VAs contínuas e discretas - VAs gaussianas

Prof. Marcio Eisencraft

[Peebles, 2000, Seções 2.1 a 2.4]; Apostila Seção 2.4

01 de março de 2019

Aula de hoje

VAs contínuas e discretas

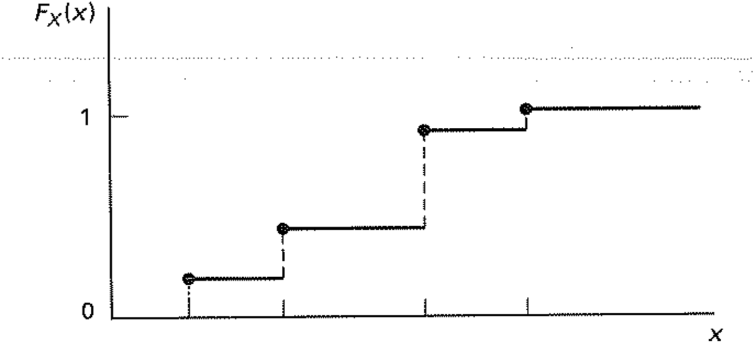
- É usual nas áreas aplicadas dividir as VAs em contínuas e discretas.

VAs contínuas e discretas

- É usual nas áreas aplicadas dividir as VAs em contínuas e discretas.
- Se $F_X(x)$ é contínua para todo x e sua derivada existe em todos os pontos exceto em um número enumerável de pontos X é dita VA contínua.

VAs contínuas e discretas

- É usual nas áreas aplicadas dividir as VAs em contínuas e discretas.
- Se $F_X(x)$ é contínua para todo x e sua derivada existe em todos os pontos exceto em um número enumerável de pontos X é dita VA contínua.
- Uma VA discreta tem FDP na forma de escada



VAs discretas: FMP

- Para VAs discretas, além de $F_X(x)$ costuma-se definir também a função massa de probabilidades (FMP) como

$$\boxed{P_X(x) \triangleq P[X \leq x] - P[X < x]}$$

VAs discretas: FMP

- Para VAs discretas, além de $F_X(x)$ costuma-se definir também a função massa de probabilidades (FMP) como

$$\boxed{P_X(x) \triangleq P[X \leq x] - P[X < x]}$$

Notação:

$$P[\cdot] \rightarrow \text{ Probabilidade}$$

$$P_X(\cdot) \rightarrow \text{FMP da VA } X$$

Propriedades da FMP

$$\boxed{P_X(x) = P[X \leq x] - P[X < x] = F_X(x) - F_X(x_-)}$$

1) $P_X(x)$ é nula para todo x em que $F_X(x)$ é contínua, assumindo valores não nulos nas descontinuidades ou pulos da FDP

Propriedades da FMP

$$\boxed{P_X(x) = P[X \leq x] - P[X < x] = F_X(x) - F_X\left(x_-\right)}$$

1) $P_X(x)$ é nula para todo x em que $F_X(x)$ é contínua, assumindo valores não nulos nas descontinuidades ou pulos da FDP
2) Se x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ são os pontos em que $P_X(x)$ é não nula

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{\text{todo } x_i \leq x} P_x\left(x_i\right)$$

Propriedades da FMP

$$\boxed{P_X(x) = P[X \leq x] - P[X < x] = F_X(x) - F_X\left(x_-\right)}$$

1) $P_X(x)$ é nula para todo x em que $F_X(x)$ é contínua, assumindo valores não nulos nas descontinuidades ou pulos da FDP
2) Se x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ são os pontos em que $P_X(x)$ é não nula

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{\text{todo } x_i \leq x} P_x\left(x_i\right)$$

3) $F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_x\left(x_i\right) u\left(x - x_i\right)$

Propriedades da FMP

$$\boxed{P_X(x) = P[X \leq x] - P[X < x] = F_X(x) - F_X\left(x_-\right)}$$

1) $P_X(x)$ é nula para todo x em que $F_X(x)$ é contínua, assumindo valores não nulos nas descontinuidades ou pulos da FDP
2) Se x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ são os pontos em que $P_X(x)$ é não nula

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{\text{todo } x_i \leq x} P_x\left(x_i\right)$$

3) $F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_x\left(x_i\right) u\left(x - x_i\right)$
4) $f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_x\left(x_i\right) \delta\left(x - x_i\right)$

A VA de Bernoulli

Exemplo: VA de Bernoulli

Uma VA de Bernoulli X é definida pela FMP

$$\begin{cases} P_X(0) = p \\ P_X(1) = q \\ P_X(x) = 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $p + q = 1$. Determine $F_X(x)$, $f_X(x)$ e faça gráficos.

Aula de hoje

VA gaussiana - Definição

Uma VA é dita *gaussiana* se sua fdp tem a forma

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$$

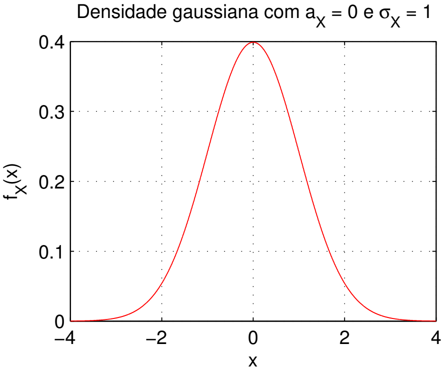
em que $\sigma > 0$ e m são constantes reais.

VA gaussiana - Definição

Uma VA é dita *gaussiana* se sua fdp tem a forma

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$$

em que $\sigma > 0$ e m são constantes reais.



VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central
  - Bom modelo para diversos fenômenos físicos

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central
  - Bom modelo para diversos fenômenos físicos
  - Simplicidade

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central
  - Bom modelo para diversos fenômenos físicos
  - Simplicidade
  - Também conhecida como normal. Gauss *himself apparently coined the term with reference to the "normal equations" involved in its applications, with normal having its technical meaning of orthogonal rather than "usual".*

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central
  - Bom modelo para diversos fenômenos físicos
  - Simplicidade
  - Também conhecida como normal. Gauss *himself apparently coined the term with reference to the "normal equations" involved in its applications, with normal having its technical meaning of orthogonal rather than "usual".*

VA gaussiana - Definição

- VA mais utilizada nas Ciências.
- Motivos:
  - Teorema do Limite Central
  - Bom modelo para diversos fenômenos físicos
  - Simplicidade
  - Também conhecida como normal. Gauss *himself apparently coined the term with reference to the "normal equations" involved in its applications, with normal having its technical meaning of orthogonal rather than "usual".*
- Notação: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

Calculando probabilidades

- Lembre-se que para calcular probabilidades, é necessário integrar a fdp

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Calculando probabilidades

- Lembre-se que para calcular probabilidades, é necessário integrar a fdp

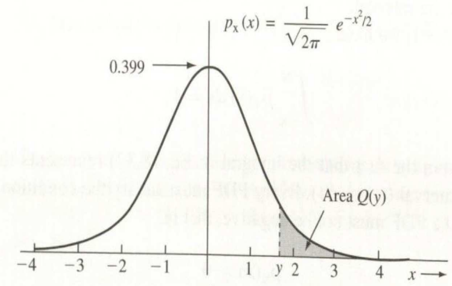
$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

- Problema: $F_X(x)$ não pode ser escrita de forma fechada.

A função $Q(\cdot)$

Função $Q(.)$

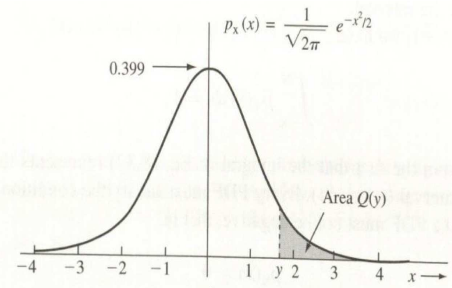
$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty e^{-x^2/2} dx$$



A função $Q(\cdot)$

Função $Q(.)$

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

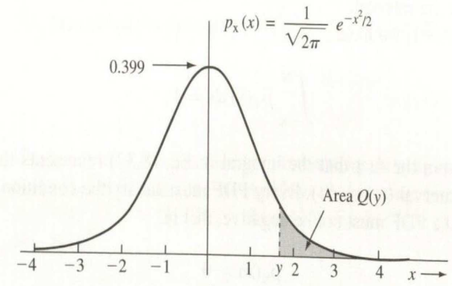


Obs: 1) No Matlab, pode-se usar as funções `qfunc` ou `erfc`:
$Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

A função $Q(\cdot)$

Função $Q(.)$

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

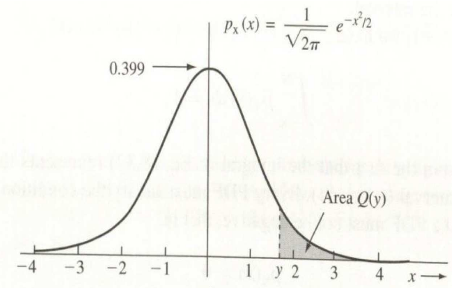


Obs: 1) No Matlab, pode-se usar as funções `qfunc` ou `erfc`: $Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 2) $Q(-\infty) = 1$.

A função $Q(\cdot)$

Função $Q(.)$

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$



Obs: 1) No Matlab, pode-se usar as funções `qfunc` ou `erfc`: $Q(x) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 2) $Q(-\infty) = 1$. 3) $Q(-y) = 1 - Q(y)$.

$Q(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0000	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
.1000	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
.2000	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
.3000	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
.4000	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
.5000	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
.6000	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
.7000	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
.8000	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
.9000	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.000	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.100	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.200	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.9853E-01
1.300	.9680E-01	.9510E-01	.9342E-01	.9176E-01	.9012E-01	.8851E-01	.8691E-01	.8534E-01	.8379E-01	.8226E-01
1.400	.8076E-01	.7927E-01	.7780E-01	.7636E-01	.7493E-01	.7353E-01	.7215E-01	.7078E-01	.6944E-01	.6811E-01
1.500	.6681E-01	.6552E-01	.6426E-01	.6301E-01	.6178E-01	.6057E-01	.5938E-01	.5821E-01	.5705E-01	.5592E-01
1.600	.5480E-01	.5370E-01	.5262E-01	.5155E-01	.5050E-01	.4947E-01	.4846E-01	.4746E-01	.4648E-01	.4551E-01
1.700	.4457E-01	.4363E-01	.4272E-01	.4182E-01	.4093E-01	.4006E-01	.3920E-01	.3836E-01	.3754E-01	.3673E-01
1.800	.3593E-01	.3515E-01	.3438E-01	.3362E-01	.3288E-01	.3216E-01	.3144E-01	.3074E-01	.3005E-01	.2938E-01
1.900	.2872E-01	.2807E-01	.2743E-01	.2680E-01	.2619E-01	.2559E-01	.2500E-01	.2442E-01	.2385E-01	.2330E-01
2.000	.2275E-01	.2222E-01	.2169E-01	.2118E-01	.2068E-01	.2018E-01	.1970E-01	.1923E-01	.1876E-01	.1831E-01
2.100	.1786E-01	.1743E-01	.1700E-01	.1659E-01	.1618E-01	.1578E-01	.1539E-01	.1500E-01	.1463E-01	.1426E-01
2.200	.1390E-01	.1355E-01	.1321E-01	.1287E-01	.1255E-01	.1222E-01	.1191E-01	.1160E-01	.1130E-01	.1101E-01
2.300	.1072E-01	.1044E-01	.1017E-01	.9903E-02	.9642E-02	.9387E-02	.9137E-02	.8894E-02	.8656E-02	.8424E-02
2.400	.8198E-02	.7976E-02	.7760E-02	.7549E-02	.7344E-02	.7143E-02	.6947E-02	.6756E-02	.6569E-02	.6387E-02
2.500	.6210E-02	.6037E-02	.5868E-02	.5703E-02	.5543E-02	.5386E-02	.5234E-02	.5085E-02	.4940E-02	.4799E-02
2.600	.4661E-02	.4527E-02	.4396E-02	.4269E-02	.4145E-02	.4025E-02	.3907E-02	.3793E-02	.3681E-02	.3573E-02
2.700	.3467E-02	.3364E-02	.3264E-02	.3167E-02	.3072E-02	.2980E-02	.2890E-02	.2803E-02	.2718E-02	.2635E-02
2.800	.2555E-02	.2477E-02	.2401E-02	.2327E-02	.2256E-02	.2186E-02	.2118E-02	.2052E-02	.1988E-02	.1926E-02
2.900	.1866E-02	.1807E-02	.1750E-02	.1695E-02	.1641E-02	.1589E-02	.1538E-02	.1489E-02	.1441E-02	.1395E-02
3.000	.1350E-02	.1306E-02	.1264E-02	.1223E-02	.1183E-02	.1144E-02	.1107E-02	.1070E-02	.1035E-02	.1001E-02
3.100	.9676E-03	.9354E-03	.9043E-03	.8740E-03	.8447E-03	.8164E-03	.7888E-03	.7622E-03	.7364E-03	.7114E-03
3.200	.6871E-03	.6637E-03	.6410E-03	.6190E-03	.5976E-03	.5770E-03	.5571E-03	.5377E-03	.5190E-03	.5009E-03
3.300	.4834E-03	.4665E-03	.4501E-03	.4342E-03	.4189E-03	.4041E-03	.3897E-03	.3758E-03	.3624E-03	.3495E-03
3.400	.3369E-03	.3248E-03	.3131E-03	.3018E-03	.2909E-03	.2802E-03	.2701E-03	.2602E-03	.2507E-03	.2415E-03
3.500	.2326E-03	.2241E-03	.2158E-03	.2078E-03	.2001E-03	.1926E-03	.1854E-03	.1785E-03	.1718E-03	.1653E-03
3.600	.1591E-03	.1531E-03	.1473E-03	.1417E-03	.1363E-03	.1311E-03	.1261E-03	.1213E-03	.1166E-03	.1121E-03
3.700	.1078E-03	.1036E-03	.9961E-04	.9574E-04	.9201E-04	.8842E-04	.8496E-04	.8162E-04	.7841E-04	.7532E-04
3.800	.7235E-04	.6948E-04	.6673E-04	.6407E-04	.6152E-04	.5906E-04	.5669E-04	.5442E-04	.5223E-04	.5012E-04
3.900	.4810E-04	.4615E-04	.4427E-04	.4247E-04	.4074E-04	.3908E-04	.3747E-04	.3594E-04	.3446E-04	.3304E-04
4.000	.3167E-04	.3036E-04	.2910E-04	.2789E-04	.2673E-04	.2561E-04	.2454E-04	.2351E-04	.2252E-04	.2157E-04
4.100	.2066E-04	.1978E-04	.1894E-04	.1814E-04	.1737E-04	.1662E-04	.1591E-04	.1523E-04	.1458E-04	.1395E-04
4.200	.1335E-04	.1277E-04	.1222E-04	.1168E-04	.1118E-04	.1069E-04	.1022E-04	.9774E-05	.9345E-05	.8934E-05
4.300	.8540E-05	.8163E-05	.7801E-05	.7455E-05	.7124E-05	.8807E-05	.6503E-05	.6212E-05	.5934E-05	.5668E-05
4.400	.5413E-05	.5169E-05	.4935E-05	.4712E-05	.4498E-05	.4294E-05	.4098E-05	.3911E-05	.3732E-05	.3561E-05
4.500	.3398E-05	.3241E-05	.3092E-05	.2949E-05	.2813E-05	.2682E-05	.2558E-05	.2439E-05	.2325E-05	.2216E-05
4.600	.2112E-05	.2013E-05	.1919E-05	.1828E-05	.1742E-05	.1660E-05	.1581E-05	.1506E-05	.1434E-05	.1366E-05
4.700	.1301E-05	.1239E-05	.1179E-05	.1123E-05	.1069E-05	.1017E-05	.9680E-06	.9211E-06	.8765E-06	.8339E-06
4.800	.7933E-06	.7547E-06	.7178E-06	.6827E-06	.6492E-06	.6173E-06	.5869E-06	.5580E-06	.5304E-06	.5042E-06
4.900	.4792E-06	.4554E-06	.4327E-06	.4111E-06	.3906E-06	.3711E-06	.3525E-06	.3448E-06	.3179E-06	.3019E-06
5.000	.2867E-06	.2722E-06	.2584E-06	.2452E-06	.2328E-06	.2209E-06	.2096E-06	.1989E-06	.1887E-06	.1790E-06
5.100	.1698E-06	.1611E-06	.1528E-06	.1449E-06	.1374E-06	.1302E-06	.1235E-06	.1170E-06	.1109E-06	.1051E-06

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

Exercício 2.11 da Apostila

A relação sinal-ruído no canal de um certo sistema de comunicações dada em dB pode ser aproximada por uma variável aleatória gaussiana X sendo $\mu = 3$ e $\sigma = 2$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 5{,}5\}$.

Exercício

[Devore, 2014, Exemplo 4.16]

O tempo que um motorista leva para reagir às luzes de freio de um veículo em desaceleração é crucial para evitar colisões traseiras. Sivak and Flannagan [1993] sugerem que o tempo de reação de uma resposta no trânsito a um sinal de frenagem com luzes de freio convencionais pode ser modelado como uma distribuição normal de média 1,25 segundos e desvio padrão 0,46 segundo.

Qual é a probabilidade de que o tempo de reação esteja entre 1,00 e 1,75 segundo?

Referências

Devore, J. L. (2014). *Probabilidade e Estatística Para Engenharia e Ciências (Em Portuguese do Brasil)*. Cengage CTP, 8th edition.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Sivak, M. and Flannagan, M. (1993). Fast-Rise Brake Lamp as a Collision-Prevention Device. *Ergonomics*, 36(4):391–395.