Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Teste 3 de PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019
GABARITO

1) [Hsu, 1996] (4,0) A fdp conjunta de uma VA bivariada (X,Y) é dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre o valor de k.

(b) Encontre as fdps marginais de X e Y.

(c) X e Y são independentes?

(c) X e Y sao independentes?

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$

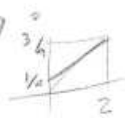
$\Leftrightarrow \int_0^2\int_0^2 k(x+y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^2 dy = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\int_0^2 (2y+2)\,dy = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\left[y^2 + 2y\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow$

$k(4+4) = 1 \Rightarrow$ Resposta: $\boxed{k = 1/8}$



b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy =$ $(0 < x < 2)$

$= \int_0^2 k(x+y)\,dy = k\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^2 =$

$= k(2x+2) \Rightarrow$ Resposta: $\boxed{f_X(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4},\ 0 \leq x \leq 2}$

Pela simetria de $f_{XY}(x,y)$,

Resposta: $\boxed{f_Y(y) = \frac{y}{4} + \frac{1}{4},\ 0 \leq y \leq 2}$

1

c) Resposta: $\boxed{\text{Não!}}$ $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$!

2) [Peebles, 2000] (4,0) Suponha que a queda de neve anual (quantidade de neve acumulada em metros) em dois hotéis de esqui alpinos vizinhos seja representada por variáveis aleatórias gaussianas conjuntas X e Y para as quais $\rho_{XY} = 0{,}82$, $\sigma_X = 1{,}5$ m, $\sigma_Y = 1{,}2$ m e $R_{XY} = 81{,}476$ m^2. Se a queda de neve média no primeiro hotel é 10 m, qual a taxa de queda média no outro hotel?

→ X e Y conjuntamente gaussiana

$\rho_{XY} = 0{,}82$

$\sigma_x = 1{,}5m$

$\sigma_y = 1{,}2m$

$R_{XY} = 81{,}476\ m^2$

$\overline{X} = 10m$

$\overline{Y} = ?$

$\rho_{XY} = \dfrac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} \Rightarrow C_{XY} = \sigma_x \sigma_y \rho_{XY}$

Mas $C_{XY} = R_{XY} - \overline{X}\,\overline{Y} \Rightarrow \overline{Y} = \dfrac{R_{XY} - \sigma_x \sigma_y \rho_{XY}}{\overline{X}}$

Assim,

$\overline{Y} = \dfrac{81{,}476 - 1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}82}{10} \Rightarrow$

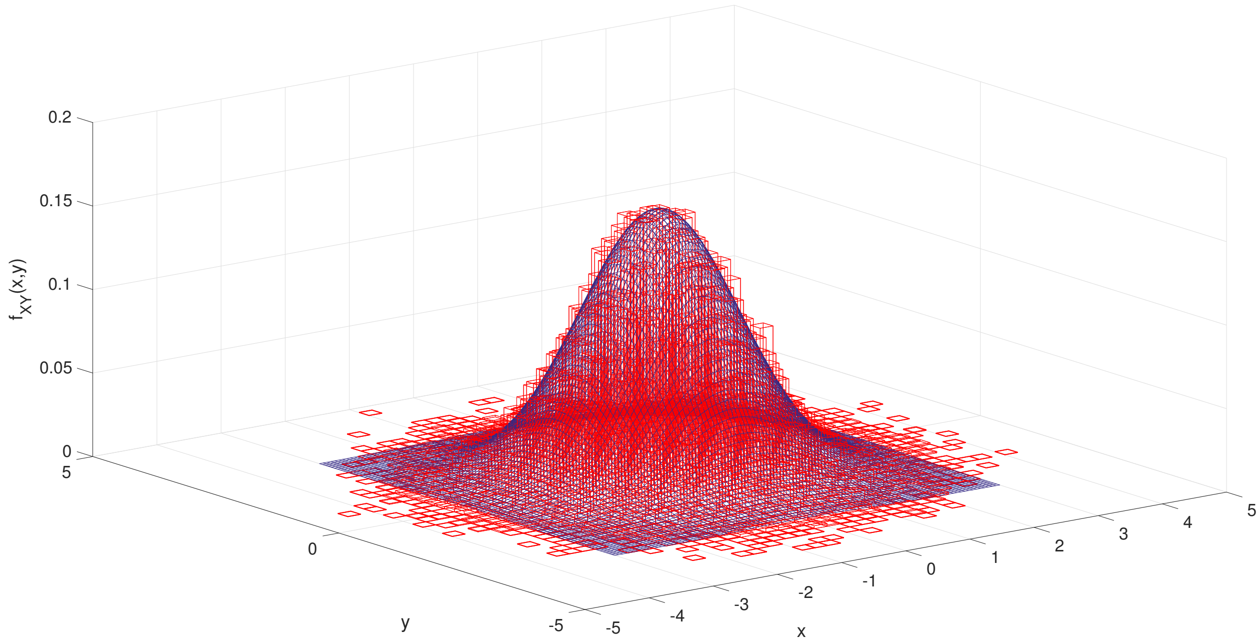
Resposta:

$\rightarrow \boxed{\overline{Y} = 8m}$

3) (2,0) Considere duas VAs gaussianas independentes X e Y de média 0 e variância 1. Deseja-se fazer um gráfico de $f_{XY}(x,y)$. Gere 10^5 realizações das VA X e Y e faça um histograma tridimensional normalizado do resultado. Na mesma figura, faça um gráfico teórico de $f_{XY}(x,y)$(veja (5.24) e a Figura 5.1 da apostila). Comente seus resultados. Um exemplo de como deve ficar o seu gráfico é mostrado a seguir.

Dica: no Matlab, podem ser úteis as funções `meshgrid`, `mesh`, `histogram2`, `randn`. No Python, as bibliotecas Numpy e Matplotlib têm funções equivalentes.

```
%Gráfico Teórico
x = linspace(-3,3,100);
y = linspace(-3,3,100);
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
sigmax = 1;sigmay = 1
f = 1/(2*pi*sigmax*sigmay)*exp(-1/2*(xx.^2+yy.^2));
C = del2(f);
mesh(xx,yy,f,C,'FaceColor','none');
hold on;
%Gráfico experimental
x = randn(1,100000);
y = randn(1,100000);
histogram2(x,y,'Normalization', 'pdf','Facecolor', 'none','EdgeColor','r');
```




```
hold off;
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('f_{XY}(x,y)');
```

Referências

Hsu, H. (1996). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*. Schaum's Outlines. McGraw-Hill.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.