Gabarito!!

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Teste 1 de PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019

Nome:________________________________ NUSP: __________

Assinatura: ______________________

1) Um meteorologista acerta 80% dos dias em que chove e 90% dos dias em que faz bom tempo. Chove em 10% dos dias. Tendo havido previsão de chuva, qual a probabilidade de chover?

M → Meteorologia prevê chuva
C → chove

$P(M|C)=0,8$ $P(C)=0,1$
$P(\bar{M}|\bar{C})=0,9$ $P(\bar{C})=0,9$

Então,
$$P(C|M)=\frac{P(M|C)\cdot P(C)}{P(M)}=\frac{P(M|C)\cdot P(C)}{P(M|C)\cdot P(C)+P(M|\bar{C})\cdot P(\bar{C})}=\frac{0,8\cdot \cancel{0,1}}{0,8\cdot\cancel{0,1}+\cancel{0,1}\cdot 0,9}=\frac{8}{17}=47,06\%$$

2) O tempo de vida X, em horas, de um chip de computador é uma VA com fdp dada por

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{k}{x^2}, & x>100\\ 0, & x\leq 100\end{cases}$$

a) Encontre k de forma que $f(x)$ seja uma fdp.

b) Qual a probabilidade de um chip durar mais do que t horas?

c) Qual a probabilidade de exatamente dois de cinco chips de um aparelho tenham que ser trocados nas primeiras 150 horas de operação? Suponha que os eventos em que o chip i tem que ser substituído dentro desse intervalo sejam mutuamente independentes.

(a) $\int_0^\infty f(x)dx=1 \Rightarrow k\int_{100}^\infty \frac{1}{x^2}dx=1$

$\Rightarrow k\left[-\frac{1}{x}\right]_{100}^{\infty}=1 \Rightarrow k\cdot\frac{1}{100}=1$

$\Rightarrow \boxed{k=100}$

(b) $P[X>t]=\int_t^\infty f_X(x)dx=$

$=\begin{cases}\int_t^\infty \frac{k}{x^2}, & t\geq 100\\ 1, & t<100\end{cases} \Rightarrow \boxed{P[X>t]=\begin{cases}\frac{100}{t}, & t\geq 100\\ 1, & t<100\end{cases}}$

(c) $P[\text{chip trocado}]=1-\frac{100}{150}=1/3$

$P=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}=32,9\%$

3) Apenas 1 em 1 000 adultos é acometido por uma doença para a qual foi desenvolvido um teste de diagnóstico. Se o indivíduo tem a doença, o resultado do teste é positivo em 99% das vezes. Se não tiver, é positivo em 2% das vezes (falso positivo).

a) Se um indivíduo fez o teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade dele ter a doença?

b) E se ele repetir o exame pela 2a vez e novamente o resultado for positivo, qual a probabilidade de ele ter a doença?

c) Obtenha uma fórmula fechada para a probabilidade do indivíduo ter a doença dado que ele fez n testes independentes e todos resultaram positivos.

d) (Computacional) Faça um gráfico do seu resultado e indique o valor de n necessário para que a probabilidade de ele ter a doença seja maior do que 90%.

a) D - doença

T - teste positivo

$P(D) = 1/1000 \qquad P(T/D) = \frac{99}{100}$

$P(T/\bar{D}) : 2/100$

$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)} =$

$= \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000}}{0{,}02097} = 4{,}72\%$

$P(T) = P(T|D) \cdot P(D) + P(T|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})$

$= \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{2}{100} \cdot \frac{999}{1000} = 0{,}02097$

b) $P(D|TT) = \frac{P(TT|D)P(D)}{P(TT)}$

$P(TT) = P(TT|D) \cdot P(D)$

$+ P(TT|\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) =$

$= \left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{2}{100}\right)^2 \cdot \frac{999}{1000}$

$= 1{,}3797 \cdot 10^{-3}$

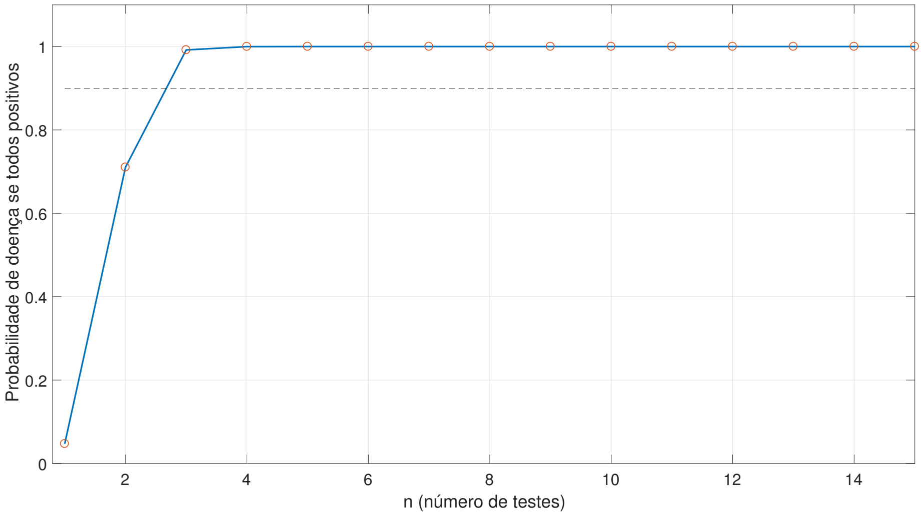
$P(D|TT) = 71{,}03\%$

c) Analogamente

$$\boxed{P(D|T^n) = \frac{99^n}{99^n + 999 \cdot 2^n}}$$

(d)

```
n = 1:100;
P = (99.^n)./((99.^n)+999*2.^n);
plot(n,P,n,P,'o',[1 100],[0.9 0.9],'k--'); grid;
xlabel('n (número de testes)');
ylabel('Probabilidade de doença se todos positivos');
```



Da figura, nota-se que 3 exames independentes são suficientes para que a probabilidade do individuo ter a doença seja maior do que 90%.