Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019

Lista de Exercícios Suplementares 2

1) [Hsu, 1996, p. 174] Considere um processo aleatório $X(t)$ definido por

$$X(t) = Y \cos \omega t$$

em que ω é uma constante e Y é uma VA uniforme no intervalo [0,1]. Esboce 3 funções amostras de $X(t)$. Coloque escalas nas abscissas e ordenadas.

2) [Peebles, 2000, p. 212] Um processo aleatório é definido por

$$Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

em que $X(t)$ é um processo aleatório ESA com média μ_X e função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ que modula em amplitude uma portadora de frequência angular constante ω_0 com fase aleatória Θ independente de $X(t)$ e uniformemente distribuída em $(-\pi,\pi)$.

(a) Encontre $E[Y(t)]$

(b) Encontre a função de autocorrelação de $Y(t)$

(c) $Y(t)$ é ESA? Justifique.

R: (a) 0; (b) $R_{XX}(\tau)\frac{cos\omega_0\tau}{2}$; (c) Sim.

3) [Lathi, 1998, p. 526] Dado um processo aleatório $X(t) = K$, em que K é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-1,1)$, pede-se:

(a) Esboce algumas funções-amostras deste processo.

(b) Determine $E[X(t)]$.

(c) Determine $R_{XX}(t_1,t_2)$

(d) Este processo é estacionário (em sentido amplo)? Justifique.

(e) Este processo é ergódico? Justifique.

(f) Se o processo é estacionário, qual a sua potência P_{XX}?

R: (b) 0; (c) $\frac{1}{3}$; (d) Sim; (e) Não; (f) $\frac{1}{3}$.

4) [Lathi and Ding, 2012, p. 463] Repita o Problema 3 para o processo aleatório

$$X(t) = A\cos(\omega_c t + \Theta)$$

em que ω_c é uma constante e A e Θ são VAs independentes uniformemente distribuídas nos intervalos $(-1,1)$ e $(0,2\pi)$, respectivamente.

R: (b) 0; (c) $\frac{1}{3}\cos\omega_c(t_1 - t_2)$; (d) Sim; (e) Não; (f) $\frac{1}{3}$.

5) [Lathi and Ding, 2012, p.463] Mostre que para um processo ESA $X(t)$,

(a) $R_{XX}(0) \geq |R_{XX}(\tau)|, \tau \neq 0$

(b) $\lim_{\tau \to \infty} R_{XX}(\tau) = \mu_X^2$

R: Veja notas de aula.

6) [Lathi, 1998, p. 528] Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ dois processos ESA, independentes e de média nula. Dois novos processos $U(t)$ e $V(t)$ são obtidos de $U(t) = X(t) + Y(t)$ e $V(t) = 2X(t) + 3Y(t)$. Encontre $R_{UU}(\tau)$, $R_{VV}(\tau)$, $R_{UV}(\tau)$ e $R_{VU}(\tau)$ em termos de $R_{XX}(\tau)$ e $R_{YY}(\tau)$.

R: $R_{UU}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau)$; $R_{VV}(\tau) = 4R_{XX}(\tau) + 9R_{YY}(\tau)$; $R_{UV}(\tau) = 2R_{XX}(\tau) + 3R_{YY}(\tau)$

7) [Lathi, 1998, p. 526] Para cada uma das seguintes funções, determine se ela pode ser uma DEP válida para um processo real.

(a) $\frac{\omega^2}{\omega^2+16}$

(b) $\frac{1}{\omega^2-16}$

(c) $\frac{\omega}{\omega^2+16}$

(d) $\delta(\omega) + \frac{1}{\omega^2+16}$

(e) $\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)$

(f) $j[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

(g) $\frac{j\omega^2}{\omega^2+16}$

R: apenas (a), (d) e (e) são DEPs válidas.

8) [Ziemer and Tranter, 2014] Um processo aleatório tem função de autocorrelação

$$R_{XX}(\tau) = 5 + 2\Lambda\left(\frac{\tau}{10}\right)$$

sendo

$$\Lambda\left(\frac{\tau}{a}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & |t| < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Pede-se:

(a) o seu valor médio μ_X;

(b) a sua potência $E[X^2]$;

(c) a variância σ_X^2;

(d) sua DEP. Esboce-a colocando os valores corretos na escala.

R:(a) $\pm\sqrt{5}$; (b) 7; (c) 2; (d) $10\pi\delta(\omega) + 10\text{sinc}^2(5\omega)$.

9) [Hsu, 1996, p. 231] Um processo ESA $X(t)$ com função de autocorrelação

$$R_{XX}(\tau) = e^{-a|t|}$$

em que a é uma constante positiva, é aplicado à entrada de um sistema LIT com resposta ao impulso

$$h(t) = e^{-bt}u(t)$$

em que b é uma constante positiva. Encontre a função de autocorrelação da resposta $Y(t)$ do sistema.

R: $R_{YY}(\tau) = \frac{1}{(a^2-b^2)b}\left(ae^{-b|\tau|} - be^{-a|\tau|}\right)$.

10) [Hsu, 1996, p. 244] Um processo ESA $X(t)$ é aplicado à entrada de um sistema LIT com resposta ao impulso $h(t) = 3e^{-2t}u(t)$. Encontre o valor médio da saída desse sistema se $E\left[X(t)\right] = 2$.

R: 3.

11) [Peebles, 2000, p. 339, Modificado] Um processo aleatório $X(t)$ tem função de autocorrelação $R_{XX}(\tau) = 10\exp(-|\tau|)$. Ele é adicionado a ruído branco para o qual $\frac{N_0}{2} = 10^{-3}$ e a soma é aplicada a um filtro tendo função de transferência

$$H(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| < 600\pi \text{ rad/s} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Encontre a componente de sinal do espectro de potência da saída e a potência média do sinal de saída.

b) Encontre a densidade espectral de potência e a potência do ruído de saída. Qual a banda de ruído do filtro?

c) Qual a razão entre a potência do sinal de saída e a potência do ruído de saída?

R: (a) $S_{yy}(\omega) = \frac{80}{1+\omega^2}$, $|\omega| \leq 600\pi$ rad/s e 251,2; (b) $S_{YY}(\omega) = 4 \cdot 10^{-3}$, $|\omega| \leq 600\pi$ rad/s e 2,4; (c) 104,72.

12) [Hsu, 1996, p. 235] Considere um processo ESA $X(t)$ com função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ e DEP $S_{XX}(\omega)$. Seja $X' = \frac{dX(t)}{dt}$. Mostre que:

(a) $R_{XX'}(\tau) = \frac{d}{d\tau}R_{XX}(\tau)$

(b) $R_{X'X'}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)$

(c) $S_{X'X'}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$

13) Em um sistema de radar, um estimador para o tempo de ida e volta do sinal τ_0 tem fdp $\widehat{\tau_0} \sim \mathcal{N}\left(\tau_0, \sigma^2_{\widehat{\tau_0}}\right)$, em que τ_0 é o valor verdadeiro. Considere $c = 3 \times 10^8$ m/s a velocidade da luz para propagação eletromagnética.

(a) Se deseja-se estimar a distância ao alvo, proponha um estimador $\hat{R}$, função de $\widehat{\tau_0}$ e determine sua fdp.

(b) Determine o desvio padrão $\widehat{\tau_0}$ de modo que em 98% do tempo a estimativa do alcance R estará a menos de 10 m do valor correto.

R: (a) $\hat{R} = \frac{c}{2}\widehat{\tau_0}$ e $\hat{R} \sim \mathcal{N}\left(\frac{c\tau_0}{2}, \frac{c^2}{4}\sigma^2_{\widehat{\tau_0}}\right)$; (b) $\sigma_{\widehat{\tau_0}} < 2{,}865 \times 10^{-8}$ s .

14) [Kay, 1993, p. 14] Deseja-se estimar o valor de um nível DC A em WGN, ou seja,

$$x[n] = A + w[n],\ n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

com $w[n]$ de média nula e não correlacionado, sendo a variância de cada amostra $\sigma^2 = 1$. Considere dois estimadores

$$\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$\check{A} = \frac{1}{N+2}\left(2x[0] + \sum_{n=1}^{N-2} x[n] + 2x[N-1]\right)$$

(a) Determine o valor esperado e a variância de ambos os estimadores.

(b) Qual é o melhor? Essa conclusão depende de A?

(c) Em que situação seria interessante usar o estimador $\check{A}$? Ou seja, descreva um modelo de sinal em que o uso de $\check{A}$ faria sentido.

R: (a) $E\left[\hat{A}\right] = E\left[\check{A}\right] = A$; $\text{var}\left[\hat{A}\right] = \frac{\sigma^2}{N}$; $\text{var}\left[\check{A}\right] = \frac{N+6}{(N+2)^2}\sigma^2$

15) [Kay, 1993, p. 24, modificado] Para o problema de estimação de um nível DC em AWGN discutido exaustivamente em aula, assuma agora que, além de A, o valor de σ^2, a variância do ruído, também é desconhecida. Deseja-se estimar o vetor de parâmetros

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} A \\ \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Propõe-se o estimador

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \widehat{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\hat{A}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Esse estimador é não enviesado?

(b) Em caso positivo, determine sua variância. Em caso negativo, proponha uma mudança que o torne não enviesado.

R: (a) Ele é enviesado. (b) Tomar $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\hat{A}\right)^2$.

16) (P2-2018) Considere o conjunto de dados $\{x[0],x[1],\ldots,x[N-1]\}$ observados em que as amostras $x[n]$ são independentes e identicamente distribuídas (IID) com $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Deseja-se estimar a variância σ^2 como

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n].$$

(a) Determine a $\text{var}\left[\widehat{\sigma^2}\right]$. O que acontece com essa variância quando $N \to \infty$?

(b) Esse estimador é não enviesado? Em caso negativo, proponha uma modificação em $\widehat{\sigma^2}$ de modo que ele se torne não enviesado.

R: (a) $\frac{2\sigma^4}{N}$. Tende a 0. (b) Sim.

Referências

Hsu, H. (1996). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes.* Schaum's Outlines. McGraw-Hill.

Kay, S. M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory.* Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

Lathi, B. and Ding, Z. (2012). *Sistema de Comunicações Analógicos E Digitais Modernos.* LTC.

Lathi, B. P. (1998). *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).* Oxford University Press, New York, NY, USA, 3.ed edition.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Ziemer, R. E. and Tranter, W. H. (2014). *Principles of Communications.* Wiley.