Variáveis Aleatórias - Funções Distribuição e Densidade de Probabilidades

Prof. Marcio Eisencraft

[Peebles, 2000, Seções 2.0 a 2.3]; Apostila Seções 2.1 a 2.3

27 de fevereiro de 2019

Aula de hoje

1. Definição de Variável Aleatória (VA)
2. Função distribuição de probabilidade (FDP)
3. Função densidade de probabilidade (fdp)

VA: Motivação

- Quase sempre resultados numéricos são desejáveis, mesmo que experimento $\mathcal{H}$ gere resultados não numéricos.

VA: Motivação

- Quase sempre resultados numéricos são desejáveis, mesmo que experimento $\mathcal{H}$ gere resultados não numéricos.
- Necessário mapeamento entre Ω original e $\mathbb{R}$. Esse mapa é uma variável aleatória (VA), como veremos hoje.

VA: Motivação

- Quase sempre resultados numéricos são desejáveis, mesmo que experimento $\mathcal{H}$ gere resultados não numéricos.
- Necessário mapeamento entre Ω original e $\mathbb{R}$. Esse mapa é uma variável aleatória (VA), como veremos hoje.
- Principal vantagem: podem-se definir funções de probabilidade que tornam conveniente e fácil computar probabilidades.

VA: Definição ingênua

- Seja um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associado a um experimento $\mathcal{H}$. Denotamos por ζ os elementos de Ω, possíveis resultados de $\mathcal{H}$.

VA: Definição ingênua

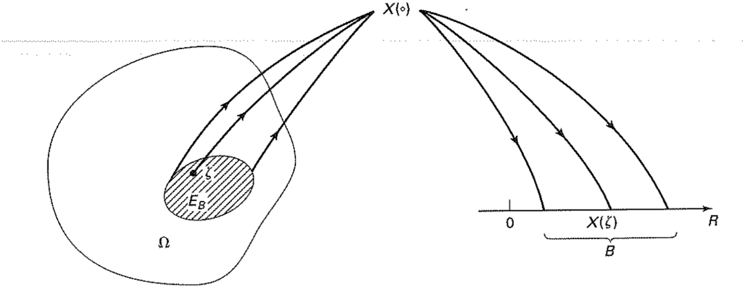
- Seja um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associado a um experimento $\mathcal{H}$. Denotamos por ζ os elementos de Ω, possíveis resultados de $\mathcal{H}$.
- A cada ζ atribui-se um número real $X(\zeta)$ criando uma regra de correspondência entre Ω e $\mathbb{R}$.

VA: Definição ingênua

- Seja um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associado a um experimento $\mathcal{H}$. Denotamos por ζ os elementos de Ω, possíveis resultados de $\mathcal{H}$.
- A cada ζ atribui-se um número real $X(\zeta)$ criando uma regra de correspondência entre Ω e $\mathbb{R}$.
- Essa regra, sujeita a algumas restrições, é chamada de variável aleatória (VA).

VA: Definição ingênua

- Seja um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ associado a um experimento $\mathcal{H}$. Denotamos por ζ os elementos de Ω, possíveis resultados de $\mathcal{H}$.
- A cada ζ atribui-se um número real $X(\zeta)$ criando uma regra de correspondência entre Ω e $\mathbb{R}$.
- Essa regra, sujeita a algumas restrições, é chamada de variável aleatória (VA).



VA: Definição formal

- Conjunto de Borel nos reais B - formado pela união enumerável, intersecção enumerável ou diferença entre intervalos reais abertos.

VA: Definição formal

- Conjunto de Borel nos reais B - formado pela união enumerável, intersecção enumerável ou diferença entre intervalos reais abertos.
- Gostaríamos que o conjunto $\{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$, abreviado por $\{X \leq x\}$ fosse sempre um evento, ou seja, que pudéssemos atribuir probabilidade a ele.

VA: Definição formal

- Conjunto de Borel nos reais B - formado pela união enumerável, intersecção enumerável ou diferença entre intervalos reais abertos.
- Gostaríamos que o conjunto $\{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$, abreviado por $\{X \leq x\}$ fosse sempre um evento, ou seja, que pudéssemos atribuir probabilidade a ele.
- Para que isso seja verdade pode-se demonstrar que é necessária a seguinte definição formal de VA.

VA: Definição formal

- Conjunto de Borel nos reais B - formado pela união enumerável, intersecção enumerável ou diferença entre intervalos reais abertos.
- Gostaríamos que o conjunto $\{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$, abreviado por $\{X \leq x\}$ fosse sempre um evento, ou seja, que pudéssemos atribuir probabilidade a ele.
- Para que isso seja verdade pode-se demonstrar que é necessária a seguinte definição formal de VA.

Variável aleatória

Seja $\mathcal{H}$ um experimento com espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Então a variável aleatória X é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

(i) Para qualquer conjunto de Borel B, o conjunto $E_B \triangleq \{\zeta \in \Omega : X(\zeta) \in B\}$ é um evento

(ii) $P[X = -\infty] = P[X = \infty] = 0$

Observações

A função X gera um novo espaço de probabilidades $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ com

- $\mathbb{R}$ - números reais

Observações

A função X gera um novo espaço de probabilidades $(\mathbb{R},\mathcal{B},P_x)$ com

- $\mathbb{R}$ - números reais
- $\mathcal{B}$ - σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ gerados por uniões e intersecções enumeráveis de conjuntos da forma $(-\infty,x]$

Observações

A função X gera um novo espaço de probabilidades $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ com

- $\mathbb{R}$ - números reais
- $\mathcal{B}$ - σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ gerados por uniões e intersecções enumeráveis de conjuntos da forma $(-\infty, x]$
- P_x - função de conjunto que atribui um número $P_X[A]$ a cada $A \in \mathcal{B}$, obedecendo os axiomas vistos

Observações

A função X gera um novo espaço de probabilidades $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_x)$ com

- $\mathbb{R}$ - números reais
- $\mathcal{B}$ - σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ gerados por uniões e intersecções enumeráveis de conjuntos da forma $(-\infty, x]$
- P_x - função de conjunto que atribui um número $P_X[A]$ a cada $A \in \mathcal{B}$, obedecendo os axiomas vistos

Notação

- VAs - letras maiúsculas: X, Y, Z
- Valores particulares assumidos - letras mínusculas: x, y, z

Exemplos

Exemplo simples: jogar uma moeda

Considere o experimento de jogar uma moeda. Então $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Seja uma VA X com $X(\text{cara}) = 1$ e $X(\text{coroa}) = 0$.
Então podemos escrever

$$P[X = 1] =$$

$$P[X = 0] =$$

$$P[X = 2] =$$

Exemplos

Exemplo simples: jogar uma moeda

Considere o experimento de jogar uma moeda. Então $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Seja uma VA X com $X(\text{cara}) = 1$ e $X(\text{coroa}) = 0$.
Então podemos escrever

$$P[X = 1] = 0{,}5$$

$$P[X = 0] =$$

$$P[X = 2] =$$

Exemplos

Exemplo simples: jogar uma moeda

Considere o experimento de jogar uma moeda. Então $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Seja uma VA X com $X(\text{cara}) = 1$ e $X(\text{coroa}) = 0$.
Então podemos escrever

$$P[X = 1] = 0{,}5$$

$$P[X = 0] = 0{,}5$$

$$P[X = 2] =$$

Exemplos

Exemplo simples: jogar uma moeda

Considere o experimento de jogar uma moeda. Então $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Seja uma VA X com $X(\text{cara}) = 1$ e $X(\text{coroa}) = 0$.
Então podemos escrever

$$P[X = 1] = 0{,}5$$

$$P[X = 0] = 0{,}5$$

$$P[X = 2] = 0$$

Exercícios

Exemplo

[Devore, 2014, Exemplo 3.3, p. 84] Em um experimento, determina-se o número de bombas em uso em dois postos de gasolina. Defina as VAs

- $X-$ número total de bombas em uso nos dois postos
- $Y-$ diferença entre número de bombas em uso no posto 1 e número em uso no posto 2
- $Z-$ máximo entre o número de bombas em uso nos dois postos
  Se o experimento for realizado e o resultado for $\zeta = (2{,}3)$, determine $X(s)$, $Y(s)$ e $Z(s)$.

Exercícios

Exemplo [Devore, 2014, Exemplo 3.4, p. 84]

Considere o experimento em que diversas baterias são examinadas até a obtenção de uma em bom estado (S). O espaço amostral é $\Omega = \{S, FS, FFS, \ldots\}$ em que F significa que a bateria falhou[a]. Sabe-se que a probabilidade de uma bateria estar em bom estado é 0,9. Defina uma VA X como $X =$ número de baterias examinadas antes do fim do experimento. Determine:

a) $X[S]$

b) $X[FS]$

c) $X[FFS]$

d) $X[FFFFFS]$

e) $P[X = 3]$

[a] Note que há um número infinito mas enumerável de elementos em $\mathcal{S}$

Aula de hoje

1. Definição de Variável Aleatória (VA)
2. Função distribuição de probabilidade (FDP)
3. Função densidade de probabilidade (fdp)

Função distribuição de probabilidade (FDP)

Função de x que contém toda informação necessária para calcular $P[E]$ para qualquer $E \in \mathcal{B}$.

Função distribuição de probabilidade (FDP)

$$F_X(x) = P\left[\zeta : X(\zeta) \leq x\right] = P[X \leq x]$$

Função distribuição de probabilidade (FDP)

Função de x que contém toda informação necessária para calcular $P[E]$ para qualquer $E \in \mathcal{B}$.

Função distribuição de probabilidade (FDP)

$$F_X(x) = P\left[\zeta : X(\zeta) \leq x\right] = P[X \leq x]$$

Exercício 2.4 da Apostila

[Peebles, 2000] Considere que X assuma valores discretos no conjunto
$\{-1;\ -0{,}5;\ 0{,}7;\ 1{,}5;\ 3\}$. As probabilidades correspondentes são $\{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}2\}$. Faça um gráfico e escreva uma expressão para $F_X(x)$.

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4) $F_X(x)$ é não decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4) $F_X(x)$ é não decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
5) $P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
3) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
4) $F_X(x)$ é não decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
5) $P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
6) $P[X > a] = 1 - F(a)$

Propriedades de $F_X(x)$

$$\boxed{F_X(x) = P[X \leq x]}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4) $F_X(x)$ é não decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
5) $P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
6) $P[X > a] = 1 - F(a)$
7) Se $F_X(x)$ é descontínua em um ponto x então

$$F_X(x) - F_X(x_-) = P[x_- < X \leq X] = \lim_{\epsilon \to 0} P[X - \epsilon < X \leq x] \triangleq P[X = x]$$

Assim, $F_X(x)$ é descontínua nos pontos em que $P[X = x] \neq 0$.

Aula de hoje

1. Definição de Variável Aleatória (VA)

2. Função distribuição de probabilidade (FDP)

3. Função densidade de probabilidade (fdp)

Função densidade de probabilidade (fdp)

Função densidade de probabilidade (fdp)

Se $F_X(x)$ é contínua e diferenciável, a fdp é definida por

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Nota: Mesmo quando $F_X(x)$ é descontínua, pode-se ainda obter $f_X(x)$ usando-se o impulso de Dirac $\delta(x)$ (Veja mais detalhes na Seção 2.3.1 da Apostila).

Exemplo

Obtenha a fdp da VA X do Exercício 2.4 da apostila (Veja Slide 11)

Propriedades de $f_X(x)$

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x

Propriedades de $f_X(x)$

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\varepsilon) d\varepsilon$

Propriedades de $f_X(x)$

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\varepsilon)d\varepsilon$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$

Propriedades de $f_X(x)$

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

Propriedades (Demonstrar!)

1) $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\varepsilon)d\varepsilon$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$
4) $P\left[x_1 < X \leq x_2\right] = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\varepsilon)d\varepsilon$

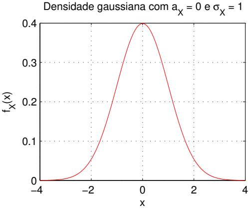
Exemplos de fdps

VA uniforme no intervalo $[a,b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

VA gaussiana com parâmetros μ e $\sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Exercício 2.7 da Apostila

A atenuação que certo canal apresenta é uma variável aleatória X cuja função densidade $g_X(x)$ é dada na Figura 1. Pede-se:

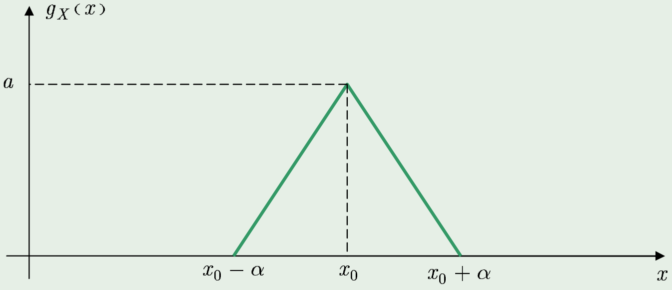


Figura: Função densidade triangular.

a) Determine a para que $g(x)$ seja uma função densidade

b) Para o valor de a do item anterior, determine e esboce $G_X(x)$

Exemplos

Exercício 2.8 da Apostila

Suponha que uma atenuação aleatória X tenha a densidade de probabilidade triangular do Exercício 2.7 com $x_0 = 8$, $\alpha = 5$ e $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{5}$. Determine a probabilidade $P[4{,}5 < X \leq 6{,}7]$.

Exemplos

Exercício 2.9 da Apostila

A quantidade acessos normalizada a um servidor durante um dia é descrita por uma variável aleatória X que tem distribuição

$$F_X(x) = u(x)\left[1 - e^{-\frac{x^2}{b}}\right]. \tag{1}$$

Determine a função densidade $f_X(x)$.

Exemplos

Exercício 2.10 da Apostila

[Peebles, 2000] A central de um sistema de intercomunicação provê música para seis quartos de um hospital. A probabilidade de que cada quarto seja ativado e consuma potência a qualquer instante é $0{,}4$. Quando ativado, o quarto consome $0{,}5$ W. Pede-se:

a) Encontre e faça um gráfico das funções distribuição e densidade para a variável aleatória "potência fornecida pela central".

b) Se o amplificador da estação principal fica sobrecarregado quando mais do que 2 W é necessário, qual a probabilidade de sobrecarga?

Referências

Devore, J. L. (2014). *Probabilidade e Estatística Para Engenharia e Ciências (Em Portuguese do Brasil)*. Cengage CTP, 8th edition.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.