Independência e Teorema de Bayes

Prof. Marcio Eisencraft

[Peebles, 2000, Seções 1.4 e 1.5]; Apostila Seções 1.4 e 1.5

21 de fevereiro de 2019

Aula de hoje

1. Teorema de Bayes

2. Independência

Teorema de Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) Matemático e teólogo inglês

Teorema de Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) Matemático e teólogo inglês

- Forma atual devida a Laplace (1812). Aplicou em mecânica celeste, estatística médica e jurisprudência
  Sivia and Skilling [2006].

Teorema de Bayes


Thomas Bayes (1702-1761) Matemático e teólogo inglês

- Forma atual devida a Laplace (1812). Aplicou em mecânica celeste, estatística médica e jurisprudência
  Sivia and Skilling [2006].
- Rejeitado pelos matemáticos da época.

Teorema de Bayes


Thomas Bayes (1702-1761) Matemático e teólogo inglês

- Forma atual devida a Laplace (1812). Aplicou em mecânica celeste, estatística médica e jurisprudência Sivia and Skilling [2006].
- Rejeitado pelos matemáticos da época.

Teorema de Bayes

Seja A em evento num espaço de probabilidades $\mathcal{P}$. Se B é qualquer evento definido em $\mathcal{P}$ com $P[B] > 0$ então

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

Probabilidades *a priori* e *a posteriori*

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

- $P[A|B]$ - Probabilidade *a posteriori* de A dado B

Probabilidades *a priori* e *a posteriori*

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

- $P[A|B]$ - Probabilidade *a posteriori* de A dado B
- $P[B|A]$ - Probabilidade *a priori* de B dado A

Probabilidades *a priori* e *a posteriori*

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

- $P[A|B]$ - Probabilidade *a posteriori* de A dado B
- $P[B|A]$ - Probabilidade *a priori* de B dado A
- $P[A]$ - Probabilidade causal ou *a priori* de A

Probabilidades *a priori* e *a posteriori*

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

- $P[A|B]$ - Probabilidade *a posteriori* de A dado B
- $P[B|A]$ - Probabilidade *a priori* de B dado A
- $P[A]$ - Probabilidade causal ou *a priori* de A
- Probabilidades *a priori* são estimadas a partir de medidas ou pressupostas por experiência

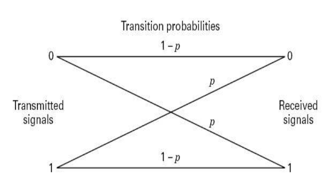
Probabilidades *a priori* e *a posteriori*

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]}}$$

- $P[A|B]$ - Probabilidade *a posteriori* de A dado B
- $P[B|A]$ - Probabilidade *a priori* de B dado A
- $P[A]$ - Probabilidade causal ou *a priori* de A
- Probabilidades *a priori* são estimadas a partir de medidas ou pressupostas por experiência
- Probabilidades *a posteriori* são calculadas.

Exemplo

Canal binário simétrico - continuação



Assim, a probabilidade de um "0" ser recebido como "1" ou vice-versa é igual a p. Suponha que as probabilidades de se transmitir um $X = 0$ ou um $X = 1$ sejam, respectivamente, Q e $1 - Q$.

a) Qual a probabilidade de se ter transmitido um "0" quando se recebe "1"?

b) Qual a probabilidade de se ter transmitido um "1" quando se recebe "0"?

Aula de hoje

Independência

Independência - Definição

Dois eventos $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ com $P[A] > 0$ e $P[B] > 0$ são independentes se e somente se

$$\boxed{P[AB] = P[A]P[B]}$$

Note que se A e B são independentes $P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]} = P[A]$.
Bate com a noção intuitiva: conhecimento de B não muda a probabilidade de A acontecer.

Independência e eventos disjuntos

Cuidado: Eventos Independentes $\neq$ Eventos Disjuntos

$$\boxed{\text{A e B independentes} \Leftrightarrow P[AB] = \qquad\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\text{A e B mutuamente exclusivos} \Leftrightarrow P[AB] = \quad}$$

Independência e eventos disjuntos

Cuidado: Eventos Independentes $\neq$ Eventos Disjuntos

$$\boxed{\text{A e B independentes} \Leftrightarrow P[AB] = P[A]P[B]}$$

$$\boxed{\text{A e B mutuamente exclusivos} \Leftrightarrow P[AB] = }$$

Independência e eventos disjuntos

Cuidado: Eventos Independentes $\neq$ Eventos Disjuntos

$$\boxed{\text{A e B independentes} \Leftrightarrow P[AB] = P[A]P[B]}$$

$$\boxed{\text{A e B mutuamente exclusivos} \Leftrightarrow P[AB] = 0}$$

Exercícios

Exercício

Apenas 1 em 1 000 adultos é acometido por uma doença para a qual foi desenvolvido um teste de diagnóstico. Se o indivíduo tem a doença, o resultado do teste é positivo em 99% das vezes. Se não tiver, é positivo em 2% das vezes (falso positivo).

a) Se um indivíduo fez o teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade dele ter a doença?

Exercícios

Exercício

Apenas 1 em 1 000 adultos é acometido por uma doença para a qual foi desenvolvido um teste de diagnóstico. Se o indivíduo tem a doença, o resultado do teste é positivo em 99% das vezes. Se não tiver, é positivo em 2% das vezes (falso positivo).

a) Se um indivíduo fez o teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade dele ter a doença?

b) E se ele repetir o exame pela 2a vez e novamente o resultado for positivo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

Exercícios

Exercício

Apenas 1 em 1 000 adultos é acometido por uma doença para a qual foi desenvolvido um teste de diagnóstico. Se o indivíduo tem a doença, o resultado do teste é positivo em 99% das vezes. Se não tiver, é positivo em 2% das vezes (falso positivo).

a) Se um indivíduo fez o teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade dele ter a doença?

b) E se ele repetir o exame pela 2a vez e novamente o resultado for positivo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

c) Obtenha uma fórmula fechada para a probabilidade do indivíduo ter a doença dado que ele fez n testes independentes e todos resultaram positivos. Faça um gráfico do seu resultado e indique o valor de n necessário para que a probabilidade de ele ter a doença seja maior do que 90%.

Exercício [Devore, 2014, p. 74, exemplo 2.32]

Considere um posto de gasolina com seis bombas numeradas 1,2,..., 6, sendo E_i o evento simples em que um cliente selecionado aleatoriamente usa a bomba i $(i = 1, \ldots, 6)$. Suponha que

$$P[E_1] = P[E_6] = 0.10, P[E_2] = P[E_5] = 0.15, P[E_3] = P[E_4] = 0.25$$

Defina os eventos A, B e C por

$$A = \{E_2, E_4, E_6\}, B = \{E_1, E_2, E_3\}, C = \{E_2, E_3, E_4, E_5\}.$$

Determine

a) $P(A)$

b) $P(A|B)$

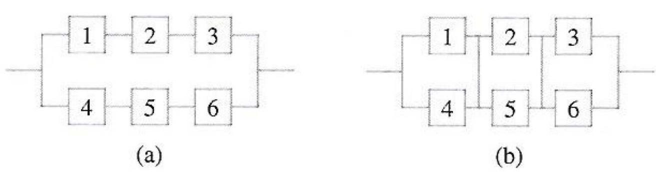
c) $P(A|C)$

d) A e B são independentes? E A e C?

Exercícios

Exercício [Devore, 2014, p. 76, exemplo 2.36]

Considere as configurações de matrizes fotovoltaicas a seguir formadas por células solares de silício cristalino[a]. Para que o sistema funcione, pelo menos um dos subsistemas em paralelo deve funcionar. Seja A_i o evento no qual a vida útil da célula i excede t_0 e considere que todos eles sejam independentes. Determine a probabilidade de cada um dos sistemas ter vida útil superior a t_0 se $P\left(A_i\right) = 0.9$. Qual estrutura é mais "confiável"?



[a] [Gautam and Kaushika, 2002]

Exercícios

Exercício [Devore, 2014, p. 77, exercício 73]

Etiquetas idênticas são colocadas na orelha direita e esquerda de uma raposa. A raposa é libertada por um período de tempo. Sejam os eventos:

- $C_1 = \{\text{etiqueta da orelha esquerda é perdida}\}$
- $C_2 = \{\text{etiqueta da orelha direita é perdida}\}$.

Seja $P\left(C_1\right) = P\left(C_2\right) = p$ e considere que esses eventos são independentes. Calcule a probabilidade de exatamente uma etiqueta ser perdida, dado que, no máximo, uma seja perdida.

Referências

Devore, J. L. (2014). *Probabilidade e Estatística Para Engenharia e Ciências (Em Portuguese do Brasil)*. Cengage CTP, 8th edition.

Gautam, N. K. and Kaushika, N. D. (2002). Reliability Evaluation of Solar Photovoltaic Arrays. *Solar Energy*, 72:129–141.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Sivia, D. and Skilling, J. (2006). *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford University Press.