7A} = \sigma_{r,t} = 20\ kN/cm^2$$

$$P = \frac{20 . 7 . 2}{10} = 28\ kN$$

Para P ≥ 28 kN e até a barra DH encostar na barra BJ, a estrutura é isostática.

- Determinação da força P que leva a barra DH a encostar em BJ:

$$v_D = \frac{P\ .\ l}{2\ EA} = \Delta$$

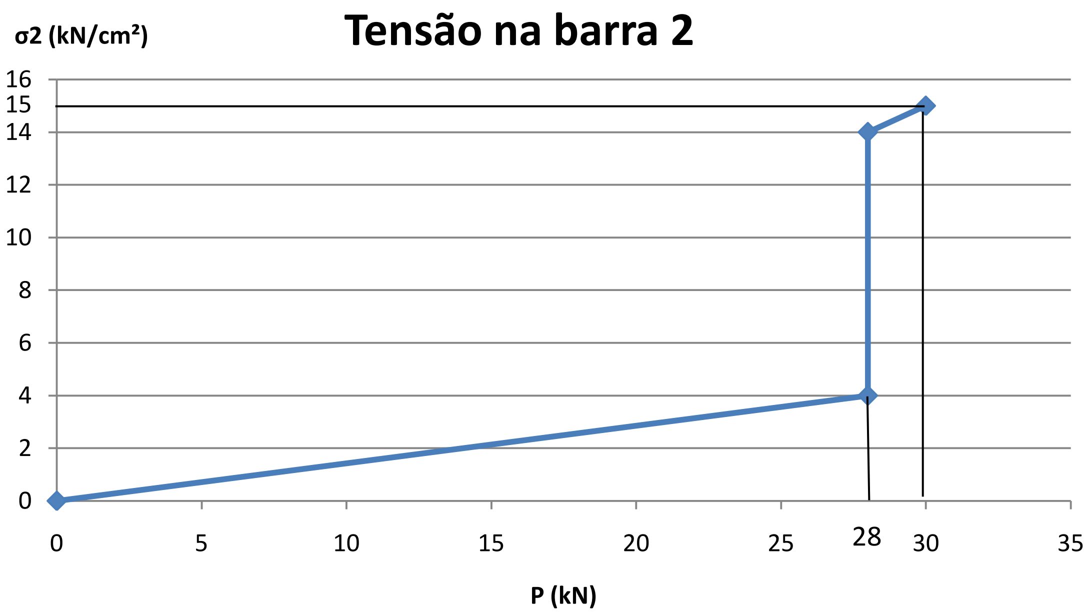
$$P = \frac{2\ EA\ \Delta}{l} = \frac{2 . 20000 . 2 . 0{,}075}{100} = 60\ kN$$

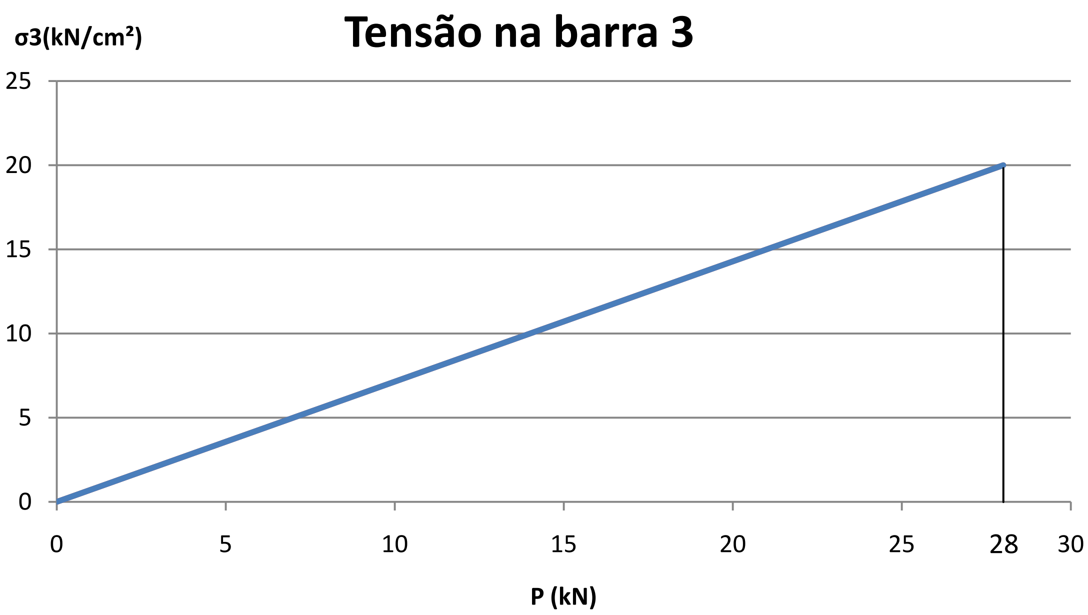
Para esse valor de P, a tensão na barra 2 é:

$$\sigma_2 = \frac{P}{2A} = \frac{60}{2 . 2} = 15\ kN/cm^2 < \sigma_{r,t} = 20\ kN/cm^2$$

Logo a barra 2 não rompe e para P = 60 kN a barra DH encosta em BJ, tornando-se duas vezes hiperestática.

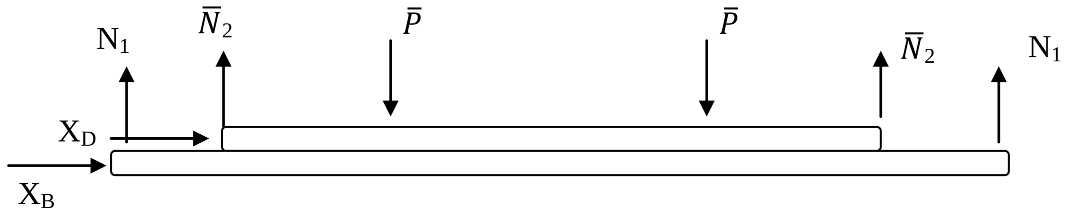
Para $0 \leq P \leq 30$, tem-se:





2) Após DH encostar BJ

A estrutura torna-se duas vezes hiperestática, chamando-se de $\bar{P}$ o acréscimo da força após DH ter encostado em BJ, isto é, $\bar{P} = P - 30$. Temos o seguinte:



Obs: As forças nas barras 1 são iguais por simetria

Como não há forças horizontais aplicadas na estrutura:

$$X_B = X_D = 0$$

Na figura acima, $\bar{N}_2$ é o acréscimo de força na barra 2 produzido por $\bar{P}$, ou seja, , $\bar{N}_2 = N_2 - 30$.

$$\sum Fy = 0 \ \rightarrow 2N_1 + 2\bar{N}_2 = 2\bar{P}$$

$$N_1 + \bar{N}_2 = \bar{P} \ \ (3)$$

Equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$v_B = v_D = \Delta = \frac{N_1 \, . \, l}{EA} = \frac{\bar{N}_2 \, . \, l}{EA}$$

$$N_1 = \bar{N}_2 \ \ (4)$$

De (3) e (4), temos:

$$N_1 + \bar{N}_2 = 2N_1 = \bar{P}$$

$$N_1 = \bar{N}_2 = \frac{\bar{P}}{2}$$

Para $\bar{P} = 40 - 30 = 10 \ kN$, tem-se:

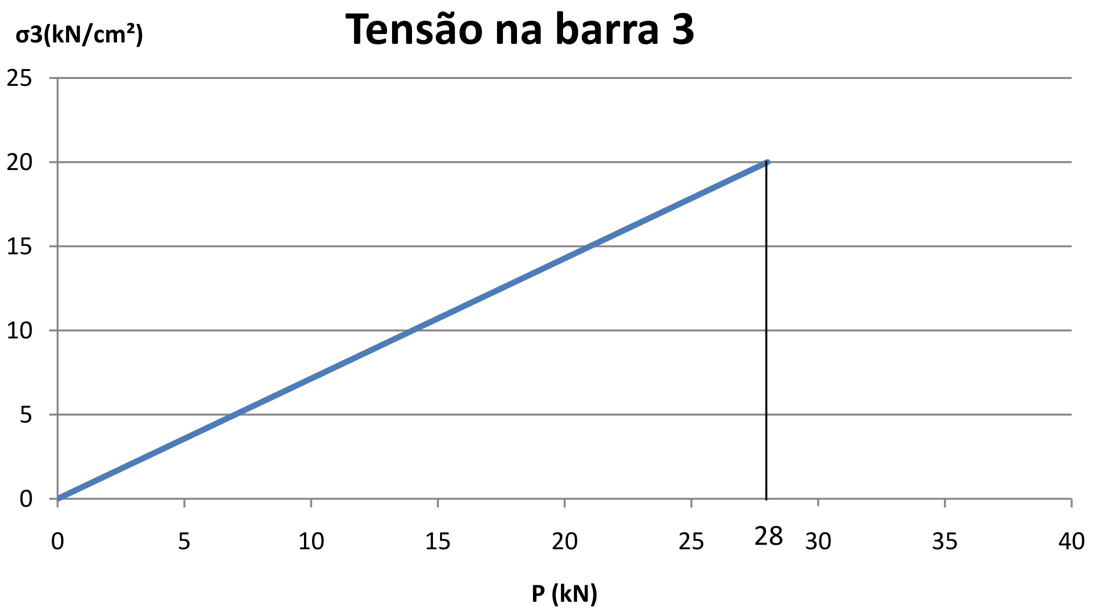
$$N_1 = \bar{N}_2 = \frac{\bar{P}}{2} = 5 \ kN$$

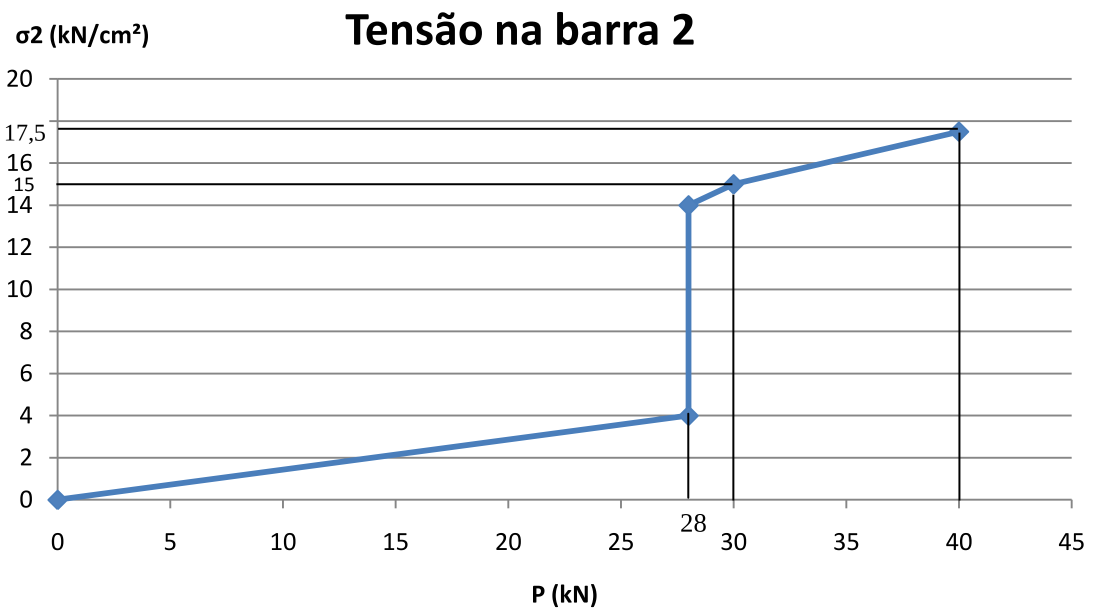
Ou seja, quando P = 40 kN, a tensão na barra 2 é:

$$\sigma_2 = \frac{30 + \bar{N}_2}{A} = \frac{30 + 5}{2} = 17{,}5\ kN/cm^2 < \sigma_{r,t} = 20\ kN/cm^2$$

Logo, a barra 2 não se rompe para P = 40 kN.

Para $0\ \leq P \leq 40$, tem-se:





Tensão na barra 1
σ1(kN/cm²)
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
P (kN)