Escola Politécnica da USP

PTC3405 - Processos Estocásticos - Algumas Notas de Aula - versão 0.75

Prof. Marcio Eisencraft

São Paulo

2018

Capítulo 1

Probabilidades

Neste curso, trata-se dos fenômenos que não podem ser representados de forma determinística mas apenas em termos de estatísticas. Dentre estes, destaca-se o ruído que é um limitante para qualquer sistema de comunicações.

Define-se um *sinal aleatório* ou *randômico* como uma forma de onda que pode ser caracterizada apenas de uma maneira probabilística. Em geral, pode ser uma forma de onda desejada ou não.

Alguns exemplos:

- O ruído de fundo ouvido quando escutamos uma rádio. A forma de onda causadora do ruído, se observada em um osciloscópio, aparece como uma tensão flutuando de forma aleatória com o tempo. Ela é indesejável já que interfere com nossa habilidade de ouvir o programa de rádio e é chamada de *ruído*.

- Num sistema de televisão, o ruído aparece na forma de interferência de imagem, freqüentemente chamada de "snow".

- Num sistema sonar, sons do mar gerados de forma aleatória geram ruídos que interferem com os ecos desejados.

- Bits em uma comunicação entre computadores parecem flutuar de forma aleatória com o tempo entre os níveis 0 e 1 gerando um sinal aleatório.

- A saída de tensão de um gerador eólico é aleatória por causa da variação randômica da velocidade do vento.
- A tensão de um detector solar varia de forma aleatória devido à imprevisibilidade das condições das nuvens e do tempo.
- A tensão de um analisador de vibração acoplado a um carro dirigido sobre um terreno irregular.

Para definir precisamente as características de um sinal aleatório precisamos dos conceitos da teoria das probabilidades.

Começa-se o estudo dos processos aleatórios introduzindo a teoria axiomática das probabilidades. Para isso, precisa-se das Teoria dos Conjuntos.

1.1 Definições de conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos. Os objetos são chamados de *elementos* do conjunto.

Existem dois modos para especificar os elementos de um conjunto:

- método tabular - todos os elementos são enumerados explicitamente. Exemplo: $\{6; 7; 8; 9\}$.
- método da regra - o conteúdo do conjunto é determinado por uma regra. Exemplo: $\{$inteiros entre 5 e 10$\}$.

Algumas definições:

- Conjunto *enumerável* - seus elementos podem ser postos em correspondência 1-a-1 (biunívoca) com os números naturais. Caso contrário é *não-enumerável*.
- Conjunto *vazio* ($\emptyset$) - não possui elementos.
- Conjunto *finito* - contém um número finito de elementos. Caso contrário é *infinito*.
- Conjuntos *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* - dois conjuntos que não têm nenhum elemento em comum.

- Conjunto universo S - conjunto que contém todos os elementos que estão sendo considerados.

Exercícios

1. [Peebles, 2000] Os conjuntos a seguir representam possíveis valores que podem ser obtidos na medição de certa corrente:

$$A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$$
$$B = \{1;\ 3;\ \ldots\}$$
$$C = \{0{,}5 < c \leq 8{,}5\}$$
$$D = \{0\}$$
$$E = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14\}$$
$$F = \{-5 < f \leq 12\}$$

   Determine se são finitos ou não, enumeráveis ou não e especificados de forma tabular ou por regra.

2. [Peebles, 2000]Ainda com relação aos conjuntos do exercício anterior, diga se é verdadeiro ou falso:

   a) $A \subset B$

   b) $A \subset C$

   c) $A \not\subseteq F$

   d) $C \subset F$

   e) $D \not\subseteq F$

   f) $E \subset B$

3. [Peebles, 2000] Com relação aos conjuntos do Exercício 1., escreva todos os pares de conjuntos que são mutuamente exclusivos.

4. [Peebles, 2000] Considere-se o experimento de jogar um dado. Estamos interessados nos números que aparecem na face superior. Pede-se:

   a) Escreva o conjunto universo S de todos os resultados possíveis.

   b) Num jogo, suponha que uma pessoa ganhe se sair um número ímpar. Escreva o conjunto A dos resultados que interessam a esta pessoa.

   c) Suponha que uma outra pessoa vence se sair um número menor ou igual a 4. Escreva o conjunto de todos os resultados que interessam a esta pessoa.

   d) Quantos subconjuntos de S existem?

1.2 Operações com conjuntos

Define-se a seguir as principais operações entre conjuntos.

1.2.1 Igualdade e diferença

Dois conjuntos A e B são iguais se todos os elementos de A estão presentes em B e vice-versa. A diferença de dois conjuntos $A - B$ é o conjunto contendo todos os elementos de A que não estão em B.

1.2.2 União e intersecção

A união de dois conjuntos $(A \cup B)$ é o conjunto de todos os elementos pertencentes a A ,B ou ambos. A intersecção de dois conjuntos $(A \cap B)$ é o conjunto de elementos comuns a A e B. Se A e B forem mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$.

1.2.3 Complemento

O complemento de um conjunto A, denotado por $\overline{A}$ é o conjunto de todos os elementos que não estão em A.

Exercício

5. [Peebles, 2000] Dados os conjuntos:

$$
\begin{aligned}
S &= \{s \in \mathbb{N} / 1 \leq s \leq 12\} \\
A &= \{1;\ 3;\ 5;\ 12\} \\
B &= \{2;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11\} \\
C &= \{1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8\}
\end{aligned}
$$

pede-se:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $B \cap C$

g) $\overline{A}$

h) $\overline{B}$

i) $\overline{C}$

1.2.4 Álgebra de conjuntos

Valem as propriedades comutativa, distributiva e associativa para união e intersecção.

1.3 Probabilidade introduzida por meio de conjuntos e frequência relativa

A definição de probabilidades pode ser feita de forma axiomática a partir dos conceitos de eventos e espaços das amostras.

1.3.1 Experimentos e espaço das amostras

O *espaço das amostras* é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Símbolo: S.

1.3.2 Espaços das amostras discretos e contínuos

O espaço das amostras é dito discreto se S é enumerável. O espaço das amostras é dito contínuo se S é não-enumerável.

1.3.3 Eventos

Um evento é definido como um subconjunto do espaço das amostras. Como um evento é um conjunto, todas as definições e operações anteriores aplicadas a conjuntos se aplicam a eventos. Por exemplo, se dois eventos não têm resultados comuns eles serão mutuamente exclusivos.

1.3.4 Definição de probabilidade e axiomas

A cada evento definido no espaço das amostras S associa-se um número não-negativo chamado de *probabilidade*. A probabilidade é portanto uma função; é uma função dos eventos definidos. Adota-se a notação $P(A)$ para a “probabilidade do evento A”.

A probabilidade deve satisfazer os seguintes axiomas para quaisquer eventos definidos num espaço de amostras:

Axioma 1: $P(A) \geq 0$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3: $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$ se $A_m \cap A_n = \emptyset$.

1.3.5 Modelo matemático de experimentos

Para resolver problemas de probabilidades são necessários 3 passos:

1. Estabelecimento do espaço das amostras
2. Definição dos eventos de interesse
3. Associar probabilidade aos eventos de forma que os axiomas sejam satisfeitos

Exercício

6. [Peebles, 2000] Um experimento consiste em observar a soma dos números que saem quando dois dados são jogados. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:

   a) $A = \{\text{soma} = 7\}$

   b) $B = \{8 < \text{soma} \leq 11\}$

   c) $C = \{10 < \text{soma}\}$

7. [Peebles, 2000] Um dado é jogado. Encontre a probabilidade dos eventos $A = \{$um número ímpar é obtido$\}$, $B = \{$um número maior do que 3 é obtido$\}$, $A \cup B$ e $A \cap B$.

1.4 Probabilidades condicionais e conjuntas

Estes são conceitos muito importantes que são revistos a seguir.

1.4.1 Probabilidade conjunta

A probabilidade $P(A \cap B)$ é chamada de *probabilidade conjunta* para dois eventos A e B que se interceptam no espaço de amostras.

Estudando um diagrama de Venn, obtém-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \tag{1.1}$$

Portanto,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{1.2}$$

Para eventos mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = \emptyset$ e $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.

1.4.2 Probabilidade condicional

Dado um evento B com probabilidade não-nula, define-se a probabilidade condicional de um evento A, dado B , como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.3}$$

Exercício

8. [Peebles, 2000] Em uma caixa existem 100 resistores tendo a resistência e a tolerância mostradas na tabela da Figura 1.1.

   Considere que um resistor é selecionado da caixa e assuma que cada resistor tem a mesma possibilidade de ser escolhido. Defina três eventos: A como “selecionar um resistor de 47Ω”, B como “selecionar um resistor com tolerância de 5%” e C como “selecionar um resistor de 100Ω”. A partir da tabela, determine as seguintes probabilidades:

   $a)$ $P(A)$

	Tolerance		
Resistance (Ω)	5%	10%	Total
22	10	14	24
47	28	16	44
100	24	8	32
Total	62	38	100

Figura 1.1: Resistores em uma caixa [Peebles, 2000].

b) $P(B)$

c) $P(C)$

d) $P(A \cap B)$

e) $P(A \cap C)$

f) $P(B \cap C)$

g) $P(A|B)$

h) $P(A|C)$

i) $P(B|C)$

1.4.3 Probabilidade Total

Dados N eventos mutuamente exclusivos B_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, cuja união seja o espaço de amostras S, a probabilidade de qualquer evento A pode ser escrita como

$$P(A) = \sum_{n=1}^{N} P\left(A|B_n\right) P\left(B_n\right) \tag{1.4}$$

Esta situação é ilustrada no diagrama de Venn da Figura 1.2

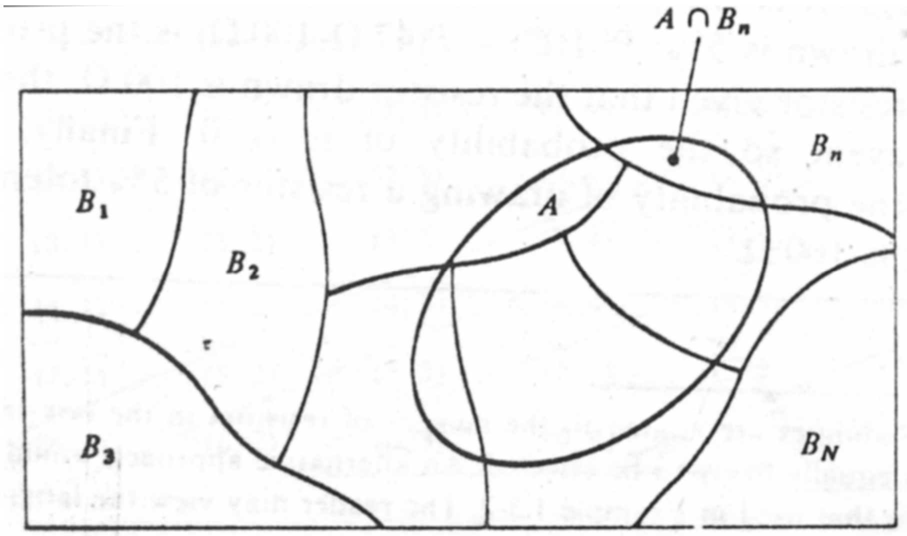

Figura 1.2: N eventos mutuamente exclusivos B_n e o conjunto A [Peebles, 2000].

1.4.4 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes, um dos mais importantes e usados na área de probabilidades e na teoria de estimação estabelece que:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)} \tag{1.5}$$

Usando a probabilidade total, pode-se escrever que:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)}. \tag{1.6}$$

As probabilidades $P(B_n)$ são geralmente chamadas de probabilidades *a priori* já que são aplicadas a eventos antes de ocorrer o experimento. As probabilidades $P(B_n|A)$ são chamadas de *a posteriori* já que elas se aplicam quando um evento A é obtido.

Exercício

9. [Peebles, 2000] Um sistema de comunicação binário elementar consiste de um transmissor que envia um de dois símbolos possíveis (1 ou 0) sobre um canal para o receptor. O canal ocasionalmente causa erros de forma que um 1 é detectado quando foi transmitido um 0

e vice-versa.

O espaço das amostras tem dois elementos (0 ou 1). Denota-se por B_i, $i = 1, 2$, como os eventos "o símbolo antes do canal é 1" e "o símbolo antes do canal é 0", respectivamente. Além disso, define-se A_i, $i = 1, 2$, como os eventos "o símbolo depois do canal é um" e "o símbolo depois do canal é zero", respectivamente. Assume-se que as probabilidades de que os símbolos um e zero sejam selecionados para transmissão sejam $P(B_1) = 0{,}6$ e $P(B_2) = 0{,}4$.

O diagrama da Figura 1.3 mostra as probabilidades condicionais que descrevem o efeito que o canal tem sobre os símbolos transmitidos.

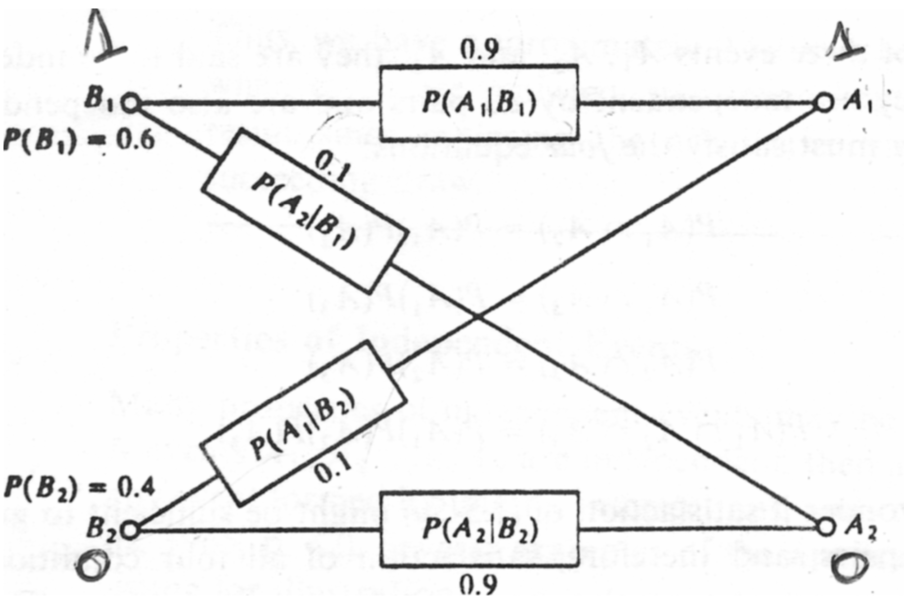

Figura 1.3: Sistema de comunicação binário simétrico [Peebles, 2000].

Pede-se:

$a)$ as probabilidades de se receber um 1 e de receber um 0 $P(A_1)$ e $P(A_2)$.

$b)$ as probabilidades de acerto de bit $P(B_1|A_1)$ e $P(B_2|A_2)$.

$c)$ as probabilidades de erro de bit $P(B_2|A_1)$ e $P(B_1|A_2)$.

1.5 Eventos independentes

Sejam dois eventos A e B tais que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$. Estes eventos são *independentes* se a probabilidade de ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro evento. Usando a notação da seção anterior

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B) \tag{1.7}$$

Pela definição da Eq. (1.3), para eventos independentes,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad A \text{ e } B \text{ independentes.} \tag{1.8}$$

Cuidado: não confundir independência estatística com eventos mutuamente exclusivos. Dois eventos serem *independentes* significa que a ocorrência de um *não depende*, não é influenciado, pela ocorrência do outro. Dois eventos serem mutuamente *exclusivos* significa que um *não pode ocorrer* se o outro ocorreu. Em suma,

$$A \text{ e } B \text{ independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

$$A \text{ e } B \text{ mutuamente exclusivos} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.$$

Pelas definições, dois eventos com probabilidade não-nula não podem ser simultaneamente independentes e mutuamente exclusivos.

Exercícios

10. [Peebles, 2000] Em um experimento, uma carta é selecionada de um conjunto comum de 52 cartas. Defina os eventos A como “selecionar um rei”, B como “selecionar um valete ou uma rainha” e C “selecionar uma carta de copas”. Pede-se:

    a) Determine $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$.

b) Determine as probabilidades conjuntas $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ e $P(A \cap C)$.

c) Determine se os pares A e B, A e C e B e C são independentes ou não.

11. Considere a retirada de quatro cartas de um conjunto com 52 cartas. Sejam os eventos A_1, A_2, A_3, A_4 definidos como a retirada de um ás na primeira, segunda, terceira e quarta tentativas. Determine a probabilidade conjunta $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ (ou seja, retirar quatro ases seguidos) nos seguintes casos:

    a) cada carta é recolocada no baralho após ser retirada.

    b) as cartas retiradas não são retornadas ao baralho.

    Em qual dos dois experimentos os eventos são independentes?

1.6 Experimentos Combinados

Um *experimento combinado* consiste em se formar um experimento *único* pela combinação de experimentos individuais, chamados de *subexperimentos*.

Lembre-se que um experimento é definido por três quantidades:

1. o espaço das amostras aplicável

2. os eventos definidos no espaço das amostras

3. a probabilidade dos eventos

1.6.1 Espaço das Amostras Combinado

Sejam S_1 e S_2 os espaços das amostras de dois subexperimentos e sejam s_1 e s_2 elementos de S_1 e S_2, respectivamente. Forma-se um novo espaço S, chamado de *espaço das amostras combinado*, cujos elementos são os pares ordenados (s_1, s_2).

O espaço das amostras combinado é denotado

$$S = S_1 \times S_2 \tag{1.9}$$

Exercício

12. Considere que S_1 corresponde a jogar uma moeda e, assim, $S_1 = \{H, T\}$, em que H é o elemento “cara” e T representa “coroa”. Seja $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ correspondente ao arremesso de um dado. Obtenha o espaço das amostras combinado $S = S_1 \times S_2$.

Para N espaços das amostras S_n, $n = 1, 2, 3, \ldots, N$, tendo elementos s_n, o espaço das amostras combinado S é denotado

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N \tag{1.10}$$

1.6.2 Eventos do Espaço Combinado

Seja A qualquer evento definido em S_1 e B qualquer evento definido em S_2, então

$$C = A \times B \tag{1.11}$$

é um evento definido em S consistindo de todos os pares (s_1, s_2) tais que

$$s_1 \in A \quad \text{e} \quad s_2 \in B \tag{1.12}$$

1.6.3 Probabilidades

Serão considerados apenas o caso em que

$$P(A \times B) = P(A)P(B) \tag{1.13}$$

Subexperimentos para os quais a Eq. (1.13) é válida são chamados de *experimentos independentes*.

1.7 Tentativas de Bernoulli

Considere o seguinte problema: seja um experimento elementar tendo apenas dois resultados possíveis com probabilidades $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p$. Deseja-se repetir esse experimento N vezes e determinar a probabilidade do evento A ser observado k vezes nessas N tentativas. Esse experimento é chamado de *tentativas de Bernoulli* ("Bernoulli trials").

Pode-se mostrar que, neste caso:

$$P(A \text{ ocorrer exatamente } k \text{ vezes}) = \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{N-k} \tag{1.14}$$

em que $\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$.

Quando N é muito grande, uma aproximação para a fórmula acima, conhecida como aproximação de De Moivre-Laplace é dada por

$$P(A \text{ ocorrer exatamente } k \text{ vezes}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p(1-p)}} \exp\left[-\frac{(k-Np)^2}{2Np(1-p)}\right] \tag{1.15}$$

Exercícios

13. Um submarino deseja afundar um porta-aviões. Ele terá sucesso apenas se dois ou mais torpedos atingirem a embarcação. Se o submarino dispara três torpedos e a probabilidade de cada torpedo atingir o alvo é 0,4, qual a probabilidade do porta-aviões naufragar?

14. Em uma cultura usada para pesquisa biológica, o crescimento inevitável de bactérias ocasionalmente estraga os resultados de um experimento que requer que pelo menos três de quatro culturas não estejam contaminadas para se obter um ponto de dado. Experiências mostram que cerca de 6 em cada 100 culturas são contaminadas de forma aleatória por bactérias. Se um experimento requer três pontos de dados, encontre a

probabilidade de sucesso para um conjunto de 12 culturas (três pontos de dados usando quatro culturas cada).

15. Suponha que certa arma automática dispara balas por 3 segundos a uma taxa de 2400 por minuto e que a probabilidade de acertar um alvo seja 0,4. Encontre a probabilidade de que exatamente 50 balas atinjam o alvo. (Use a aproximação de De Moivre-Laplace).

16. Uma companhia vende amplificadores de alta fidelidade capazes de gerar potências de 10, 25 e 50W. Ela tem em mãos 100 unidades de 10W das quais 15% são defeituosas, 70 unidades de 25W dos quais 10% são defeituosos e 30 dos de 50W dos quais 10% são defeituosos.

    a) Qual a probabilidade de que um amplificador vendido entre os de 10W seja defeituoso?

    b) Se cada amplificador de potência é vendido com mesma probabilidade, qual a probabilidade de uma unidade selecionada de forma aleatória ser de 50W e defeituoso?

    c) Qual a probabilidade de uma unidade selecionada de forma aleatória para venda ser defeituosa?

Capítulo 2

A variável aleatória

Neste capítulo é introduzido um conceito que permite definir eventos de uma forma mais consistente. Este novo conceito é o de *variáveis aleatórias* e se constitui em uma poderosa ferramenta na solução de problemas probabilísticos práticos.

2.1 O conceito de variável aleatória

Define-se uma variável aleatória real como uma função real dos elementos de um espaço das amostras [Peebles, 2000]. Representa-se uma variável aleatória por letras maiúsculas (como W, X ou Y) e um valor particular que ela assume por letras minúsculas (como w, x ou y).

Assim, dado um experimento definido pelo espaço das amostras com elementos s, atribui-se a cada s o número real $X(s)$ de acordo com alguma regra e diz-se que $X(s)$ é uma variável aleatória.

Uma variável aleatória é *discreta* se possui apenas valores discretos. Uma variável aleatória é *contínua* se abrange um contínuo de valores.

Exercício 2.1. *[Peebles, 2000] Um experimento consiste em jogar um dado e uma moeda. Considere uma variável aleatória X tal que: (1) uma cara (H) corresponde a valores positivos de X que são iguais aos números que aparecem no dado e (2) uma coroa (T) corresponde a valores negativos de X cuja magnitude é o dobro do número que aparece no dado. Pede-se:*

a) *Represente o espaço das amostras deste experimento;*

b) *Para cada evento s deste espaço das amostras, determine $X(s)$.*

Exercício 2.2. *[Peebles, 2000] Um espaço das amostras é definido pelo conjunto $S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ sendo as probabilidades de seus elementos $P(1) = \frac{4}{24}$, $P(2) = \frac{3}{24}$ e $P(3) = \frac{7}{24}$. Definindo a variável aleatória $X = X(s) = s^3$, calcule as probabilidades:*

a) $P\{X = 1\}$

b) $P\{X = 8\}$

c) $P\{X = 27\}$

d) $P\{X = 64\}$

Exercício 2.3. *Suponha que a temperatura de uma localidade seja modelada como uma variável aleatória contínua T que sabe-se encontrar entre $-5^o C$ e $35^o C$. Além disso, considere que todos os valores $\{-5 \leq t \leq 35\}$ são igualmente prováveis. Calcule:*

a) $P\{T \leq 10\}$

b) $P\{5 \leq T \leq 10\}$

c) $P\{T = 10\}$

2.2 Função distribuição

A probabilidade $P(\{X \leq x\})$ é a probabilidade do evento $\{X \leq x\}$ e é uma quantidade que depende de x. Esta função, denotada por $F_X(x)$, é chamada de *função distribuição de probabilidade cumulativa* da variável aleatória X.

Assim,

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}). \tag{2.1}$$

Frequentemente, $F_X(x)$ é chamada de *função distribuição* de X. O argumento x é qualquer número real entre $-\infty$ e $+\infty$.

Algumas propriedades de $F_X(x)$ são:

a) $F_X(-\infty) = 0$

b) $F_X(+\infty) = 1$

c) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

d) Se $x_1 < x_2$ então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

e) $P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Exercício 2.4. *[Peebles, 2000] Considere que X assuma valores discretos no conjunto* $\{-1;\ -0{,}5;\ 0{,}7;\ 1{,}5;\ 3\}$. *As probabilidades correspondentes são* $\{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}2\}$. *Determine e faça um gráfico de $F_X(x)$.*

2.3 Função densidade

A *função densidade de probabilidade* $f_X(x)$ é definida como a derivada da função de distribuição. Assim,

$$f_X(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}. \tag{2.2}$$

Frequentemente, chama-se $f_X(x)$ apenas de *função densidade* da variável aleatória X.

A função $f_X(x)$ existe desde que a derivada de $F_x(x)$ exista. No caso de variáveis aleatórias discretas, pode ser necessária a utilização de funções impulso $\delta(x) = \frac{du(x)}{dx}$ para sua representação. Ela é revista a seguir.

As principais propriedades da função densidade são:

a) $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

d) $P(\{x_1 < X < x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$

2.3.1 A função impulso unitário $\delta(t)$

Definição:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Pode-se visualizar um impulso como sendo um retângulo estreito e alto, como mostrado na Figura 2.1

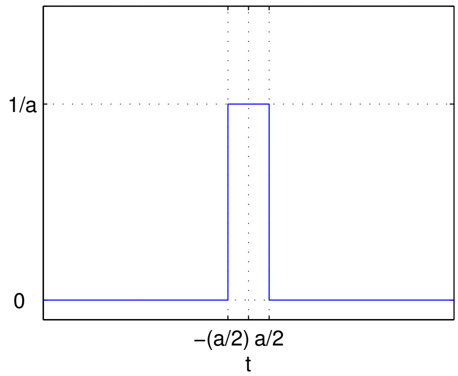

Figura 2.1: Aproximação do impulso unitário. A função $\delta(t)$ é obtida quando $a \to 0$.

Sua largura é um número muito pequeno, a e sua altura, um número muito grande $1/a$. Assim, sua área é 1. O impulso $\delta(t)$ é obtido quando $a \to 0$.

A função $\delta(t)$ é representada como na Figura 2.2.

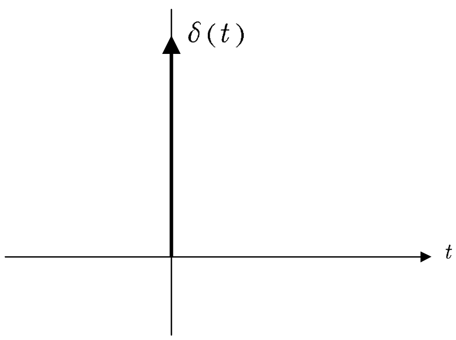

Figura 2.2: Representação gráfica do impulso $\delta(t)$.

Algumas propriedades importantes da função $\delta(t)$ são:

a) Multiplicação de uma função por um impulso

$$g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t) \tag{2.4}$$

$$g(t)\delta(t-T) = g(T)\delta(t-T) \tag{2.5}$$

b) Propriedade da amostragem da função impulso unitário

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t) \quad dt = g(0) \tag{2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-T) \quad dt = g(T) \tag{2.7}$$

Função degrau unitário

Definição:

$$u(t) = \begin{cases} 1,\ t \geq 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Na Figura 2.3 é mostrado um gráfico de $u(t)$.

Repare que $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$.

Se desejar-se que um sinal comece em $t = 0$, pode-se multiplicá-lo por $u(t)$. Por exemplo, o sinal e^{-at} representa uma exponencial que começa em $t = -\infty$. Se desejar-se que ele se inicie em $t = 0$, pode-se descrevê-lo por $e^{-at}u(t)$. Um gráfico deste sinal é mostrado na Figura 2.4.

Observação: Um sinal que possui valores não-nulos apenas para $t \geq 0$ é chamado de *sinal causal*.

Exercício 2.5. *[Lathi, 1998] Simplifique as seguintes expressões:*

a) $\left(\frac{\sin t}{t^2+2}\right)\delta(t)$

b) $\left(\frac{j\omega+2}{\omega^2+9}\right)\delta(\omega)$

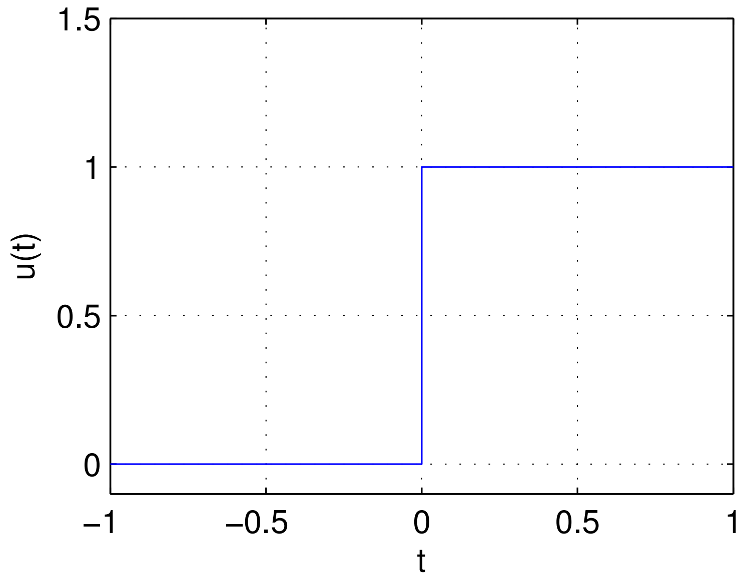

Figura 2.3: Gráfico de $u(t)$.

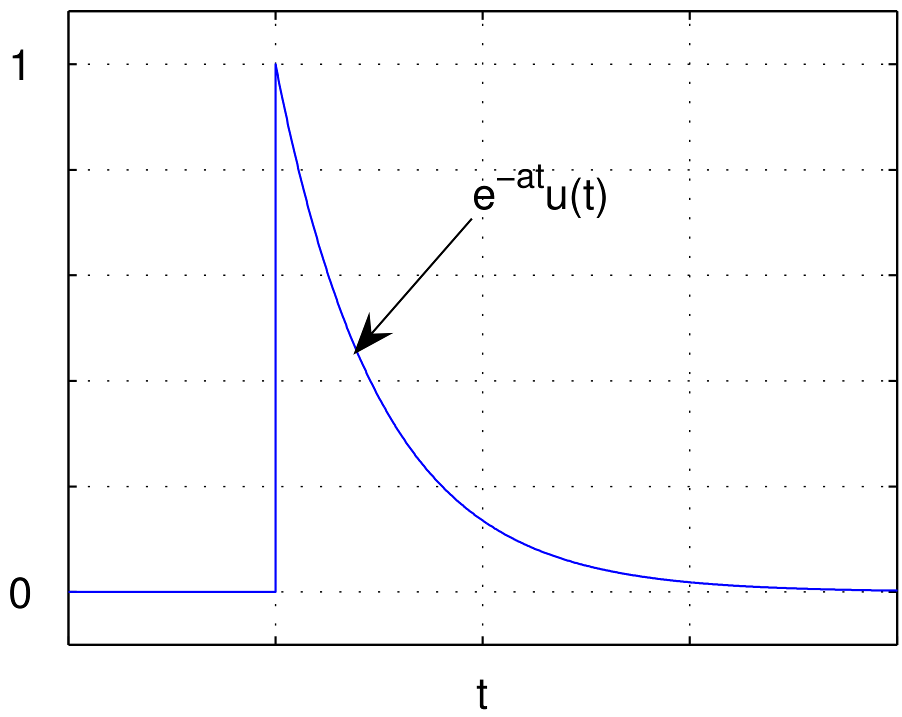

Figura 2.4: Gráfico de $e^{-at}u(t)$.

c) $\left[e^{-t}\cos\left(3t-60^o\right)\right]\delta(t)$

d) $\frac{\left[\sin\frac{\pi}{2}(t-2)\right]}{t^2+4}\delta(t)$

Exercício 2.6. *[Lathi, 1998] Calcule as seguintes integrais:*

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)g(t-\tau)d\tau$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2)\sin\pi t dt$

Exercício 2.7. *A atenuação que certo canal apresenta é uma variável aleatória X cuja função densidade $g_X(x)$ é dada na Figura 2.5. Pede-se:*

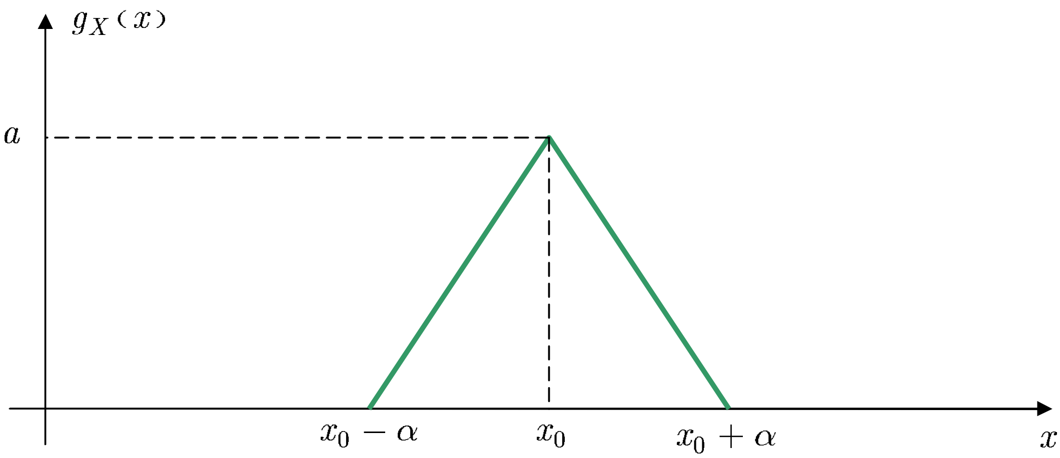

Figura 2.5: Função densidade triangular.

a) *Determine a para que $g(x)$ seja uma função densidade*

b) *Para o valor de a do item anterior, determine e esboce $G_X(x)$*

Exercício 2.8. *Suponha que uma atenuação aleatória X tenha a densidade de probabilidade triangular do Exercício 2.7 com $x_0=8$, $\alpha=5$ e $a=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{5}$. Determine a probabilidade $P\left(\{4{,}5<X\leq 6{,}7\}\right)$.*

Exercício 2.9. *A quantidade acessos normalizada a um servidor durante um dia é descrita por uma variável aleatória X que tem distribuição*

$$F_X(x) = u(x)\left[1 - e^{-\frac{x^2}{b}}\right]. \tag{2.9}$$

Determine a função densidade $f_X(x)$.

Exercício 2.10. *[Peebles, 2000] A central de um sistema de intercomunicação provê música para seis quartos de um hospital. A probabilidade de que cada quarto seja ativado e consuma potência a qualquer instante é* 0,4*. Quando ativado, o quarto consome* 0,5 *W. Pede-se:*

a) *Encontre e faça um gráfico das funções distribuição e densidade para a variável aleatória "potência fornecida pela central".*

b) *Se o amplificador da estação principal fica sobrecarregado quando mais do que 2W é necessário, qual a probabilidade de sobrecarga?*

2.4 A variável aleatória gaussiana

Uma variável aleatória é chamada de *gaussiana* se sua função densidade de probabilidade tem a forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}} \tag{2.10}$$

em que $\sigma_X > 0$ e $-\infty < a_X < +\infty$ são constantes reais. A Figura 2.6 mostra um gráfico de $f_X(x)$ para $a_X = 0$ e $\sigma_X = 1$.

A densidade gaussiana é a mais utilizada de todas as densidades e aparece praticamente em todas as áreas da Ciência e da Engenharia. Esta importância vem de sua descrição precisa de muitas quantidades práticas e de significado no mundo real, especialmente as quantidades resultantes de muitos efeitos aleatórios pequenos que se somam agindo para criar a quantidade de interesse [Peebles, 2000].

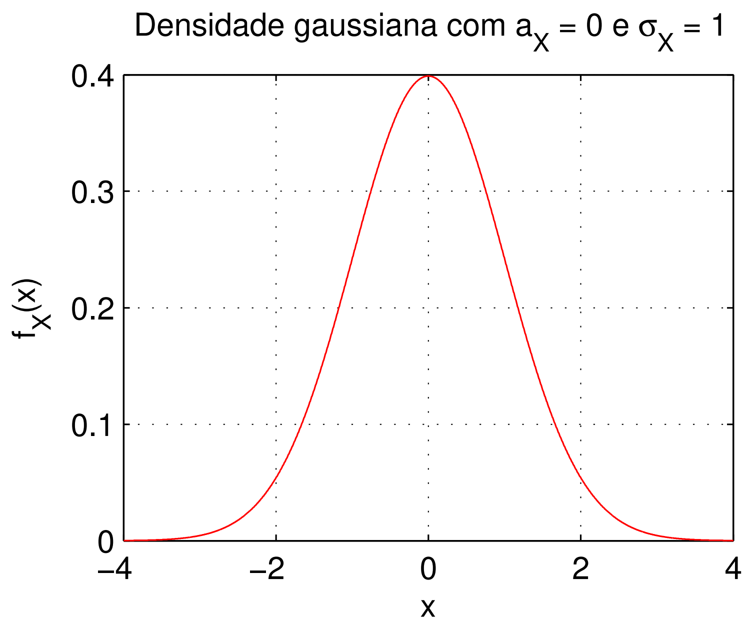

Figura 2.6: Função densidade gaussiana com $a_X = 0$ e $\sigma_X = 1$.

A função distribuição gaussiana é dada por

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi - a_X)^2}{2\sigma_X^2}} d\xi. \tag{2.11}$$

A integral da Eq. (2.11) não tem forma fechada conhecida. Para obter $F_X(x)$, define-se a *distribuição gaussiana normalizada*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \tag{2.12}$$

e, com essa definição, tem-se:

$$F_X(x) = F\left(\frac{x - a_x}{\sigma_x}\right) \tag{2.13}$$

A função $F(x)$ é encontrada em tabelas em muitas referências, como [Peebles, 2000]. Alguns livros, como [Lathi, 1998] tabelam $Q(x) = 1 - F(x)$ ao invés de $F(x)$.

A tabela da Figura 2.7 [Peebles, 2000] mostra valores de $F(x)$ para $x \geq 0$. Repare que para $x < 0$ basta utilizar o fato de que $F(-x) = 1 - F(x)$.

Exercício 2.11. *A relação sinal-ruído no canal de um sistema de comunicações dada em dB*

TABLE B-1

Values of $F(x)$ for $0 \le x \le 3.89$ in steps of 0.01

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Figura 2.7: Valores tabelados de $F(x)$ [Peebles, 2000].

pode ser aproximada por uma variável aleatória gaussiana X sendo $a_X = 3$ e $\sigma_X = 2$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 5{,}5\}$.

Exercício 2.12. *[Peebles, 2000] Assuma que a altura das nuvens sobre o solo em um determinado local é uma variável aleatória gaussiana X com $a_X = 1830m$ e $\sigma_X = 460m$. Encontre a probabilidade de que uma nuvem esteja a uma altura superior a 2750m.*

Exercício 2.13. *Seja uma variável aleatória gaussiana para a qual $a_X = 7$ e $\sigma_X = 0{,}5$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 7{,}3\}$.*

2.5 Outros exemplos de distribuições e densidades

A seguir, descrevem-se outros exemplos de distribuições utilizadas em diversos problemas de Engenharia.

2.5.1 Uniforme

A densidade de probabilidade *uniforme* e a sua função distribuição são dadas por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \tag{2.15}$$

para constantes reais a e b com $b > a$.

A Figura 2.8 mostra gráficos de $f_X(x)$ e de $F_X(x)$ para este caso.

Uma aplicação importante é na modelagem do erro de digitalização de sinais amostrados em sistemas de comunicações digitais.

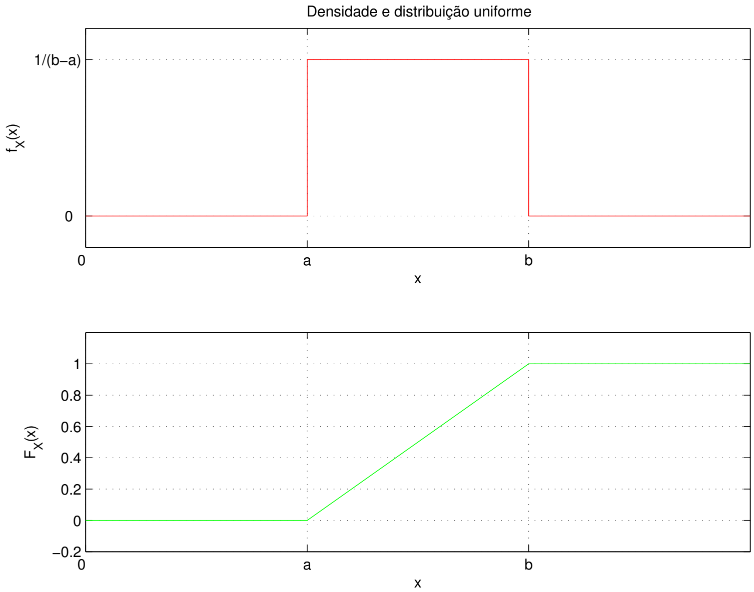

Figura 2.8: Funções densidade e distribuição uniforme.

2.5.2 Exponencial

As funções distribuição e densidade exponencial são:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x \leq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.16}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x \leq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.17}$$

para números reais a e b com $b > 0$.

Na Figura 2.9 são mostrados gráficos da densidade e da distribuição exponencial.

Algumas das aplicações da variável aleatória exponencial são a descrição do tamanho das gotas de chuva e a flutuação da intensidade de um sinal de radar recebido da reflexão de certas aeronaves.

Exercício 2.14. *[Peebles, 2000] A potência refletida por uma aeronave com um formato complexo é recebida por um radar e pode ser descrita por uma variável aleatória exponencial*

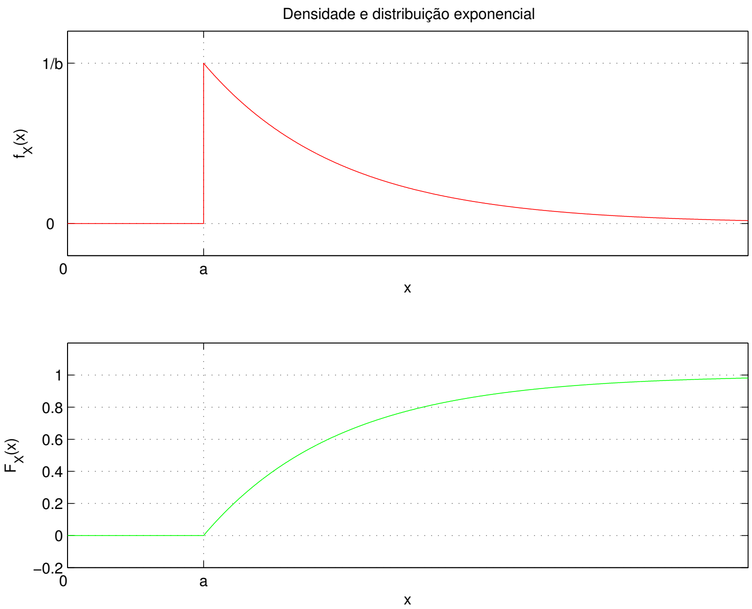

Figura 2.9: Funções densidade e distribuição exponencial.

P. A densidade de P é, portanto,

$$f_P(p) = \begin{cases} \frac{1}{P_0} e^{-\frac{p}{P_0}}, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

em que P_0 é o valor médio da potência recebida. Em um instante particular, P pode ter um valor diferente do seu valor médio. Qual a probabilidade de que a potência recebida seja maior do que o seu valor médio?

2.5.3 Binomial

Para $0 < p < 1$ e $N = 1,\ 2\ \ldots$, a função

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^k \delta(x-k) \tag{2.19}$$

é chamada de *função densidade binomial.*

A densidade binomial pode ser aplicada aos experimentos de Bernoulli. É utilizada em muitos problemas de detecção em radar e sonar e muitos experimentos tendo apenas dois possíveis resultados.

Integrando-se Eq.(2.19), obtém-se a *função distribuição binomial*

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^k u(x-k) \tag{2.20}$$

Na Figura 2.10 são traçados gráficos das funções densidades e distribuição binomial para $N = 6$ e $p = 0{,}25$.

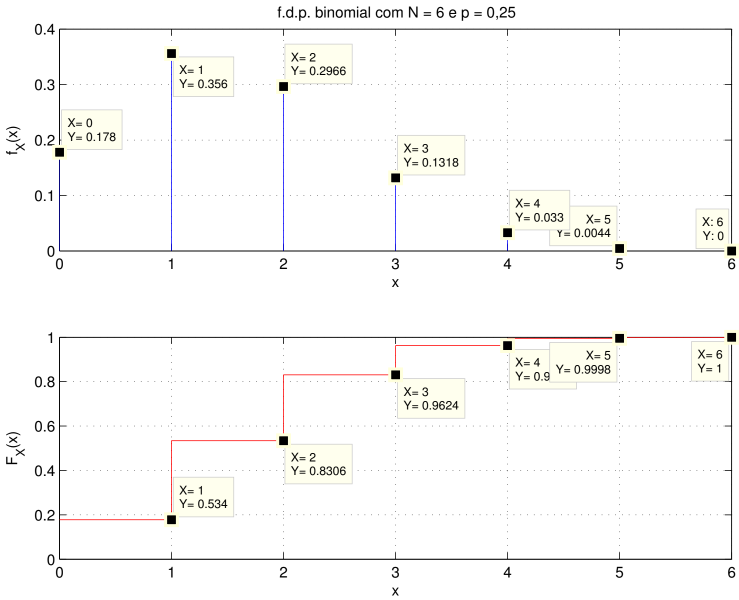

Figura 2.10: Exemplo de densidade e distribuição binomial com $N = 6$ e $p = 0{,}25$.

2.5.4 Poisson

A variável aleatória de Poisson tem densidade e distribuição dadas respectivamente por:

$$f_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \delta(x-k) \tag{2.21}$$

$$F_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} u(x-k) \tag{2.22}$$

em que b é uma constante positiva.

A distribuição é um caso limite da distribuição binomial em que $N \to +\infty$ e $p \to 0$ com $Np = b$. É usada para descrever, por exemplo, o número de unidades defeituosas numa linha de produção, o número de chamadas telefônicas feitas durante um período de tempo, ou o número de elétrons emitidos de uma pequena porção de um cátodo num intervalo de tempo.

Se o intervalo de tempo de interesse tem duração T e os eventos sendo contados ocorrem a uma taxa λ, então b é dado por

$$b = \lambda T \tag{2.23}$$

Exercício 2.15. *[Peebles, 2000] Assuma que a chegada de carros num posto de gasolina é uma distribuição de Poisson e ocorrem a uma taxa média de 50/h. O posto tem apenas uma bomba. Assumindo que todos os carros necessitam de 1 minuto para abastecer, qual a probabilidade de que uma fila se forme na bomba?*

2.5.5 Rayleigh

As funções densidade e distribuição de Rayleigh são

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{b}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.24}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{2.25}$$

para números reais a e b com $b > 0$.

Na Figura 2.11 são mostradas curvas das funções densidade e distribuição de Rayleigh.

Entre outras aplicações, a variável de Rayleigh descreve a envoltória de um tipo de ruído quando passa por um filtro passa-faixas. Também é importante na análise de erros em vários sistemas de medição.

Exercício 2.16. *[Peebles, 2000] O valor $x = x_0$ tal que $P(X \leq x_0) = P(X \geq x_0)$ é chamado*

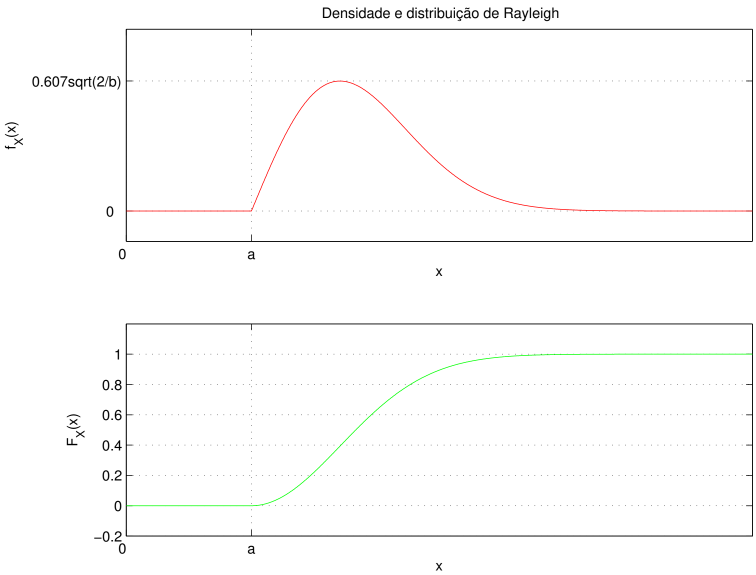

Figura 2.11: Funções densidade e distribuição de Rayleigh.

de mediana de uma distribuição. Determine a mediana de uma distribuição de Rayleigh.

Exercício 2.17. *[Peebles, 2000] Uma tensão aleatória gaussiana X para a qual $a_X = 0$ e $\sigma_X = 4{,}2\,V$ aparece através de um resistor de 100Ω com uma potência máxima permitida de $0{,}25\,W$. Qual a probabilidade de que esta tensão cause uma potência instantânea que exceda a máxima do resistor?*

2.6 Funções densidade e distribuição condicionadas

Lembre-se que, para dois eventos A e B em que $P(B) \neq 0$, a probabilidade condicional de A dado que B tenha ocorrido é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.26}$$

Nesta seção estende-se o conceito de probabilidade condicional para variáveis aleatórias.

Considere que o evento A na Eq. (2.26) seja identificado com o evento $\{X \leq x\}$ para a variável aleatória X. A probabilidade resultante $P\{X \leq x|B\}$ é definida como a *função* *distribuição condicional* de X, que denota-se por $F_X(x|B)$. Assim,

$$F_X(x|B) = P\{X \leq x|B\} = \frac{P\{X \leq x \cap B\}}{P(B)} \tag{2.27}$$

em que usa-se a notação $\{X \leq x \cap B\}$ para representar o evento conjunto $\{X \leq x\} \cap B$.

Todas as propriedades das distribuições ordinárias aplicam-se a $F_X(x|B)$.

De forma semelhante às funções densidades ordinárias, define-se a *função densidade condicional* da variável aleatória X como a derivada da função distribuição condicional. Definindo-se esta densidade como $f_X(x|B)$, então

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}. \tag{2.28}$$

Como a densidade condicional está relacionada à distribuição condicional por meio da derivada, ela satisfaz as mesmas propriedades das funções densidades ordinárias.

Exercício 2.18. *[Peebles, 2000] Duas caixas tem bolas vermelhas, verdes e azuis dentro; a quantidade de cada uma é dada a seguir.*

Caixa 01 - 5 vermelhas; 35 verdes; 60 azuis

Caixa 02 - 80 vermelhas; 60 verdes; 10 azuis

Um experimento consiste em selecionar uma caixa e então uma bola da caixa selecionada. Uma caixa (a número 2) é um pouco maior do que a outra, o que a leva a ser selecionada com mais frequência. Seja B_2 o evento "selecionar a caixa maior" e seja B_1 o evento "selecionar a caixa menor". Assuma que $P(B_1) = \frac{2}{10}$ e $P(B_2) = \frac{8}{10}$ (B_1 e B_2 são mutuamente exclusivos e $B_1 \cup B_2$ é o evento certo, já que alguma caixa tem que ser selecionada; assim, $P(B_1) + P(B_2)$ é a unidade).

Defina então a variável aleatória discreta X como assumindo valores $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ quando uma bola vermelha, verde, ou azul é selecionada.

Determine e esboce as FDP condicionadas $f_X(x|B_1)$, $f_X(x|B_2)$, $f_X(x)$ e $F_X(x)$.

Exercício 2.19. *[Peebles, 2000]A "distância de erro" radial no pouso de saltos de paraquedas,* *medida a partir do centro do alvo, é uma VA de Rayleigh com* $b = 800m^2$ *e* $a = 0$*. O alvo é um círculo de 50m de raio com uma "mosca" de 10m de raio. Calcule a probabilidade de um paraquedista atingir a "mosca" dado que ele atingiu o alvo.*

Capítulo 3

Operações sobre uma variável aleatória - Esperança matemática

Neste capítulo, introduz-se algumas operações importantes que podem ser realizadas sobre uma variável aleatória.

3.1 Esperança

Valor esperado é o nome dado ao processo de tomar uma média quando uma variável aleatória está envolvida. Para uma variável aleatória X, usa-se a notação $E[X]$, que pode ser lida como "a esperança matemática de X", "o valor esperado de X", "o valor médio de X" ou ainda "a média estatística de X".

Ocasionalmente, usa-se a notação $\overline{X}$ que tem o mesmo significado que $E[X]$, ou seja, $\overline{X} = E[X]$.

Para motivar a definição de $E[X]$, parte-se do exercício a seguir.

Exercício 3.1. *[Peebles, 2000] Noventa pessoas foram selecionadas aleatoriamente e o valor em reais fracionário das moedas em seus bolsos foi contado. Se a conta dava acima de um real, o valor inteiro era descartado e tomava-se apenas a parte que ia de 0 a 99 centavos. Observou-se que 8, 12, 28, 22, 15 e 5 pessoas tinham 18, 45, 64, 72, 77 e 95 centavos respectivamente.*

Determine o valor médio da quantidade de centavos nos bolsos.

Seguindo o exemplo do Exercício 3.1, o valor esperado de uma variável aleatória X é definido por

$$E[X] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \tag{3.1}$$

Caso X seja discreta com N possíveis valores de x_i com probabilidades $P(x_i)$, então:

$$E[X] = \overline{X} = \sum_{n=1}^{N} x_i P(x_i). \tag{3.2}$$

Exercício 3.2. *A potência captada na entrada de uma antena interna pode ser modelada aproximadamente por uma variável aleatória contínua distribuída exponencialmente com*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases} \tag{3.3}$$

Determine o valor médio da potência recebida. Dica: $\int x e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(1+ax)$.

Como ficará evidente na próxima seção, muitos parâmetros úteis relacionados a uma variável aleatória X podem ser obtidos encontrando o valor esperado de uma função real $g(\cdot)$ de X. Este valor esperado é dado por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{3.4}$$

Se X for uma variável aleatória discreta,

$$E[g(X)] = \sum_{n=1}^{N} g(x_i) P(x_i). \tag{3.5}$$

Exercício 3.3. *Sabe-se que uma dada tensão aleatória pode ser representada por uma variável* *aleatória de Rayleigh V com função densidade dada por*

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{2}{b}(v-a)e^{-\frac{(v-a)^2}{b}}, & v \geq a \\ 0, & v < a \end{cases} \tag{3.6}$$

com $a = 0$ e $b = 5$. Esta tensão é aplicada a um dispositivo que gera uma tensão $Y = g(V) = V^2$ que é igual, numericamente, à potência de V (sobre um resistor de 1Ω). Encontre a potência média de V.

Exercício 3.4. *[Peebles, 2000] Um problema em sistemas de comunicações é como definir a informação de uma fonte. Considere a modelagem de uma fonte capaz de emitir L símbolos distintos (mensagens) representados pelos valores de uma variável aleatória discreta x_i, $i = 1, 2, \ldots,$ ($L = 2$ é o caso binário). Seja $P(x_i)$ a probabilidade do símbolo $X = x_i$. Pergunta-se, qual a informação contida nesta fonte, em média. É necessário fazer três considerações.*

Primeiro, considera-se que a informação deve ser maior para saídas da fonte com baixa probabilidade. Por exemplo, contém pouca informação prever tempo quente e seco para o deserto do Saara já que estas condições prevalecem quase todo o tempo. Mas prever tempo frio e chuvas fortes carrega "muita informação". A seguir, as informações de duas fontes independentes devem se somar de acordo e finalmente a informação deve ser uma quantidade positiva (uma escolha feita) e zero para um evento que ocorre com certeza. Uma função com estas propriedades é a logarítmica. Como duas quantidades representam o menor número para uma escolha, o logaritmo na base 2 é escolhido para medir informação e sua unidade é chamada de bit. *Para uma fonte, definimos a informação de um símbolo x_i como $log_2\left[\frac{1}{P(x_i)}\right] = -log_2\left[P\left(x_i\right)\right]$. Determine então a informação média ou* entropia, *de uma fonte discreta com L símbolos possíveis.*

3.2 Momentos

Uma aplicação imediata do valor esperado de uma função $g(\cdot)$ de uma variável aleatória X é o cálculo de momentos. Dois tipos de momentos são de interesse, os em torno da origem e os em torno da média.

3.2.1 Momentos em torno da origem

A função

$$g(X) = X^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

quando usada na Eq. (3.4) fornece o momento em torno da origem da variável aleatória X. Denotando-se o enésimo momento por m_n, têm-se:

$$m_n = E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx. \tag{3.8}$$

Claramente, $m_0 = 1$, a área sob a função $f_X(x)$ e $m_1 = \overline{X}$, o valor esperado de X.

3.2.2 Momentos centrais

Momentos em torno da média são chamados de *momentos centrais* e são simbolizados por μ_n. São definidos pelo valor esperado da função

$$g(X) = \left(X - \overline{X}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

que é

$$\mu_n = E\left[\left(X - \overline{X}\right)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{X}\right)^n f_X(x) dx. \tag{3.10}$$

O momento $\mu_0 = 1$ é a área sob $f_X(x)$, enquanto $\mu_1 = 0$. (Por quê?).

3.2.3 Variância e distorção (*skew*)

O segundo momento central μ_2 é tão importante que é conhecido por um nome especial: *variância* representada por σ_X^2. Assim, a variância é definida por

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X - \overline{X}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{X}\right)^2 f_X(x) dx. \tag{3.11}$$

A raiz positiva σ_X da variância é chamada de *desvio padrão* de X e é uma medida do espalhamento da função $f_X(x)$ ao redor da média.

A variância pode ser determinada conhecendo-se o primeiro e segundo momento em torno da origem, pois

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right] = E\left[X^2 - 2X\overline{X} + \overline{X}^2\right] = E\left[X^2\right] - 2\overline{X}E[X] + \overline{X}^2 = m_2 - m_1^2 \quad (3.12)$$

O terceiro momento central $\mu_3 = E\left[\left(X-\overline{X}\right)^3\right]$ é uma medida da assimetria de $f_X(x)$ ao redor de $x = \overline{X} = m_1$. É chamada de *distorção* (*skew*) da função densidade. Se uma densidade é simétrica em torno de $x = \overline{X}$, então ela tem distorção zero.

O terceiro momento central normalizado $\frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ é chamado de *coeficiente de distorção* (*skewness*).

Exercício 3.5. *[Peebles, 2000] Seja X uma variável aleatória com a função densidade exponencial do Exercício 3.2. Determine a variância de X.*

Exercício 3.6. *[Peebles, 2000] Ainda para a variável X do exercício anterior,*

a) *Mostre que $\mu_3 = \overline{X^3} - 3\overline{X}\sigma_X^2 - \overline{X}^3$.*

b) *Calcule μ_3 e o coeficiente de distorção.*

Dicas: $\int x^2 e^{mx} dx = e^{mx}\left[\frac{x^2}{m} - \frac{2x}{m^2} + \frac{2}{m^3}\right]$; $\int x^3 e^{mx} dx = e^{mx}\left[\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4}\right]$.

Exercício 3.7. *[Peebles, 2000] Certo medidor é projetado para ler pequenas tensões, porém comete erros por causa de ruídos. Os erros são representados de forma acurada por uma variável aleatória gaussiana com média nula e desvio padrão 10^{-3} V. Quando o nível DC é desconectado, descobre-se que a probabilidade da leitura do medidor ser positiva devido ao ruído é 0,5. Quando a tensão DC é presente, a probabilidade torna-se 0,2514. Qual o nível DC?*

3.3 Funções que fornecem momentos

Podem ser definidas duas funções que permitem que todos os momentos para uma variável aleatória X possam ser calculados. São as funções característica e geradora de momentos.

3.3.1 Função característica

A *função característica* de uma VA X é definida por

$$\Phi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] \tag{3.13}$$

em que $j = \sqrt{-1}$. É uma função do número real $-\infty < \omega < \infty$. Se a Eq. (3.13) for escrita em termos da função densidade, $\Phi_x(\omega)$ pode ser vista como a *transformada de Fourier* (com o sinal de ω invertido) de $f_X(x)$:

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx. \tag{3.14}$$

Assim, se $\Phi_x(\omega)$ é conhecida, $f_X(x)$ pode ser obtida pela *transformada inversa de Fourier* (com o sinal de x trocado)

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \tag{3.15}$$

Pode-se mostrar que diferenciando-se a Eq. (3.14) n vezes em relação a ω e fazendo $\omega = 0$ na derivada, obtém-se o n-ésimo momento de X, ou seja,

$$m_n = (-j)^n \left.\frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} \tag{3.16}$$

Pode-se mostrar também que a magnitude máxima da função característica é unitária e ocorre em $\omega = 0$; isto é

$$|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1 \tag{3.17}$$

Exercício 3.8. *Considere novamente a VA com densidade exponencial do Exercício 3.2 e encontre sua função característica e seu primeiro momento*

3.3.2 Função geradora de momento

Uma outra média estatística fortemente relacionada à função característica é a *função geradora de momento*, definida por

$$M_X(\nu) = E\left[e^{\nu X}\right] \tag{3.18}$$

em que ν é um número real $-\infty < \nu < \infty$. Assim, $M_X(\nu)$ é dado por

$$M_X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{\nu x} dx. \tag{3.19}$$

Os momentos são relaciodos a $M_X(\nu)$ por

$$m_n = \left.\frac{d^n M_X(\nu)}{d\nu^n}\right|_{\nu=0}. \tag{3.20}$$

Exercício 3.9. *Considere a variável exponencial do Exercício 3.2. Calcule sua função geradora de momento e seu primeiro momento.*

3.4 Transformações de uma variável aleatória

Muito frequentemente deseja-se transformar uma VA X em uma nova VA Y por meio de uma transformação

$$Y = T(X). \tag{3.21}$$

Tipicamente, a função densidade $f_X(x)$ ou distribuição $F_X(x)$ é conhecida e o problema é determinar a função densidade $f_Y(y)$ ou distribuição $F_Y(y)$ de Y.

3.4.1 Transformações monotônicas de uma VA contínua

Uma transformação T é chamada de *monotonicamente crescente* se $T(x_1) < T(x_2)$ para qualquer $x_1 < x_2$. Ela é *monotonicamente decrescente* se $T(x_1) > T(x_2)$ para qualquer $x_1 < x_2$.

Considere-se primeiramente a transformação crescente.

Considere-se que Y tenha um valor particular y_0 correspondente a um valor particular x_0 de X como mostrado na Figura 3.1(a). Estes dois números são relacionados por

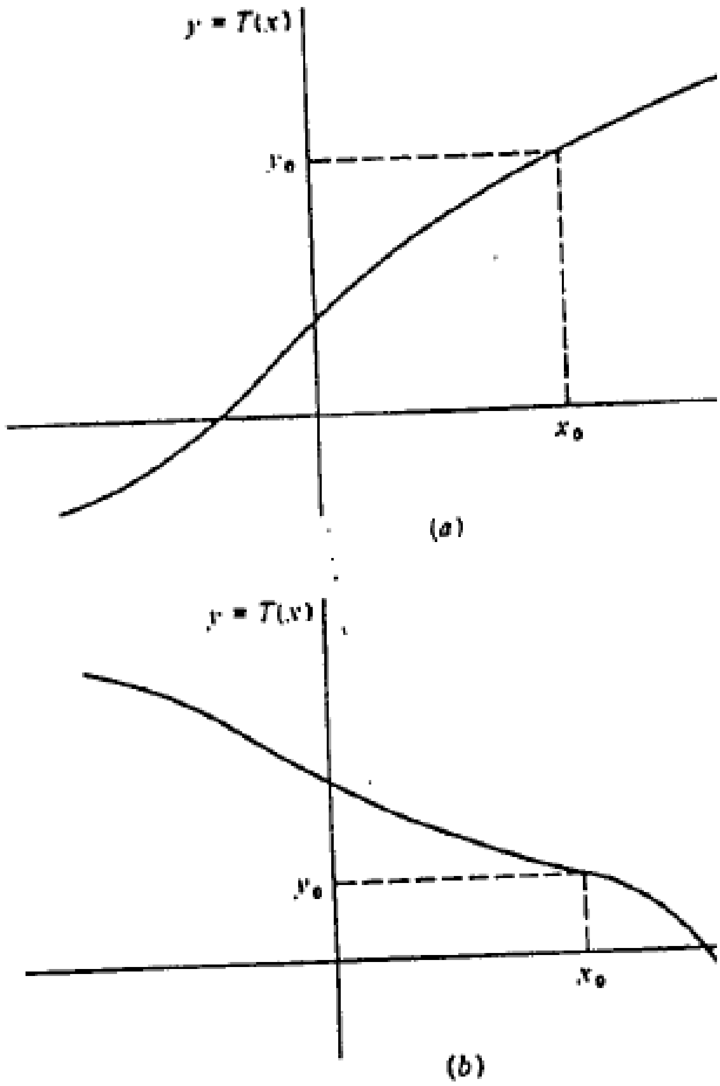

Figura 3.1: Transformações monotônicas.

$$y_0 = T(x_0) \quad ou \quad x_0 = T^{-1}(y_0) \tag{3.22}$$

em que T^{-1} representa a inversa da transformação T. Assim, a probabilidade do evento $\{Y \leq y_0\}$ precisa ser igual à probabilidade do evento $\{X \leq x_0\}$ devido à relação biunívoca entre X e Y. Assim,

$$F_Y(y_0) = P\{Y \leq y_0\} = P\{X \leq x_0\} = F_X(x_0) \tag{3.23}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{y_0} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{x_0=T^{-1}(y_0)} f_X(x)dx. \tag{3.24}$$

A seguir, diferenciamos ambos os lados da Eq. (3.24) com relação a y_0 usando a regra de Leibniz [Peebles, 2000] e chegamos a

$$f_Y(y_0) = f_X\left[T^{-1}(y_0)\right]\frac{dT^{-1}(y_0)}{dy_0}. \tag{3.25}$$

Como este resultado aplica-se a qualquer y_0, podemos eliminar o subescrito e escrever

$$f_Y(y) = f_X\left[T^{-1}(y)\right]\frac{dT^{-1}(y)}{dy}. \tag{3.26}$$

ou, de forma mais compacta,

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}. \tag{3.27}$$

Considerando-se a Figura 3.1(b) para a transformação decrescente, tem-se

$$F_Y(y_0) = P\{Y \leq y_0\} = P\{X \geq x_0\} = 1 - F_X(x_0) \tag{3.28}$$

Uma repetição dos passos que levam à Eq. (3.29) produz novamente a Eq. (3.29) exceto pelo fato de que o membro direito é negativo. No entanto, como a inclinação de $T^{-1}(y)$ também é negativa, podemos concluir que para qualquer dos tipos de transformação monotônica

$$f_Y(y) = f_X\left[T^{-1}(y)\right]\left|\frac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|. \tag{3.29}$$

ou simplesmente

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| . \tag{3.30}$$

Exercício 3.10. *Seja X uma VA gaussiana com parâmetros a_X e σ_X e seja $Y = T(X) = aX + b$. Determine a FDP de Y. A VA Y é gaussiana?*

3.4.2 Transformações não-monotônicas de uma VA contínua

Uma transformação pode não ser monotônica em um caso mais geral. A Figura 3.2 ilustra uma transformação deste tipo.

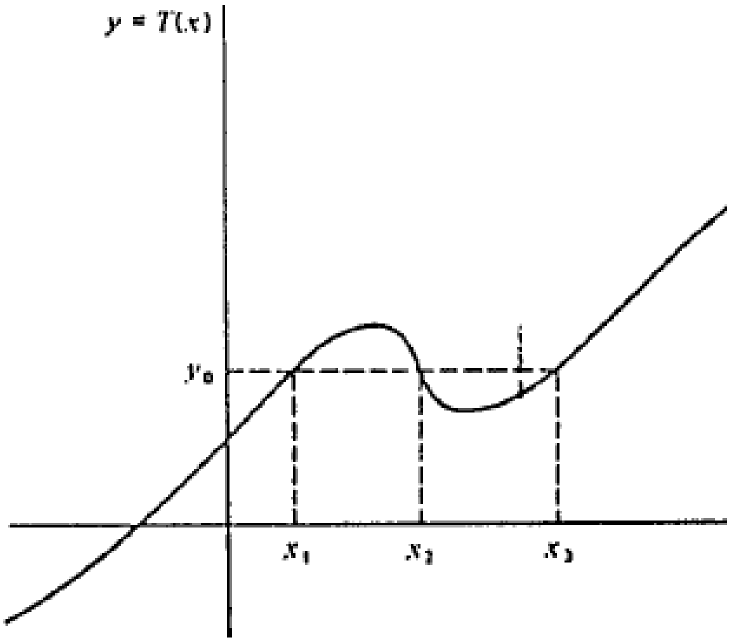

Figura 3.2: Transformação não-monotônicas.

Para o valor de y_0 mostrado na figura, o evento $\{Y \leq y_0\}$ corresponde ao evento $\{X \leq x_1 \text{ e } x_2 \leq X \leq x_3\}$. Assim, a probabilidade do evento $\{Y \leq y_0\}$ iguala-se à probabilidade do evento $\{\text{valores de } x \text{ que geram } Y \leq y_0\}$. Em outras palavras

$$F_Y(y_0) = P\{Y \leq y_0\} = P\{x|Y \leq y_0\} = \int_{(x|Y \leq y_0)} f_X(x)dx \tag{3.31}$$

Pode-se então diferenciar para obter-se FDP de Y:

$$f_Y(y_0) = \frac{d}{dy_0}\int_{(x|Y\leq y_0)} f_X(x)dx \tag{3.32}$$

Exercício 3.11. *Uma tensão aleatória X é aplicada a um sistema com relação entrada-saída*

$$Y = T(X) = cX^2. \tag{3.33}$$

com $c > 0$. Encontre a FDP de Y em função da FDP de X, $f_X(x)$.

3.4.3 Transformação de uma variável aleatória discreta

Neste caso,

$$f_X(x) = \sum_n P(x_n)\,\delta(x - x_n) \tag{3.34}$$

$$F_X(x) = \sum_n P(x_n)\,u(x - x_n) \tag{3.35}$$

em que a soma é tomada de forma a incluir todos os possíveis valores x_n, $n = 1, 2, \ldots$, de X.

Se a transformação for monotônica, existe uma correspondência biunívoca entre X e Y de forma que o conjunto $\{y_n\}$ corresponde ao conjunto $\{x_n\}$ pela equação $y_n = T(x_n)$. A probabilidade $P(y_n)$ iguala-se a $P(x_n)$. Assim,

$$f_Y(y) = \sum_n P(y_n)\,\delta(y - y_n) \tag{3.36}$$

$$F_Y(y) = \sum_n P(y_n)\,u(y - y_n) \tag{3.37}$$

em que

$$y_n = T(x_n) \tag{3.38}$$

$$P(y_n) = P(x_n). \tag{3.39}$$

Se T não for monotônica, o procedimento acima continua válido exceto que existe agora a possibilidade de mais de um valor de x_n corresponder a um valor y_n. Neste caso, $P(y_n)$ será igual à soma das probabilidades dos vários x_n para os quais $y_n = T(x_n)$.

3.5 Geração computacional de uma variável aleatória

Nesta seção descreve-se resumidamente como gerar uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidades especificada, dado que um computador é capaz de gerar números aleatórios que são valores de uma VA com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$

Da Eq. 3.23, temos:

$$F_Y[y = T(x)] = F_X(x). \tag{3.40}$$

Mas para X uniforme, $F_X(x) = x$ para $0 < x < 1$, da Eq. (2.14). Assim, resolvendo para a inversa da Eq. (3.40) chega-se a

$$y = T(x) = F_Y^{-1}(x),\ 0 < x < 1. \tag{3.41}$$

A Eq. (3.41) é o principal resultado desta seção. Ele afirma que, dada uma distribuição específica $F_Y(y)$ para Y, podemos encontrar uma função inversa resolvendo $F_Y(y) = x$ para y. Este resultado é $T(x)$.

Exercício 3.12. *Encontre a transformação necessária para gerar uma variável aleatória de Rayleigh da Eq. (2.24) com $a = 0$ a partir de um VA uniforme no intervalo $(0, 1)$.*

Exercício 3.13. *Um programa de computador gera números aleatórios com distribuição aleatória no intervalo $(0, 1)$. Encontre a transformação necessária para gerar números com distribuição arco-seno dada por*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), & -a \leq x < a \\ 1, & a \leq x < \infty \end{cases} \tag{3.42}$$

Exercício 3.14. *Faça um programa Matlab® que gere 100 números aleatórios com distribuição uniforme. A partir destes números gere 100 números com distribuição de Rayleigh com* $a = 0$ *e* $b = 1$*. Faça histogramas das duas distribuições.*

Capítulo 4

Múltiplas Variáveis Aleatórias

Neste capíutlo, estende-se a teoria para incluir duas variáveis aleatórias na descrição de um fenômeno. Como exemplo, pode-se pensar nas coordenadas de um ponto aleatório num plano.

4.1 Variáveis aleatórias vetoriais

Suponha que duas variáveis aleatórias X e Y sejam definidas num espaço de amostras S em que valores específicos de X e Y são denotados por x e y respectivamente. Então, qualquer par ordenado de números (x, y) pode ser convenientemente considerado como um ponto aleatório no plano xy. O ponto pode ser tomado como o valor específico de uma variável aleatória vetorial ou um vetor aleatório. A Figura 4.1 ilustra o mapeamento envolvido em ir de S para o plano xy.

4.2 Distribuição conjunta e suas propriedades

As probabilidades dos eventos

$$A = \{X \leq x\} \tag{4.1}$$

$$B = \{Y \leq y\} \tag{4.2}$$

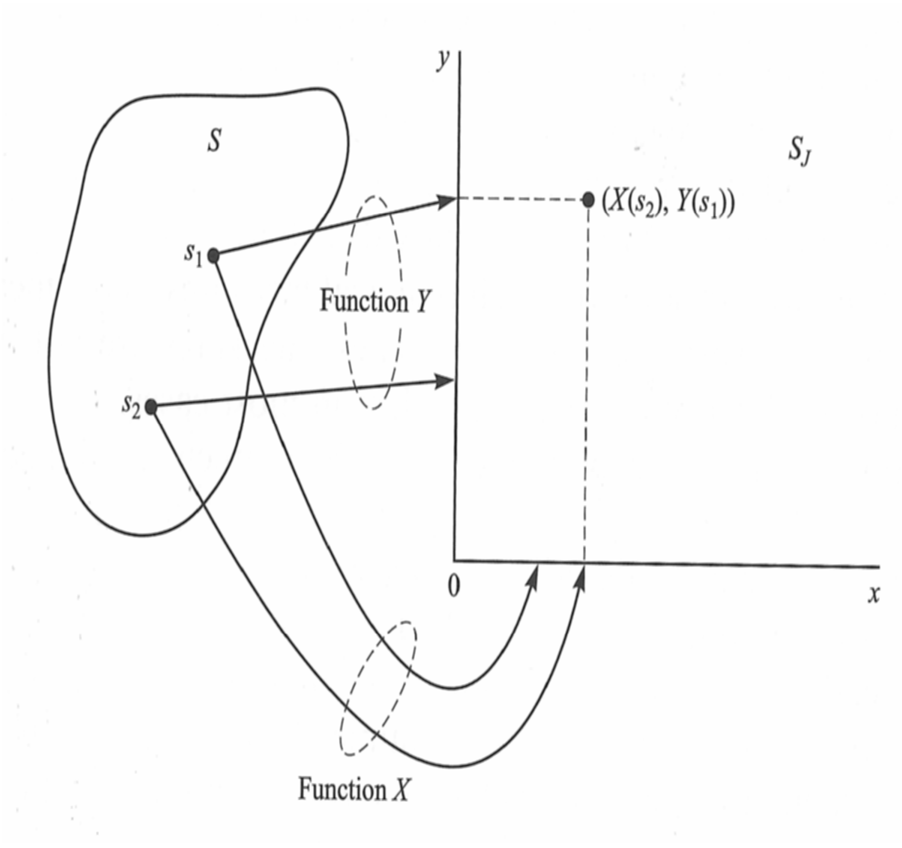

Figura 4.1: Mapeamento do espaço das amostras S para o plano xy [Peebles, 2000].

já foram definidas como funções de x e y respectivamente e chamadas de funções distribuição de probabilidades. Ou seja,

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \tag{4.3}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}. \tag{4.4}$$

É introduzido agora um novo conceito para incluir a probabilidade do evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$.

4.2.1 Função distribuição conjunta

Define-se a probabilidade do evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$, que é uma função dos números x e y como uma *função distribuição de probabilidades conjunta* e a denota-se pelo símbolo $F_{X,Y}(x, y)$. Assim,

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}. \tag{4.5}$$

Repare que $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P(A \cap B)$, em que o evento $A \cap B$ foi definido em S.

Exercício 4.1. *Assuma que o espaço das amostras S tenha apenas três elementos possíveis: $(1, 1)$, $(2, 1)$ e $(3, 3)$. As probabilidades destes elementos são $P(1, 1) = 0{,}2$, $P(2, 1) = 0{,}3$ e $P(3, 3) = 0{,}5$. Encontre $F_{X,Y}(x, y)$.*

Resposta indicada na Figura 4.2.

4.2.2 Propriedades da distribuição conjunta

A partir da definição da Eq. (4.5), chega-se às seguintes propriedades cuja demonstração é deixada como exercício ao leitor interessado.

a) $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$

b) $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$, $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$, $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$

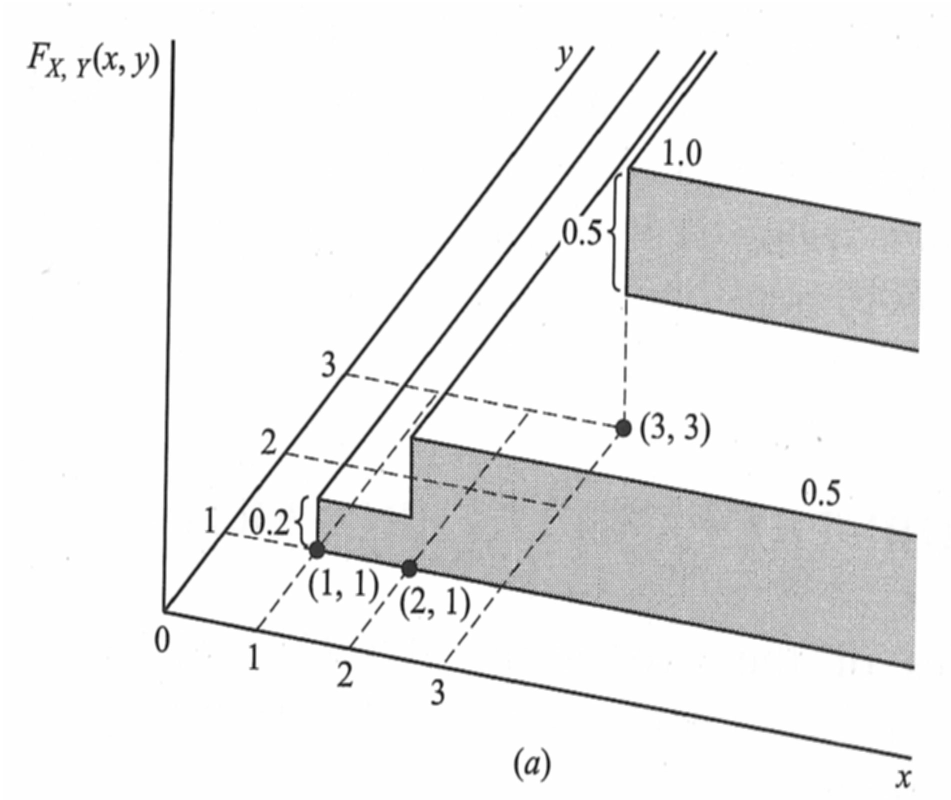

Figura 4.2: Função distribuição conjunta do Exercício 4.1 [Peebles, 2000].

c) $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$

d) $F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x)$, $F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y)$

e) $F_{X,Y}(x, y)$ é uma função não-decrescente de x e y

f) $F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) = P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}$

4.2.3 Funções de distribuição marginal

A Propriedade (d.*d*) anterior afirma que a função distribuição de uma variável aleatória pode ser obtida fazendo o valor da outra variável aleatória ser infinito em $F_{X,Y}(x, y)$. As funções $F_X(x)$ ou $F_Y(y)$ obtidas desta forma são chamadas de *funções de distribuição marginal*.

Exercício 4.2. *Encontre expressões explícitas para as distribuições marginais do Exercício 4.1.*

4.3 Densidade conjunta e suas propriedades

Da mesma forma como foi feito para as variáveis aleatórias isoladas, define-se a seguir a função densidade conjunta.

4.3.1 Função densidade conjunta

Para duas variáveis aleatórias X e Y, a *função densidade de probabilidade conjunta*, denotada por $f_{X,Y}(x,y)$ é definida como a segunda derivada da função distribuição conjunta onde quer que ela exista. Ou seja,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{4.6}$$

4.3.2 Propriedades da densidade conjunta

A partir da definição da Eq. (4.6), chega-se às seguintes propriedades cuja demonstração é deixada como exercício ao leitor interessado.

a) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$

c) $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2$

d) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_2 d\xi_1$ e $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2$

e) $P\{x_1 < X \leq x_2,\, y_1 < Y \leq y_2\} = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x,y)dxdy$

f) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

As Propriedades (a.*a*) e (b.*b*) podem ser usadas para testar se uma dada função pode ser uma função densidade válida.

Exercício 4.3. *Seja b uma constante positiva. Determine seu valor para que a função*

$$g(x,y) = \begin{cases} be^{-x}\cos y, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.7}$$

seja uma função densidade de probabilidade válida.

4.3.3 Função densidade marginal

As funções $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ da Propriedade (f.f) são chamadas de *funções densidade de probabilidade marginal* ou apenas *funções densidade marginal.* São as funções densidades das variáveis simples X e Y definidas como as derivadas das funções distribuição marginais, ou seja,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{4.8}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \tag{4.9}$$

Exercício 4.4. *As tensões X e Y foram medidas em volts em dois pontos diferentes de um circuito elétrico. Encontre $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ se a função densidade de probabilidade conjunta dessas tensões é dada por*

$$f_{X,Y}(x, y) = u(x)u(y)xe^{-x(y+1)}. \tag{4.10}$$

4.4 Densidade e distribuição condicional

A função distribuição condicional de uma variável aleatória X, dado algum evento B com probabilidade não-nula é definida por [Peebles, 2000]

$$F_X(x|B) = P\left(\{X \leq x|B\}\right) = \frac{P\left(\{X \leq x \cap B\}\right)}{P(B)}. \tag{4.11}$$

A função densidade condicional correspondente é definida através da derivada

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}. \tag{4.12}$$

4.4.1 Densidade e distribuição condicional - condição pontual

Pode-se mostrar [Peebles, 2000] que, para variáveis discretas, vale

$$f_X\left(x|Y=y_k\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P\left(x_i,y_k\right)}{P\left(y_k\right)}\delta\left(x-x_i\right). \tag{4.13}$$

Já para o caso contínuo,

$$f_X(x|Y=y)=f(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{4.14}$$

Exercício 4.5. *Encontre $f_Y(y|x)$ para a função densidade definida no Exercício 4.4.*

4.5 Independência Estatística

Dois eventos A e B foram definidos como independentes se (e somente se)

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B). \tag{4.15}$$

Da mesma forma, define-se que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se:

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y) \tag{4.16}$$

ou, de forma equivalente,

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y). \tag{4.17}$$

Usando a densidade e a distribuição condicionais, mostra-se que se duas variáveis aleatórias X e Y forem independentes, vale:

$$f_X(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x) \tag{4.18}$$

$$f_Y(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_X(x)}=f_Y(y). \tag{4.19}$$

Assim, as densidades deixam de ser condicionais e tornam-se iguais às marginais.

Exercício 4.6. *Verifique se as tensões do Exercício 4.4 são independentes.*

Exercício 4.7. *A densidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\cos^2\left(\frac{\pi}{2}xy\right), & -1 < x < 1 \text{ e } -1 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.20}$$

em que $k = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi + Si(\pi)} \approx 0{,}315$ *e o seno integral é definido por*

$$Si(x) = \int_0^x \frac{sin(\xi)}{\xi} d\xi. \tag{4.21}$$

Determine se X e Y são independentes.

4.6 Distribuição e densidade de uma soma de variáveis aleatórias

O problema de encontrar as funções distribuição e densidade de uma soma de VAs *estatisticamente independentes* é considerado nesta seção.

4.6.1 Soma de duas variáveis aleatórias

Seja W uma VA igual à soma de duas VAs independentes X e Y:

$$W = X + Y \tag{4.22}$$

A função distribuição de probabilidades que procuramos é definida por

$$F_W(w) = P\{W \leq w\} = P\{X + Y \leq w\} \tag{4.23}$$

A Figura 4.3 ilustra a região do plano em que $x + y \leq w$.

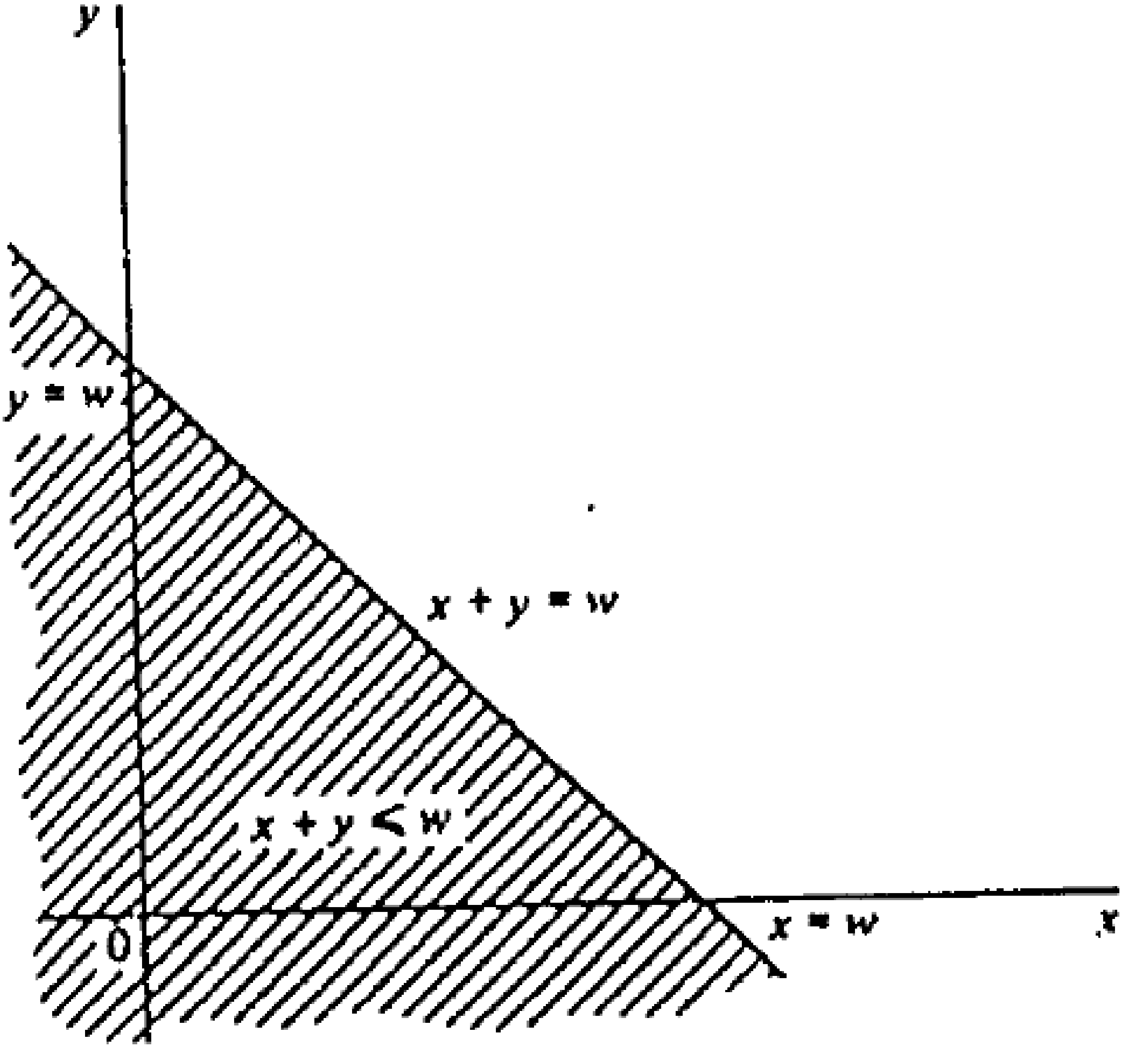

Figura 4.3: Região do plano xy em que $x + y \leq w$. [Peebles, 2000].

Assim,

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{w-y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{4.24}$$

e usando a Eq. (4.17),

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy \int_{x=-\infty}^{w-y} f_X(x)dx \tag{4.25}$$

Diferenciando a Eq. 4.25 e usando a regra de Leibniz chega-se à função densidade desejada

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(w-y)dy. \tag{4.26}$$

Esta expressão é uma integral de convolução. Consequentemente, mostrou-se que a *função densidade da soma de duas variáveis aleatórias estatísticamente independentes é a convolução das suas densidades individuais.*

Exercício 4.8. *Calcule a densidade de $W = X + Y$ em que as densidades de X e Y são, respectivamente,*

$$f_X(x) = \frac{1}{a}\left[u(x) - u(x-a)\right] \tag{4.27}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}\left[u(y) - u(y-b)\right] \tag{4.28}$$

com $0 < a < b$.

4.6.2 Soma de diversas variáveis aleatórias

Quando deseja-se considerar a soma Y de N variáveis aleatórias X_1, X_2, ..., X_N, pode-se extender os resultados acima. Continuando o processo encontra-se que a função densidade de $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ é a convolução das funções densidade individuais:

$$f_Y(y) = f_{X_N}(x_N) * f_{X_{N-1}}(x_{N-1}) * \cdots * f_{X_1}(x_1). \tag{4.29}$$

4.7 Teorema do Limite Central

De forma geral, o *teorema do limite central* diz que a função distribuição de probabilidades da soma de um grande número de VAs aproxima-se de uma distribuição gaussiana.

Seja $\bar{X}_i$ e $\sigma^2_{X_i}$ as médias e variâncias, respectivamente, de N variáveis aleatórias X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ que podem ter densidades de probabilidade arbitrárias. O teorema do limite central estabelece que a soma $Y_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, que tem média $\bar{Y_N} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \cdots + \bar{X}_N$ e variância $\sigma^2_Y = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \cdots + \sigma^2_{X_N}$ tem uma distribuição de probabilidade que se aproxima de uma gaussiana para $N \to \infty$.

A importância prática do teorema do limite central não reside tanto na exatidão da distribuição gaussiana quando $N \to \infty$ porque a variância de Y_N torna-se infinita, mas sim no fato de que Y_N para N *finito* ter distribuição muito próxima de uma gaussiana.

Exercício 4.9. *Use o Matlab® para traçar histogramas da variável aleatória* $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$*, sendo que cada uma das VAs* X_i *tem distribuição uniforme no intervalo* $[0, 1]$*. Veja o que ocorre para diversos valores de* N*.*

Capítulo 5

Operações sobre múltiplas variáveis aleatórias

Nessa seção, estende-se o conceito de valor esperado para o caso de duas ou mais variáveis aleatórias.

5.1 Valor esperado de uma função de variáveis aleatórias

O valor esperado de uma função de uma variável aleatória foi definido na Seção 3.1 por

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{5.1}$$

Quando mais de uma variável aleatória é envolvida, o valor esperado deve ser tomado em relação a todas as variáveis envolvidas. Por exemplo, se $g(X, Y)$ é uma função de duas variáveis aleatórias X e Y, o valor esperado de $g(.,.)$ é dado por

$$\overline{g} = E\left[g(X, Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy. \tag{5.2}$$

Para N variáveis aleatórias X_1, X_2, $\ldots$, X_N e uma função dessas variáveis denotada por

$g(X1, \ldots, X_N)$, o valor esperado dessa função se torna:

$$\overline{g} = E\left[g(X_1, \ldots, X_N)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_N) f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_N. \quad (5.3)$$

Um resultado que segue diretamente da definição acima é que o *valor esperado de uma soma ponderada de variáveis aleatórias*

$$g\left(X_1, \ldots, X_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i \quad (5.4)$$

é a soma ponderada de seus valores médios:

$$\overline{g} = E\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i E\left[X_i\right] \quad (5.5)$$

5.1.1 Momentos conjuntos em torno da origem

Uma importante aplicação do valor esperado é na definição de *momentos conjuntos* em torno da origem. Eles são denotados por m_{nk} e são definidos por

$$m_{nk} = E\left[X^n Y^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (5.6)$$

para o caso de duas variáveis aleatórias X e Y.

Claramente, $m_{n0} = E\left[X^n\right]$ são os momentos m_n de X e $m_{0k} = E\left[Y^k\right]$ são os momentos de Y.

A soma $n + k$ é chamada de *ordem* dos momentos. Assim, m_{02}, m_{20} e m_{11} são todos momentos de segunda ordem de X e Y.

Os momentos de primeira ordem $m_{01} = E[Y] = \overline{Y}$ e $m_{10} = E[X] = \overline{X}$ são os valores esperados de X e Y respectivamente e são as coordenadas do "centro de gravidade" da função $f_{X,Y}(x, y)$.

O momento de segunda ordem $m_{11} = E[XY]$ é chamado de *correlação* de X e Y. Ele é tão importante que recebe um símbolo especial R_{XY}. Assim,

$$R_{XY} = m_{11} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy. \tag{5.7}$$

Se a correlação puder ser escrita na forma

$$R_{XY} = E[X] \cdot E[Y], \tag{5.8}$$

então X e Y são ditas *não-correlacionadas*.

A independência estatística de X e Y é suficiente para garantir que elas são não-correlacionadas. Porém, o contrário não é verdade em geral. Ou seja, *independência implica não-correlação, mas não-correlação não implica independência*.

Se $R_{XY} = 0$ as variáveis X e Y são ditas *ortogonais*. Resumindo:

- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X$ e Y são independentes
- $R_{XY} = E[X] \cdot E[Y] \Rightarrow X$ e Y são não-correlacionadas
- $R_{XY} = 0 \Rightarrow X$ e Y são ortogonais
- X e Y são independentes $\Rightarrow X$ e Y são não-correlacionadas

Exercício 5.1. *Seja X uma variável aleatória com valor médio $\overline{X} = E[X] = 3$ e variância $\sigma_X^2 = 2$ e uma outra variável Y dada por $Y = -6X + 22$. Pede-se:*

a) $E[X^2]$

b) $\overline{Y}$

c) R_{XY}

d) *as variáveis são correlacionadas?*

e) *as variáveis são ortogonais?*

5.1.2 Momentos conjuntos centrais

Uma outra aplicação importante da definição de valores esperado é a definição de *momentos centrais conjuntos*. Para duas variáveis aleatórias X e Y, estes momentos denotados por $\mu_{n,k}$ são dados por:

$$\mu_{nk} = E\left[\left(X-\overline{X}\right)^n\left(Y-\overline{Y}\right)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\overline{X}\right)^n\left(y-\overline{Y}\right)^k f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{5.9}$$

Os momentos centrais de segunda ordem

$$\mu_{20} = E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right] = \sigma_X^2 \tag{5.10}$$

$$\mu_{02} = E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)^2\right] = \sigma_Y^2 \tag{5.11}$$

$$\tag{5.12}$$

são as variâncias de X e Y.

O momento conjunto de segunda ordem μ_{11} é muito importante. É chamado de *co-variância* de X e Y é simbolizado por C_{XY}. Assim,

$$C_{XY} = \mu_{11} = E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\overline{X}\right)\left(y-\overline{Y}\right) f_{X,Y}(x,y)dxdy. \tag{5.13}$$

Expandindo-se o produto $\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)$ esta integral se reduz a

$$C_{XY} = R_{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y} = R_{XY} - E[X]\cdot E[Y] \tag{5.14}$$

Se X e Y forem independentes ou não-correlacionadas, então $R_{XY} = E[X]\cdot E[Y]$ e $C_{XY} = 0$. Se X e Y forem ortogonais, então $C_{XY} = -E[X]\cdot E[Y]$. Claramente, $C_{XY} = 0$ se X ou Y também tiverem média nula além de serem ortogonais.

O momento de segunda ordem normalizado

$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{5.15}$$

é conhecido como *coeficiente de correlação* de X e Y. Pode-se mostrar [Peebles, 2000] que $-1 \leq \rho \leq 1$.

Uma aplicação direta das definições acima é que se X é uma soma ponderada de variáveis aleatórias X_i, $X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i$, então

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{X_i} \tag{5.16}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_{X_i}^2. \tag{5.17}$$

Exercício 5.2. *[Peebles, 2000] Num sistema de controle, sabe-se que uma tensão aleatória X tem média $\overline{X} = m_1 = -2\,V$ e momento de segunda ordem $\overline{X^2} = m_2 = 9\mathrm{V}^2$. Se a tensão X é amplificada por um amplificador que fornece como saída $Y = -1{,}5X + 2$, encontre σ_X^2, $\overline{Y}$, $\overline{Y^2}$, σ_Y^2 e R_{XY}.*

5.2 Funções características conjuntas

A *função característica conjunta* de duas VAs X e Y é definida por

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = E\left[e^{j\omega_1 X + j\omega_2 Y}\right] \tag{5.18}$$

em que ω_1 e ω_2 são números reais. Uma forma equivalente é

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) e^{j\omega_1 x + j\omega_2 y} dx dy. \tag{5.19}$$

Esta expressão é a transformada de Fourier bidimensional (com os sinais de ω_1 e ω_2 trocados) [Oppenheim, 2010].

Fazendo $\omega_2 = 0$ ou $\omega_1 = 0$ na Eq. (5.19), a função característica de X ou Y é obtida, respectivamente. São as chamadas *funções características marginais*:

$$\Phi_X(\omega_1) = \Phi_{X,Y}(\omega_1, 0) \tag{5.20}$$

$$\Phi_Y(\omega_2) = \Phi_{X,Y}(0, \omega_2) \tag{5.21}$$

Os momentos conjuntos m_{nk} podem ser encontrados a partir da função característica conjunta por:

$$m_{nk} = (-j)^{n+k} \left.\frac{\partial^{n+k}\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2)}{\partial\omega_1^n \partial\omega_2^k}\right|_{\omega_1=0,\omega_2=0} \tag{5.22}$$

Esta expressão é a generalização bidimensional da Eq. (3.16).

Exercício 5.3. *Duas variáveis aleatórias X e Y tem função característica conjunta*

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = \exp\left(-2\omega_1^2 - 8\omega_2^3\right) \tag{5.23}$$

Mostre que X e Y têm média nula é que elas são não correlacionadas.

5.3 Variáveis aleatórias gaussianas conjuntas

Variáveis aleatórias gaussianas são muito importantes porque aparecem praticamente em todas as áreas da Engenharia e das Ciências. Nesta seção o caso de duas variáveis aleatórias conjuntas gaussianas é examinado.

Duas variáveis aleatórias X e Y são são ditas conjuntamente gaussianas se sua função densidade conjunta é

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\left(x-\overline{X}\right)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho\left(x-\overline{X}\right)\left(y-\overline{Y}\right)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{\left(y-\overline{Y}\right)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\} \tag{5.24}$$

em que $\overline{X} = E[X]$, $\overline{Y} = E[Y]$, $\sigma_X^2 = E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right]$, $\sigma_Y^2 = E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)^2\right]$ e $\rho = E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right] = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$.

A Figura 7.2 mostra um gráfico da função densidade gaussiana bidimensional. Seu máximo ocorre em $(\overline{X}, \overline{Y})$.

Da Eq. (5.24), se $\rho = 0$, correspondendo a variáveis não-correlacionadas, $f_{XY}(x, y)$ pode ser reescrita como

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{5.25}$$

em que $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são as densidades marginais de X e Y e dadas por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}} \tag{5.26}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\overline{Y})^2}{2\sigma_Y^2}}. \tag{5.27}$$

Assim, conclui-se que *quaisquer variáveis aleatórias gaussianas não-correlacionadas são independentes.*

Exercício 5.4. *Sejam duas variáveis aleatórias gaussianas X e Y com médias $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 e coeficiente de correlação ρ. Determine o ângulo θ tal que as variáveis*

$$A = X \cos\theta + Y \sin\theta \tag{5.28}$$

$$B = -X \sin\theta + Y \cos\theta \tag{5.29}$$

sejam independentes.

Exercício 5.5. *[Peebles, 2000] Suponha que a queda de neve anual (quantidade de neve acumulada em metros) em dois hotéis de esqui alpinos vizinhos seja representada por variáveis aleatórias gaussianas conjuntas X e Y para as quais $\rho = 0{,}82$, $\sigma_X = 1{,}5m$, $\sigma_Y = 1{,}2m$ e $R_{XY} = 81{,}476\mathrm{m}^2$. Se a queda de neve média no primeiro hotel é 10m, qual a taxa de queda média no outro hotel?*

Exercício 5.6. *[Ziemer and Tranter, 2014] Duas variáveis aleatórias X e Y têm medias e variâncias dadas por $m_X = 2$, $\sigma_X^2 = 3$, $m_Y = 1$ e $\sigma_Y^2 = 5$. Uma nova variável aleatória Z é*

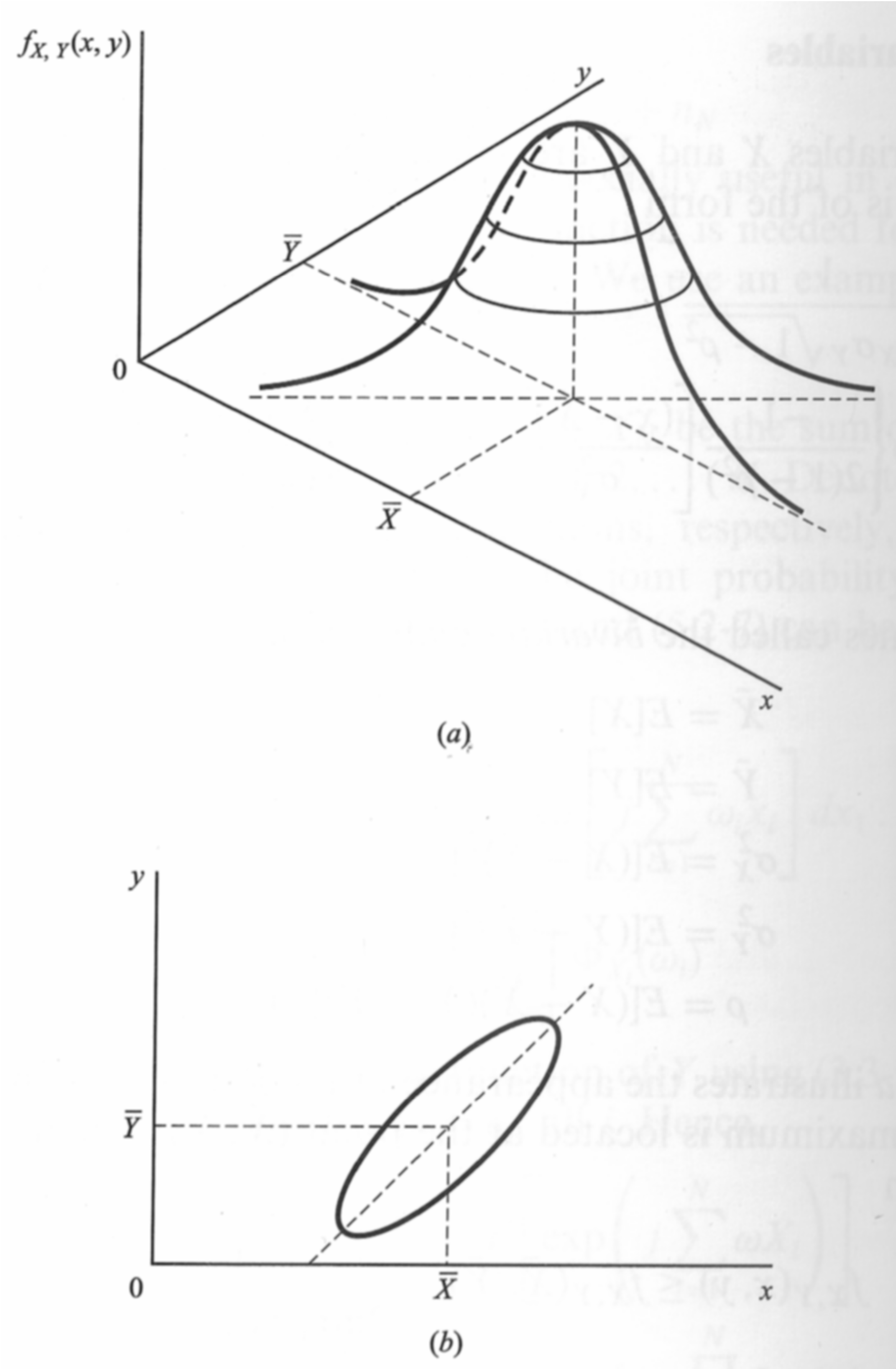

Figura 5.1: Densidade gaussiana bidimensional [Peebles, 2000].

definida por

$$Z = 3X - 4Y. \tag{5.30}$$

Determine a média e a variância de Z se o coeficiente de correlação entre X e Y é $\rho_{XY} = 0{,}6$.

5.4 Transformações de múltiplas variáveis aleatórias

Deseja-se encontrar a função densidade conjunta de um conjunto de novas VAs

$$Y_i = T_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_N\right), \;\; i = 1, 2, \ldots, N \tag{5.31}$$

definido pelas transformações T_i.

Assume-se que as novas VAs Y_i dadas pela Eq. 5.31 são produzidas por funções contínuas tendo derivadas parciais contínuas em todos os pontos. Assume-se também que um conjunto de funções inversas T_j^{-1} existe tal que as antigas variáveis podem ser expressas como funções contínuas das novas variáveis:

$$X_j = T_j^{-1}\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\right), \;\; j = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.32}$$

O jacobiano é o determinante de uma matriz de derivadas definido como

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial T_1^{-1}}{\partial Y_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_N^{-1}}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial T_N^{-1}}{\partial Y_N} \end{vmatrix} \tag{5.33}$$

Com esta definição, pode-se mostrar que

$$f_{Y_1,\ldots,Y_N}\left(y_1, \ldots, y_N\right) = f_{X_1,\ldots,X_N}\left(x_1 = T_1^{-1}\left(y_1\right), \ldots, x_N = T_N^{-1}\left(y_N\right)\right)|J| \tag{5.34}$$

Quando $N = 1$, a Eq. (5.34) reduz-se à Eq. (3.30) previamente deduzida para uma única variável.

Exercício 5.7. *Sejam as transformações lineares dadas por*

$$Y_1 = T_1(X_1, X_2) = aX_1 + bX_2 \tag{5.35}$$

$$Y_2 = T_2(X_1, X_2) = cX_1 + dX_2. \tag{5.36}$$

Encontre $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ *em função de* $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$

5.5 Transformações lineares de variáveis aleatórias gaussianas

A Eq. (5.31) pode ser diretamente aplicada ao problema de transformar linearmente um conjunto de VAs gaussianas X_1, X_2,..., X_N para o qual a densidade conjunta gaussiana se aplica. As novas variáveis Y_1, Y_2,..., Y_N são

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1N}X_N \tag{5.37}$$

$$Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2N}X_N \tag{5.38}$$

$$\vdots \tag{5.39}$$

$$Y_N = a_{N1}X_1 + a_{N2}X_2 + \cdots + a_{NN}X_N \tag{5.40}$$

em que os coeficientes a_{ij} e $j = 1, 2, \ldots, N$ são números reais. Definimos a matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

Pode-se mostrar [Peebles, 2000] que as novas variáveis Y_1, Y_2, ..., Y_N são conjuntamente gaussianas. Ou seja, uma transformação linear de VAs gaussianas produz VAs gaussianas.

Pode-se mostrar também [Peebles, 2000] que estas novas variáveis têm médias

$$\bar{Y}_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\bar{X}_k \tag{5.42}$$

e co-variâncias dadas pelos elementos da matrix de covariância

$$[C_Y] = [T][C_X][T]^t. \tag{5.43}$$

As matrizes de co-variância tem elementos C_{ij} definidos por

$$C_{ij} = E\left[\left(X_i - \bar{X}_i\right)\left(X_j - \bar{X}_j\right)\right] = \begin{cases} \sigma_{X_i}^2, & i = j \\ C_{X_iX_j}, & i \neq j \end{cases} \tag{5.44}$$

Exercício 5.8. *Duas VAs gaussianas X_1 e X_2 têm médias nulas e variâncias $\sigma_{X_1}^2 = 4$ e $\sigma_{X_2}^2 = 9$. Sua co-variância $C_{X_1X_2}$ é igual a 3. Se X_1 e X_2 são linearmente transformadas em novas variáveis Y_1 e Y_2 de acordo com*

$$Y_1 = X_1 - 2X_2 \tag{5.45}$$

$$Y_2 = 3X_1 + 4X_2 \tag{5.46}$$

calcule as médias, variâncias e co-variância de Y_1 e Y_2.

5.6 Geração computacional de múltiplas variáveis aleatórias

Para gerar computacionalmente algumas VAs pode ser necessário usar mais de uma distribuição uniforme inicial, como feito na Seção 3.5.

Por exemplo, duas VAs gaussianas independentes com médias nulas e variância unitária podem ser geradas pelas transformações

$$Y_1 = T_1(X_1, X_2) = \sqrt{-2\ln(X_1)}\cos(2\pi X_2) \tag{5.47}$$

$$Y_2 = T_2(X_1, X_2) = \sqrt{-2\ln(X_1)}\sin(2\pi X_2) \tag{5.48}$$

$$\tag{5.49}$$

Variáveis gaussianas com variâncias quaisquer $\sigma^2_{W_1}$ e $\sigma^2_{W_2}$ e coeficiente de correlação ρ_W podem ser geradas a partir de Y_1 e Y_2 usando as transformações [Peebles, 2000]

$$W_1 = \sigma_{W_1} Y_1 \tag{5.50}$$

$$W_2 = \rho_w \sigma_{W_2} Y_1 + \sigma_{W_2}\sqrt{1-\rho^2_W}Y_2. \tag{5.51}$$

Exercício 5.9. *Usando o Matlab®,*

a) *gere* $N = 10000$ *amostras de duas VAs uniformes no intervalo* $(0, 1)$. *Esboce seus histogramas;*

b) *a partir destas VAs, gere duas VAs gaussianas com média nula e variância unitária. Esboce seus histogramas;*

c) *a partir do resultado do item anterior, gere duas VAs* W_1 *e* W_2 *com* $\sigma^2_{W_1} = 4$ *e* $\sigma^2_{W_2} = 9$ *e coeficiente de correlação* $\rho_W = -0.4$*; esboce o histograma delas;*

d) *para confirmar a qualidade das VAs geradas, estime suas médias, variâncias e coeficiente de correlação usando as estimações*

$$\widehat{\bar{W}_i} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} w_{in} \tag{5.52}$$

$$\widehat{\sigma^2_{W_i}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(w_{in} - \widehat{\bar{W}_i}\right)^2 \tag{5.53}$$

$$\widehat{\rho_W} = \frac{\left(\widehat{\sigma^2_{W_1}}\widehat{\sigma^2_{W_2}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(w_{1n} - \widehat{\bar{W}_1}\right)\left(w_{2n} - \widehat{\bar{W}_2}\right) \tag{5.54}$$

5.7 Amostragem e alguns teoremas sobre limites

Para quantificar os problemas associados às medidas práticas de uma VA, considere o problema de medir a tensão média (dc) de uma tensão ruidosa aleatória. Suponha que tome-se uma sequência de N amostras em um período de tempo em que se assume que as propriedades estatísticas da fonte permanecem inalteradas. Cada amostra pode ser considerada como o valor de uma de N variáveis aleatórias estatísticamente independentes X_n, todas tendo mesma distribuição de probabilidades. Assim, elas tem mesma média $\bar{X}$ e variância σ_X^2

Se queremos estimar (ou medir) a média da tensão ruidosa, a intuição leva a obter a média dos valores medidos:

$$\widehat{\bar{X}_N} = \text{estimativadamédiade} N \text{amostras} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_n. \tag{5.55}$$

Esta equação é uma função do conjunto específico de amostras $\{x_n\}$; ela fornece um número que chamamos de uma *estimativa* ou medida da média da VA.

Uma pergunta importante é: quão bom é esta estimativa? Para responder, podemos calcular o valor esperado e a variância do estimador.

$$E\left[\widehat{\bar{X}_N}\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[X_n\right] = \bar{X}, \quad \forall N. \tag{5.56}$$

Qualquer estimador (função de mensuração) para o qual a média iguala a quantidade sendo estimada é chamado de *não-enviesiado*.

Para a variância

$$\sigma_{X_N}^2 = E\left[\left(\widehat{\bar{X}_N} - \bar{X}\right)^2\right] = E\left[\widehat{\bar{X}_N}^2 - 2\bar{X}\widehat{\bar{X}_N} + \bar{X}^2\right] \tag{5.57}$$

$$= E\left[\widehat{\bar{X}_N}^2\right] - \bar{X}^2 = -\bar{X}^2 + E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} X_m\right] \tag{5.58}$$

$$= -\bar{X}^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} E\left[X_n X_m\right] \tag{5.59}$$

Mas, pela independência, $E[X_n X_m] = E[X^2]$ para $m = n$ e $E[X_n X_m] = \bar{X}^2$ para $m \neq n$. Assim,

$$\sigma^2_{X_N} = -\bar{X}^2 + \frac{1}{N^2}\left[NE\left(X^2\right) + \left(N^2 - N\right)\bar{X}^2\right] \tag{5.60}$$

$$= \frac{1}{N}\left[E\left(X^2\right) - \bar{X}^2\right] = \frac{\sigma^2_X}{N} \tag{5.61}$$

Daí vemos que a variância de nosso estimador da média vai para zero quando $N \to \infty$. Este fato implica que para N grande nosso estimador fornecer-a uma estimativa próxima da quantidade sendo estimada com alta probabilidade.

Da mesma forma que a Eq. (5.55) é um bom estimador para a média, a expressão a seguir é um bom estimador para a variância de X [Kay, 1993, Peebles, 2000]

$$\widehat{\sigma^2_X} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(X_n - \widehat{\bar{X}_N}\right)^2 \tag{5.62}$$

Exercício 5.10. *Uma tensão aleatória X se comporta aproximadamente como uma VA exponencial com um valor médio 4 e uma variância de 16. Onze amostras são tomadas tendo valores 0.1V, 0.4, 0.9, 1.4, 2.0, 2.8, 3.7, 4.8, 6.4, 9.2 e 12.0V. Estime a média a variância desta VA a partir destas amostras e discuta o resultado.*

5.8 Variáveis aleatórias complexas

Uma *variável aleatória complexa* Z pode ser definida em termos de variáveis aleatórias reais X e Y por

$$Z = X + jY \tag{5.63}$$

em que $j = \sqrt{-1}$. Considerando-se valores esperados envolvendo Z, a densidade conjunta de X e Y deve ser usada. Por exemplo, se $g(\cdot)$ for uma função (real ou complexa) de Z, o valor esperado de $g(Z)$ é obtido por

$$E\left[g(Z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(z) f_{X,Y}(x,y)dxdy. \tag{5.64}$$

Exercícios de Revisão para P1

Exercício 5.11. *[Hsu, 1996] Existem 100 pacientes em um hospital com uma certa doença. Destes, 10 são selecionados para passar por um tratamento por drogas que aumenta a taxa de cura porcentual de 50% para 75%. Qual a probabilidade do paciente ter recebido o tratamento por drogas sabendo-se que ele foi curado?*

Exercício 5.12. *[Hsu, 1996] Seja X uma VA contínua com FDP*

$$f_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.65}$$

em que k é uma constante.

a) *Determine o valor de k que esboce $f_X(x)$*

b) *Encontre e esboce a correspondente função distribuição de probabilidades $F_X(x)$*

c) *Encontre $P\left(\frac{1}{4} < X \leq 2\right)$*

Exercício 5.13. *Seja X uma variável aleatória contínua com FDP uniforme entre a e b. Mostre que*

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \tag{5.66}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{5.67}$$

Exercício 5.14. *[Hsu, 1996] A FDP conjunta de uma VA bivariada (X, Y) é dada por*

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 < x < 2 \ , 0 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.68}$$

a) *Encontre o valor de k*

b) *Encontre as FDPs marginais de X e Y*

c) *X e Y são independetes?*

Exercício 5.15. *[Peebles, 2000] Suponha que a queda de neve anual (quantidade de neve acumulada em metros) em dois hotéis de esqui alpinos vizinhos seja representada por variáveis aleatórias gaussianas conjuntas X e Y para as quais $\rho = 0{,}82$, $\sigma_X = 1{,}5m$, $\sigma_Y = 1{,}2m$ e $R_{XY} = 81{,}476\text{m}^2$. Se a queda de neve média no primeiro hotel é 10m, qual a taxa de queda média no outro hotel?*

Capítulo 6

Processos aleatórios - características temporais

6.1 O conceito de processo aleatório

Um processo aleatório ou estocástico é um espaço de amostras em que cada elemento é associado a uma função do tempo.

Da mesma forma que para uma variável aleatória, o resultado de um experimento é mapeado em um número, em um processo aleatório cada resultado é associado a uma forma de onda, ou seja, a uma função do tempo. A Figura 6.1 ilustra esta situação.

Considere um experimento aleatório especificado pelos eventos s definidos num espaço de amostras S e pelas probabilidades desses eventos. Suponha que se atribua a cada ponto s uma função do tempo de acordo com a regra

$$X(t,s), -T \leq t \leq T \tag{6.1}$$

em que $2T$ é o intervalo de observação total.

Para um s_j fixo, o gráfico da função $X\left(t, s_j\right)$ pelo tempo t é chamado *realização* ou *função*

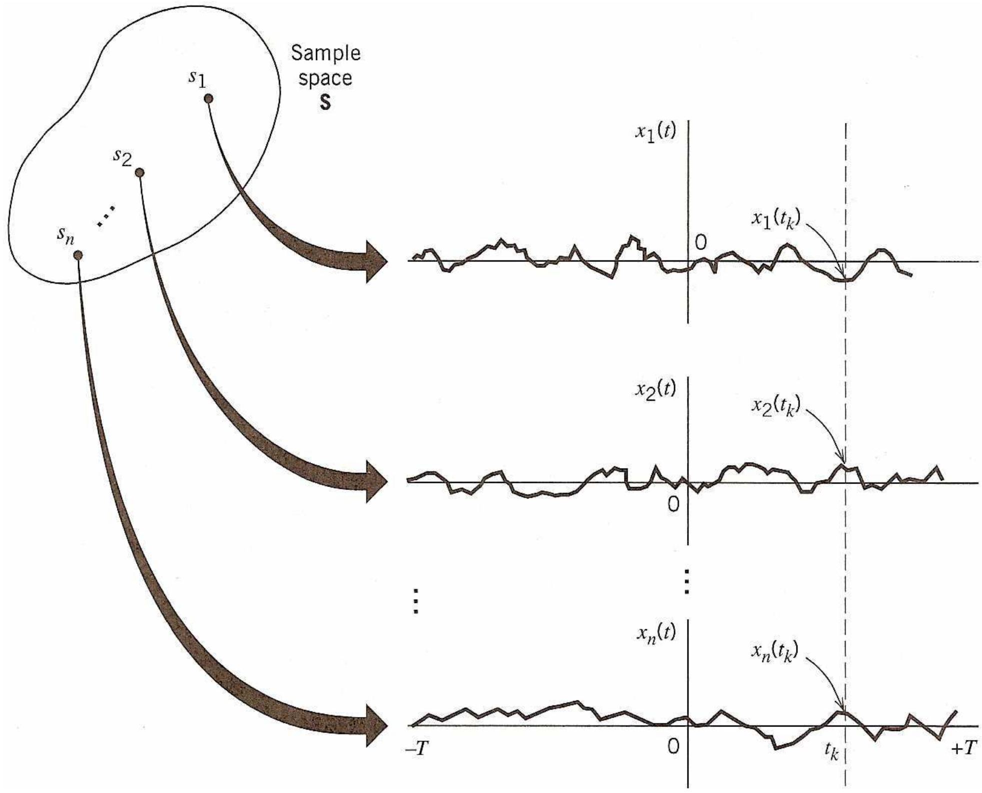

Figura 6.1: Um conjunto de funções amostras [Haykin and Moher, 2009].

amostra do processo aleatório. Para simplificar a notação, denota-se essa função amostra por

$$X_j(t) = X\left(t, s_j\right). \tag{6.2}$$

Da Figura 6.1, nota-se que para um tempo fixo t_k dentro do intervalo de observação, o conjunto de números

$$\left\{x_1\left(t_k\right), x_2\left(t_k\right), \ldots, x_n\left(t_k\right)\right\} \tag{6.3}$$

constituem uma *variável aleatória.* Assim um processo aleatório pode ser visto como um conjunto indexado de variáveis aleatórias.

Por simplicidade de notação, costuma-se suprimir o s e usar simplesmente $X(t)$ para representar um processo aleatório.

6.2 Independência e estacionariedade

Um processo é dito *estacionário* se quando dividido em intervalos de tempo as várias seções do processo exibem essencialmente as mesmas propriedades estatísticas. Caso contrário é dito *não-estacionário.*

Para ser mais preciso, considere o processo aleatório $X(t)$ que se inicializou em $t = -\infty$. Sejam $X(t_1)$, $X(t_2)$, $\ldots$, $X(t_k)$ as variáveis aleatórios obtidas pela observação do processo aleatório $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, $\ldots$, t_k respectivamente. A função distribuição conjunta deste conjunto de variáveis é $F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Suponha em seguida que desloque-se todos os tempos de observação de τ, obtendo novas variáveis $X(t_1+\tau)$, $X(t_2+\tau)$, $\ldots$, $X(t_k+\tau)$. A função distribuição conjunta deste novo conjunto de variáveis é $F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

O processo aleatório $X(t)$ é dito *estacionário no sentido estrito* ou *estritamente estacionário* se

$$F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \tag{6.4}$$

quaisquer que sejam τ, k e os instantes de observação t_1, $\ldots$, t_k.

Situações de especial interesse:

a) Para $k = 1$, tem-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x), \tag{6.5}$$

para todos t e τ. Ou seja, a função distribuição de primeira ordem de um processo estacionário independe do tempo.

b) Para $k = 2$ e $\tau = -t_1$,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1, x_2) \tag{6.6}$$

para todo t_1 e t_2. Isto é, a função distribuição de segunda ordem de um processo estacionário depende apenas da diferença entre os tempos de observação e não dos particulares instantes de observação.

Exercício 6.1. *[Haykin and Moher, 2009] Considere um processo aleatório $X(t)$ definido por*

$$X(t) = \sin(2\pi f_c t) \tag{6.7}$$

no qual a freqüência f_c é uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre um intervalo $[0, W]$. Mostre que $X(t)$ é não-estacionário.

Exercício 6.2. *[Haykin and Moher, 2009] Considere o processo senoidal*

$$X(t) = Acos(2\pi f_c t) \tag{6.8}$$

em que a freqüência f_c é constante e a amplitude A é uniformemente distribuída:

$$f_A(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6.9}$$

Determine se este processo é ou não estritamente estacionário.

6.3 Funções de correlação

Considere um processo aleatório $X(t)$. Define-se a *média* do processo $X(t)$ como o valor esperado da variável aleatória obtida observando o processo num instante t, ou seja,

$$\mu_X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)dx \tag{6.10}$$

em que $f_{X(t)}(x)$ é a função densidade de probabilidade de primeira ordem do processo.

Para um processo estritamente estacionário, $f_{X(t)}(x)$ é independente de t. Conseqüentemente, *a média de um processo estritamente estacionário é uma constante*, ou seja,

$$\mu_X(t) = \mu_X \tag{6.11}$$

para todo t.

Define-se a *função de autocorrelação* de um processo $X(t)$ como o valor esperado do produto de duas variáveis aleatórias, $X(t_1)$ e $X(t_2)$, obtidas pela observação do processo $X(t)$ nos instantes t_1 e t_2 respectivamente.

Especificamente, escreve-se

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)\, X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2. \tag{6.12}$$

Para um processo estritamente estacionário, a *função de autocorrelação depende apenas da diferença entre os instantes t_2 e t_1*. Assim, neste caso, definindo-se $\tau = t_2 - t_1$, pode-se reescrever a Eq. 6.12 como

$$R_{XX}(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right]. \tag{6.13}$$

Da mesma forma, a função de autocovariância para um processo estritamente estacionário é definida por

$$C_{XX}(\tau) = E\left[(X(t) - \mu_X)\,(X(t+\tau) - \mu_X)\right] \Rightarrow \tag{6.14}$$

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \tag{6.15}$$

Um processo cuja média é constante e a função de autocorrelação é função apenas de τ é chamado de *estacionário em sentido amplo* ou simplesmente *estacionário*.

6.3.1 Propriedades da função de autocorrelação

a) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right]$

b) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)

c) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Assim, vê-se que a função de autocorrelação não pode assumir um formato qualquer. A Figura 6.2 mostra dois exemplos de $R_{XX}(\tau)$.

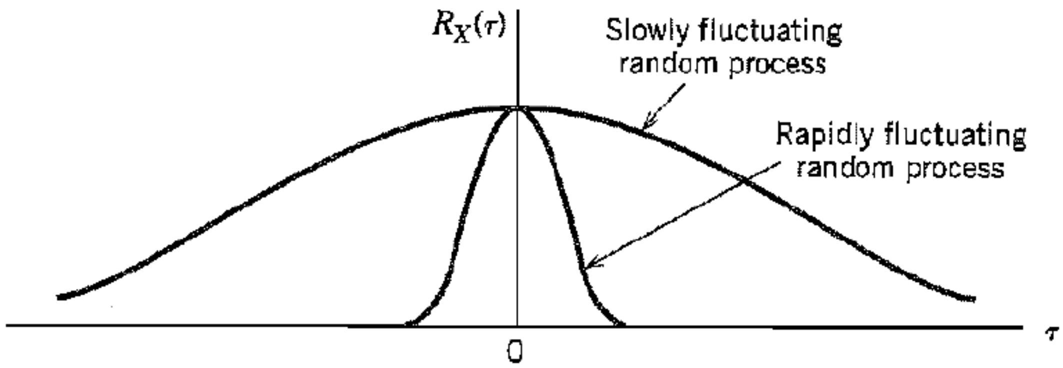

Figura 6.2: Exemplos de funções de autocorrelação [Haykin and Moher, 2009].

Exercício 6.3. *Demonstre a propriedade (c.c).*

Exercício 6.4. *[Haykin and Moher, 2009] Considere um sinal senoidal com fase aleatória, definida por*

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta) \tag{6.16}$$

em que A e f_c são constantes e Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída *no intervalo $[-\pi, \pi]$. Determine a função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ deste processo estacionário.*

6.3.2 Função de correlação cruzada

Dados dois processos estacionários $X(t)$ e $Y(t)$ com funções de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ e $R_{YY}(\tau)$, definem-se suas funções de correlação cruzada como

$$R_{XY}(\tau) = E\left[X(t)Y(t+\tau)\right] \text{ e} \tag{6.17}$$

$$R_{YX}(\tau) = E\left[Y(t)X(t+\tau)\right]. \tag{6.18}$$

As propriedades de correlação de dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ podem ser mostradas convenientemente na forma de matriz como

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_{XX}(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_{YY}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Observe que

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \tag{6.20}$$

Exercício 6.5. *[Haykin and Moher, 2009]Considere um par de processos modulados em quadratura $X_1(t)$ e $X_2(t)$ que são relacionados a um processo $X(t)$ como se segue:*

$$X_1(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta) \tag{6.21}$$

$$X_2(t) = X(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta) \tag{6.22}$$

em que f_c é uma freqüência de portadora e a variável aleatória Θ é uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$. Além disso, Θ é independente de $X(t)$. Encontre a correlação cruzada entre $X_1(t)$ e $X_2(t)$.

6.3.3 Processos ergódicos

O valor esperado de um processo aleatório $X(t)$ é calculado "através da média no conjunto". Por exemplo, a média de um processo aleatório $X(t)$ em um instante fixo t_k é o valor esperado da variável aleatória $X(t_k)$ que descreve todos os valores das funções-amostras no instante $t = t_k$.

Pode-se definir também médias temporais que são tomadas "ao longo do processo". Por exemplo, a média temporal de uma função-amostra $x(t)$ definida no intervalo $-T \leq t \leq T$ é definida por

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{6.23}$$

Da mesma forma, a *autocorrelação temporal* de uma função-amostra $x(t)$ é definida por

$$R_{XX}(\tau, T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt. \tag{6.24}$$

Um processo é dito *ergódico em média* se suas médias temporais e de conjunto coincidem quando $T \to \infty$, ou seja

$$\lim_{T\to\infty} \mu_X(T) = \mu_X \tag{6.25}$$

$$\lim_{T\to\infty} \text{var}\left[\mu_X(T)\right] = 0 \tag{6.26}$$

Um processo é dito *ergódico em termos da autocorrelação* se

$$\lim_{T\to\infty} R_{XX}(\tau, T) = R_{XX}(\tau) \tag{6.27}$$

$$\lim_{T\to\infty} \text{var}\left[R_{XX}(\tau, T)\right] = 0 \tag{6.28}$$

Vale ressaltar que uma condição necessária para a ergodicidade é a estacionariedade do processo.

Exercício 6.6. *[Lathi, 1998] Dado o processo aleatório $X(t) = k$ em que k é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-1, 1)$. Pede-se:*

a) *Esboce funções-amostras deste processo.*

b) *Determine $E[X(t)]$*

c) *Determine $R_{XX}(t_1, t_2)$*

d) *Este processo é estacionário?*

e) *Este processo é ergódico?*

f) *Se o processo for estacionário, qual sua potência P_X, ou seja, seu valor médio quadrático $E\left[X(t)^2\right]$*

Exercício 6.7. *[Lathi, 1998] Mostre que para um processo estacionário $x(t)$ e sem componentes periódicas*

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \bar{X}^2 \tag{6.29}$$

Exercício 6.8. *[Peebles, 2000] Um processo estacionário e ergódico $X(t)$ sem componentes periódicas tem função de autocorrelação*

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2} \tag{6.30}$$

Determine sua variância σ_X^2.

Exercício 6.9. *[Haykin and Moher, 2009] Um processo aleatório $X(t)$ é definido por*

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t) \tag{6.31}$$

em que A é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_A^2. Este processo aleatório é aplicado a um integrador ideal, produzindo a saída

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau. \tag{6.32}$$

a) *Determine a função densidade de probabilidade da saída $Y(t)$ em um instante particular t_k.*

b) *Determine se $Y(t)$ é ou não estacionário.*

c) *Determine se $Y(t)$ é ou não ergódico.*

Exercício 6.10. *[Haykin and Moher, 2009] Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição gaussiana independentes, cada uma com média nula e variância unitária. Defina o processo gaussiano*

$$Z(t) = X\cos(2\pi t) + Y\sin(2\pi t) \tag{6.33}$$

a) *Determine a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $Z(t_1)$ e $Z(t_2)$ obtidas da observação de $Z(t)$ nos instantes t_1 e t_2 respectivamente.*

b) *O processo $Z(t)$ é estacionário? Justifique.*

Exercício 6.11. *[Haykin and Moher, 2009] Prove as duas seguintes propriedades da função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ de um processo aleatório $X(t)$:*

a) *Se $X(t)$ contém um componente DC igual a A, então $R_{XX}(\tau)$ conterá uma componente constante igual a A^2.*

b) *Se $X(t)$ contém uma componente senoidal, então $R_{XX}(\tau)$ conterá uma componente senoidal de mesma freqüência.*

Exercício 6.12. *[Haykin and Moher, 2009] A onda quadrada $x(t)$ da Figura 6.3 de amplitude constante A, período T_0 e atraso t_d representa uma função-amostra de um processo aleatório $X(t)$. O atraso é aleatório, descrito pela função densidade de probabilidades*

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T_0}, & -\frac{1}{2}T_0 \leq t_d \leq \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6.34}$$

a) *Determine a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X(t_k)$ obtida da observação do processo aleatório $X(t)$ no instante t_k.*

b) *Determine a média e a função de autocorrelação usando média de conjunto*

c) *Determine a média e a função de autocorrelação usando média temporal*

d) *Estabeleça se o processo $X(t)$ é estacionário ou não. Ele é ergódico?*

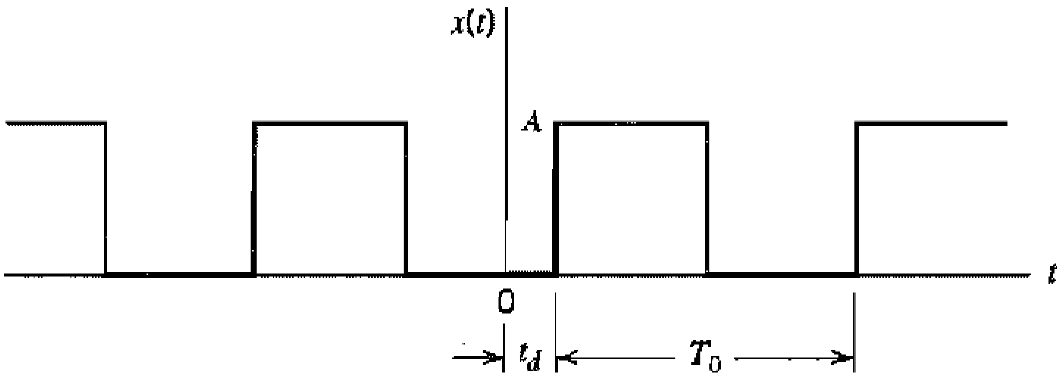

Figura 6.3: Função-amostra do processo do Exercício 6.12 [Haykin and Moher, 2009].

6.4 Medida de funções de correlação

No mundo real, não consegue-se medir as funções de correlação verdadeiras de dois processos aleatórios $X(t)$ e $Y(t)$ porque nunca estão disponíveis *todas* as funções amostras. De fato, tipicamente tem-se disponível para medidas apenas um trecho de uma função amostra de cada processo.

Como somos obrigados a trabalhar apenas com funções do tempo, somos forçados,querendo ou não, a assumir que os processos dados são ergódicos.

Na Figura 6.4 é mostrado o diagrama de blocos de um possível sistema para medida da função de correlação cruzada aproximada de dois processos aleatórios ergódicos conjuntos $X(t)$ e $Y(t)$.

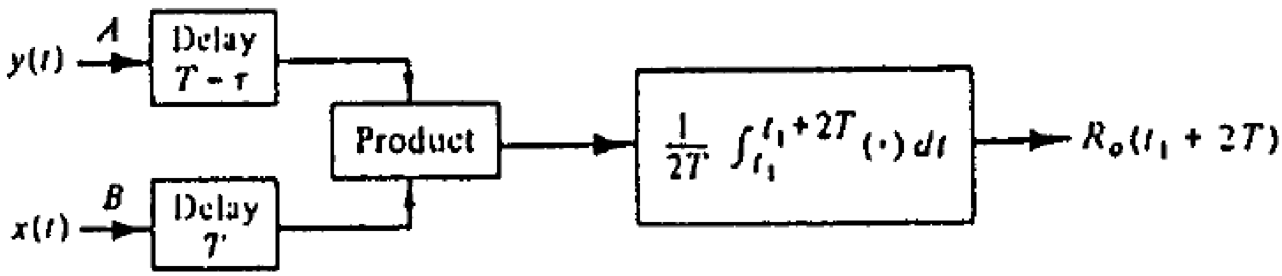

Figura 6.4: Um sistema de medição da função de correlação cruzada. A função de autocorrelação pode ser medida conectando os pontos A e B e aplicando em ambos $x(t)$ ou $y(t)$ [Peebles, 2000].

Assumindo que $x(t)$ e $y(t)$ existem ao menos durante o intervalo $-T < t$ e t_1 é um instante arbitrário satisfazendo $0 \leq t_1$, então a saída pode ser facilmente encontrada como

$$R_0\left(t_1+2T\right)=\frac{1}{2T}\int_{t_1-T}^{t_1+T}x(t)y(t+\tau)dt. \tag{6.35}$$

Assim, tomando $t_1=0$ e assumindo que T é grande, temos

$$R_0(2T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t+\tau)dt\approx\Re_{xy}(\tau)=R_{XY}(\tau). \tag{6.36}$$

Claramente, conectando os pontos A e B e aplicando $x(t)$ ou $y(t)$ ao sistema, pode-se medir também as funções de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ e $R_{YY}(\tau)$.

Exercício 6.13. *Considere o processo estocástico definido por*

$$X(t)=A\cos\left(\omega_0 t+\Theta\right), \tag{6.37}$$

em que A e ω_0 são constantes e Θ é uniformemente distribuída no intervalo $(0,2\pi)$. Pede-se

a) *determine a função de autocorrelação deste processo.*

b) *suponha que deseja-se usar o sistema da Figura 6.4 para medir esta função. Conecta-se os pontos A e B e aplica-se uma função amostra $x(t)$ do processo a eles. Determine neste caso $R_0(2T)$ e compare com o resultado do ítem anterior.*

c) *deseja-se que o erro na medição seja no mínimo 20 vezes menor do que o maior valor da função de autocorrelação verdadeira. Determine qual deve ser T neste caso.*

6.5 Processos aleatórios gaussianos

Vários processos aleatórios são tão importantes que a eles são dados nomes próprios. Nesta seção discute-se o mais importante deles, o *processo aleatório gaussiano.*

Considere um processo aleatório contínuo como o ilustrado na Figura 6.5 e defina N VAs $X_1=X\left(t_1\right),\ldots,X_i=X\left(t_i\right),\ldots,X_N=X\left(t_N\right)$ correspondentes a N instantes $t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_N$.

Se, para qualquer $N = 1, 2, \ldots$ e instantes $t_1, \ldots, t_N$ estas variáveis aleatórias são conjuntamente gaussianas, isto é, elas têm a FDP conjunta dada por

$$f_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\left|[C_X]^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{\left[x - \bar{X}\right]^t [C_X]^{-1} \left[x - \bar{X}\right]}{2}\right\}, \tag{6.38}$$

o processo é chamado de gaussiano.

A Eq. (6.38) pode ser escrita na forma

$$f_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x - \bar{X}\right]^t [C_X]^{-1} \left[x - \bar{X}\right]\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N \left|[C_X]\right|}} \tag{6.39}$$

em que as matrizes $\left[x - \bar{X}\right]$ e $[C_X]$ são definidas por

$$\left[x - \bar{X}\right] = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{X}_1 \\ x_2 - \bar{X}_2 \\ \vdots \\ x_N - \bar{X}_N \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

$$[C_X] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

$$C_{ij} = E\left[\left(X_i - \overline{X_i}\right)\left(X_j - \overline{X_j}\right)\right] = \begin{cases} \sigma_{X_i}^2, & i = j \\ C_{X_i X_j}, & i \neq j \end{cases}. \tag{6.42}$$

Os valores médios $\overline{X_i}$ de $X(t_i)$ são

$$\overline{X_i} = E[X_i] = E[X(t_i)]. \tag{6.43}$$

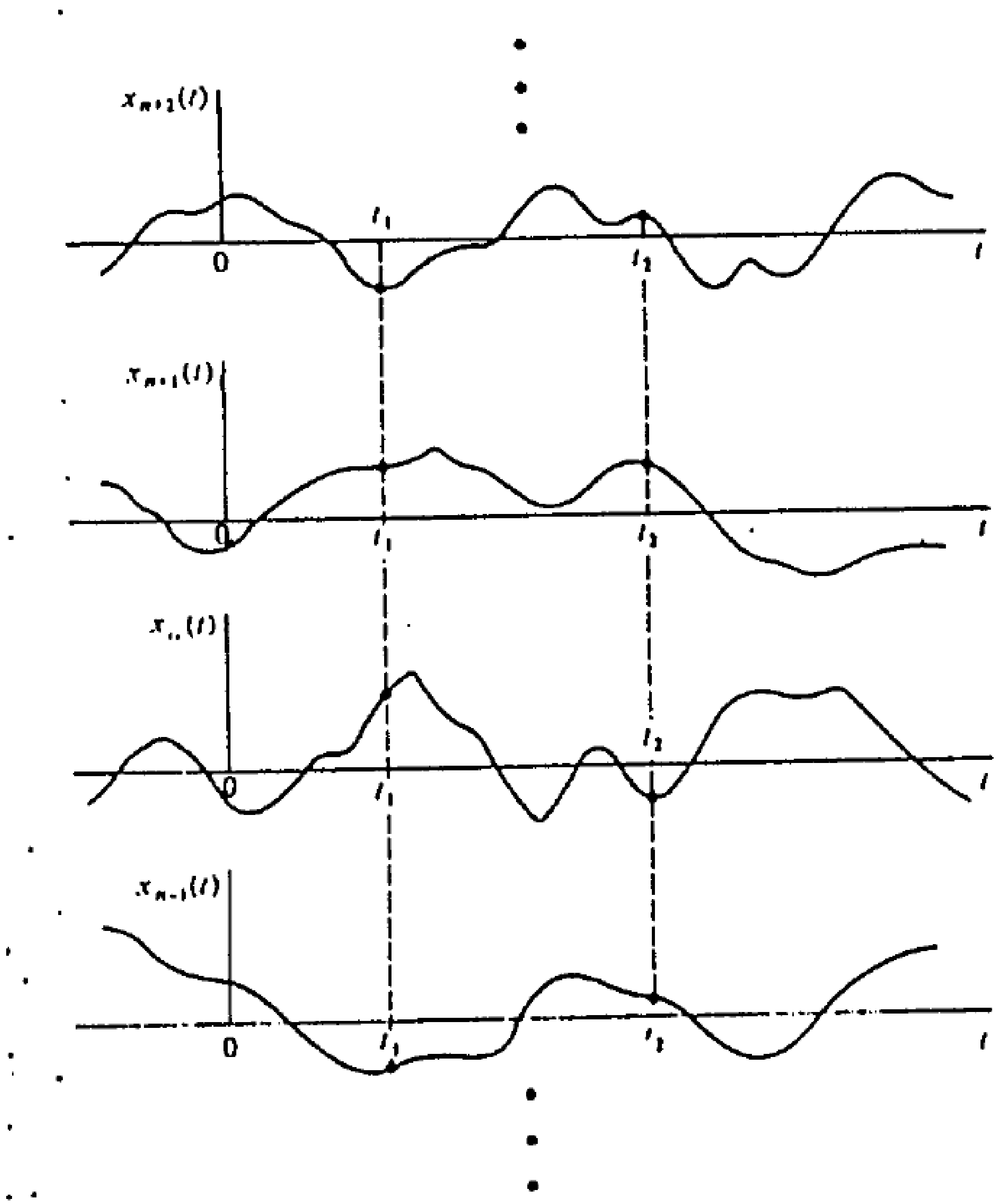

Figura 6.5: Um processo aleatório contínuo [Peebles, 2000].

Os elementos da matriz de covariância $[C_X]$ são

$$C_{ik} = C_{X_iX_k} = E\left[\left(X_i - \overline{X_i}\right)\left(X_k - \overline{X_k}\right)\right] \tag{6.44}$$

$$= E\left[\{X(t_i) - E[X(t_i)]\}\{X(t_k) - E[X(t_k)]\}\right] \tag{6.45}$$

$$= C_{XX}(t_i, t_k) \tag{6.46}$$

que são as autocovariâncias de $X(t_i)$ e $X(t_k)$

$$C_{XX}(t, t+\tau) = E\left[\{X(t) - E[X(t)]\}\{X(t+\tau) - E[X(t+\tau)]\}\right]. \tag{6.47}$$

Exercício 6.14. *Um processo aleatório gaussiano é estacionário com média $\bar{X} = 4$ e função de autocorrelação*

$$R_{XX}(\tau) = 25e^{-3|\tau|}. \tag{6.48}$$

Determine a matriz de autocovariância das VAs $X(t_i)$, $i = 1, 2, 3$, definidas nos intantes $t_i = t_0 + \left[\frac{(i-1)}{2}\right]$, sendo t_0 uma constante.

6.6 Processo aleatório de Poisson

Nesta seção, consideramos um importante exemplo de processo aleatório discreto conhecido como *processo de Poisson*. Ele descreve o número de vezes que algum evento ocorreu em função do tempo, em que os eventos ocorrem em instantes aleatórios.

Para visualizar o processo de Poisson, seja $X(t)$ o número de ocorrências de um evento em função do tempo (o processo); então $X(t)$ tem funções amostras com valores inteiros e não decrescentes, como mostrado na Figura 6.6(a) para os tempos de ocorrência aleatórios da Figura 6.6 (b).

Em muitas situações apenas interessa o comportamento do processo para $t > 0$. No restante desta seção assumimos que o processo é definido apenas para $t > 0$ (e é nulo para $t < 0$).

Para definir o processo de Poisson precisamos de duas condições. A primeira é que o

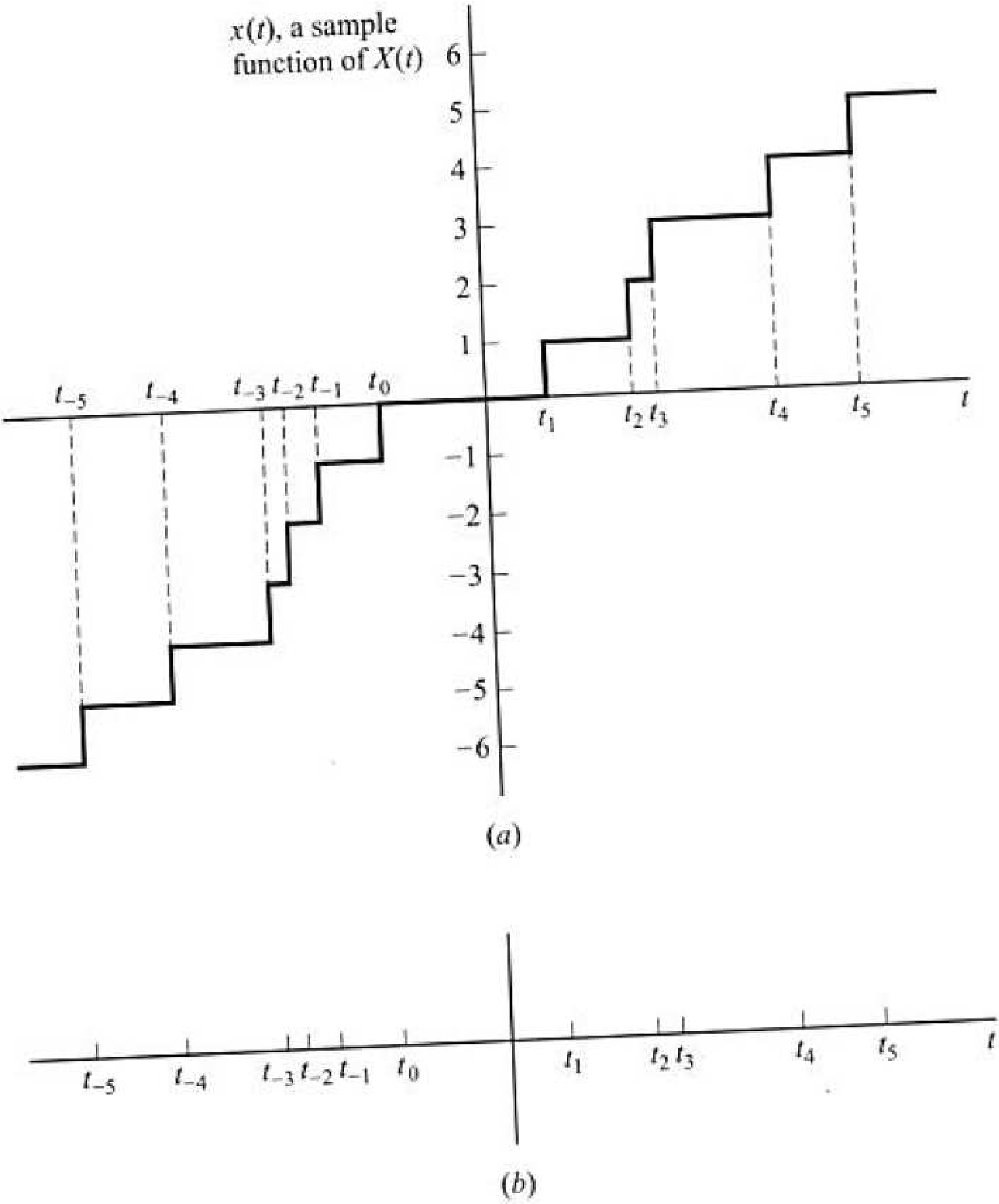

Figura 6.6: (a) Uma função amostra de um processo aleatório de Poisson; (b) os tempos de ocorrência aleatória que geram esta função amostra. [Peebles, 2000].

evento ocorra apenas uma vez em que cada intervalo de tempo infinitesimal. A segunda é que os instantes de ocorrência sejam estatisticamente independentes de forma que o número de ocorrências em cada intervalo seja independente do número de ocorrências em qualquer outro intervalo. Uma consequência destas duas condições é que o número de ocorrências de eventos em qualquer intervalo finito é descrito pela distribuição de Poisson em que a taxa média de ocorrências é denotada por λ (veja as Eqs. (2.21) e (2.23) da Seção 2.5.4).

6.7 Processos aleatórios complexos

Se as VAs complexas da Seção 5.8forem generalizadas para incluir o tempo, o resultado é um *processo aleatório complexo* $Z(t)$ *dado por*

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \tag{6.49}$$

em que $X(t)$ e $Y(t)$ são processos reais.

Pode-se estender as operações envolvendo média, função de autocorrelação e autocovariância para incluir os processos complexos. O *valor médio* de $Z(t)$ é

$$E\left[Z(t)\right] = E\left[X(t)\right] + jE\left[Y(t)\right]. \tag{6.50}$$

A *função de autocorrelação* é definida por

$$R_{ZZ}(t, t+\tau) = E\left[Z^*(t)Z(t+\tau)\right] \tag{6.51}$$

em que o asterisco * denota complexo conjugado. A *função de autocovariância* é definida por

$$C_{ZZ}(t, t+\tau) = E\left[\{Z(t) - E\left[Z(t)\right]\}^* \{Z(t+\tau) - E\left[Z(t+\tau)\right]\}\right] \tag{6.52}$$

Exercício 6.15. *Um processo aleatório complexo* $V(t)$ *é composto pela soma de* N *sinais* *complexos*

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n e^{j\omega_0 t+j\Theta_n}. \tag{6.53}$$

Aqui $\frac{\omega_0}{2\pi}$ *é a frequência (constante) de cada sinal.* A_n *é uma VA representando a amplitude do n-ésimo sinal. Da mesma forma,* Θ_n *é uma VA representando a fase. Assuma que todas as VAs* A_n *e* Θ_n *são independentes e que* Θ_n *é uniformemente distribuída no intervalo* $(0,2\pi)$*. Encontre a função de autocorrelação de* $V(t)$*.*

Capítulo 7

Processos aleatórios - características espectrais

Exercício 7.1. *Calcule a transformada de Fourier de* $x(t) = e^{-at}u(t)$*,* $|a| > 0$*.*

Exercício 7.2. *[Peebles, 2000]Determine quais das seguintes funções pode ou não ser uma DEP válida. Para aquelas que não podem, explique o porquê.*

a*)* $\frac{\omega^2}{\omega^6+3\omega^2+3}$

b*)* $\exp\left[-(\omega-1)^2\right]$

c*)* $\frac{\omega^2}{\omega^4-1} - \delta\omega$

d*)* $\frac{\omega^4}{1+\omega^2+j\omega^6}$

Exercício 7.3. *[Peebles, 2000] Para um processo aleatório* $X(t)$*, assuma que sua função de autocorrelação é*

$$R_{XX}(t,\tau) = 12e^{-4|\tau|}\cos^2(24t) \tag{7.1}$$

a*)* $X(t)$ *é estacionário?*

b*)* *Encontre* $R_{XX}(\tau)$*.*

c*)* *Encontre a DEP de* $X(t)$*.*

Tabela 4.2 Pares transformados básicos de Fourier

Sinal	Transformada de Fourier	Coeficientes da série de Fourier (se periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, caso contrário
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, caso contrário
$\text{sen}\, \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, caso contrário
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (esta é a representação em série de Fourier para qualquer escolha de $T > 0$)
Onda quadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t \rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ e $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\, \text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}\, k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t \rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\, \text{sen}\, \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\text{sen}\, Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Figura 7.1: Principais pares transformados de Fourier [Oppenheim, 2010].

Tabela 4.1 Propriedades da transformada de Fourier

Seção	Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearidade	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
4.3.2	Deslocamento no tempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Deslocamento em frequência	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
4.3.3	Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Reflexão no tempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Mudança de escala no tempo e na frequência	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolução	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplicação	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\ Y(j(\omega-\theta))d\theta$
4.3.4	Diferenciação no tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integração	$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciação em frequência	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Simetria conjugada para sinais reais	$x(t)$ real	$\begin{cases}X(j\omega)=X^*(-j\omega)\\ \mathcal{Re}\{X(j\omega)\}=\mathcal{Re}\{X(-j\omega)\}\\ \mathcal{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathcal{Im}\{X(-j\omega)\}\\ \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert\\ \sphericalangle X(j\omega)=-\sphericalangle X(-j\omega)\end{cases}$
4.3.3	Simetria para sinais reais e pares	$x(t)$ real e par	$X(j\omega)$ real e par
4.3.3	Simetria para sinais reais e ímpares	$x(t)$ real e ímpar	$X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar
4.3.3	Decomposição par-ímpar para sinais reais	$x_e(t)=\mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t)=\mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{Re}\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{Im}\{X(j\omega)\}$
4.3.7	Relação de Parseval para sinais aperiódicos		

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$$

Figura 7.2: Principais propriedades da transformada de Fourier [Oppenheim, 2010].

Exercício 7.4. *[Peebles, 2000] Um processo aleatório é dado por*

$$W(t) = AX(t) + BY(t) \tag{7.2}$$

em que A e B são constantes reais e $X(t)$ e $Y(t)$ são processos conjuntamente estacionários em sentido amplo.

a) *Encontre a DEP $S_{WW}(\omega)$ de $W(t)$*

b) *Encontre $S_{WW}(\omega)$ se $X(t)$ e $Y(t)$ são não-correlacionados*

c) *Encontre as densidades de potência cruzadas $S_{XW}(\omega)$ e $S_{YW}(\omega)$.*

Exercício 7.5. *A função de correlação cruzada entre dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ é*

$$R_{XY}(t, t+\tau) = \frac{AB}{2}\left\{\sin(\omega_0\tau) + \cos\left[\omega_0(2t+\tau)\right]\right\} \tag{7.3}$$

em que A, B e ω_0 são constantes. Encontre o espectro cruzado destes processos.

Exercício 7.6. *Considere um processo $X(t)$ discreto gaussiano estacionário em que as funções amostras são constituídas por VAs independentes com média nula e variância $\sigma_X^2 = 1$.*

a) *Determine a média e função de autocorrelação para este processo*

b) *Use o Matlab para obter estimativas da função de autocorrelação e da DEP deste processo.*

```
clear all; close all;
%Sem fazer média
 Npontos = 10000;
 x = randn(1,Npontos);
 [Rxx,tau] = xcorr(x,'unbiased');
 figure(1);
 subplot(211); plot(tau,Rxx);
```

```
 grid; xlabel('\tau');ylabel('R(\tau)');
 title('Sem média');
 Sxx = fft(Rxx);
 subplot(212); plot(abs(Sxx));
 axis([0 Npontos 0 5]);
 grid; xlabel('\omega');ylabel('S_{XX}(\omega)');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Fazendo média
samples = 10000;
Sxx = zeros(1,2*Npontos-1);
Rxx = zeros(1,2*Npontos-1);
x = randn(samples,Npontos);
for ind = 1:samples,
    ind
    Rxx = Rxx+xcorr(x(ind,:),'unbiased');
    Sxx = Sxx+fft(Rxx);
end
Rxxmedio = Rxx/samples;
figure(2);
subplot(211); plot(tau,Rxxmedio);
grid; xlabel('\tau');ylabel('R(\tau)');
title('Sem média');
Sxxmedio = fft(Rxxmedio);
subplot(212); plot(abs(Sxxmedio));
axis([0 Npontos 0 5]);
grid; xlabel('\omega');ylabel('S_{XX}(\omega)');
```

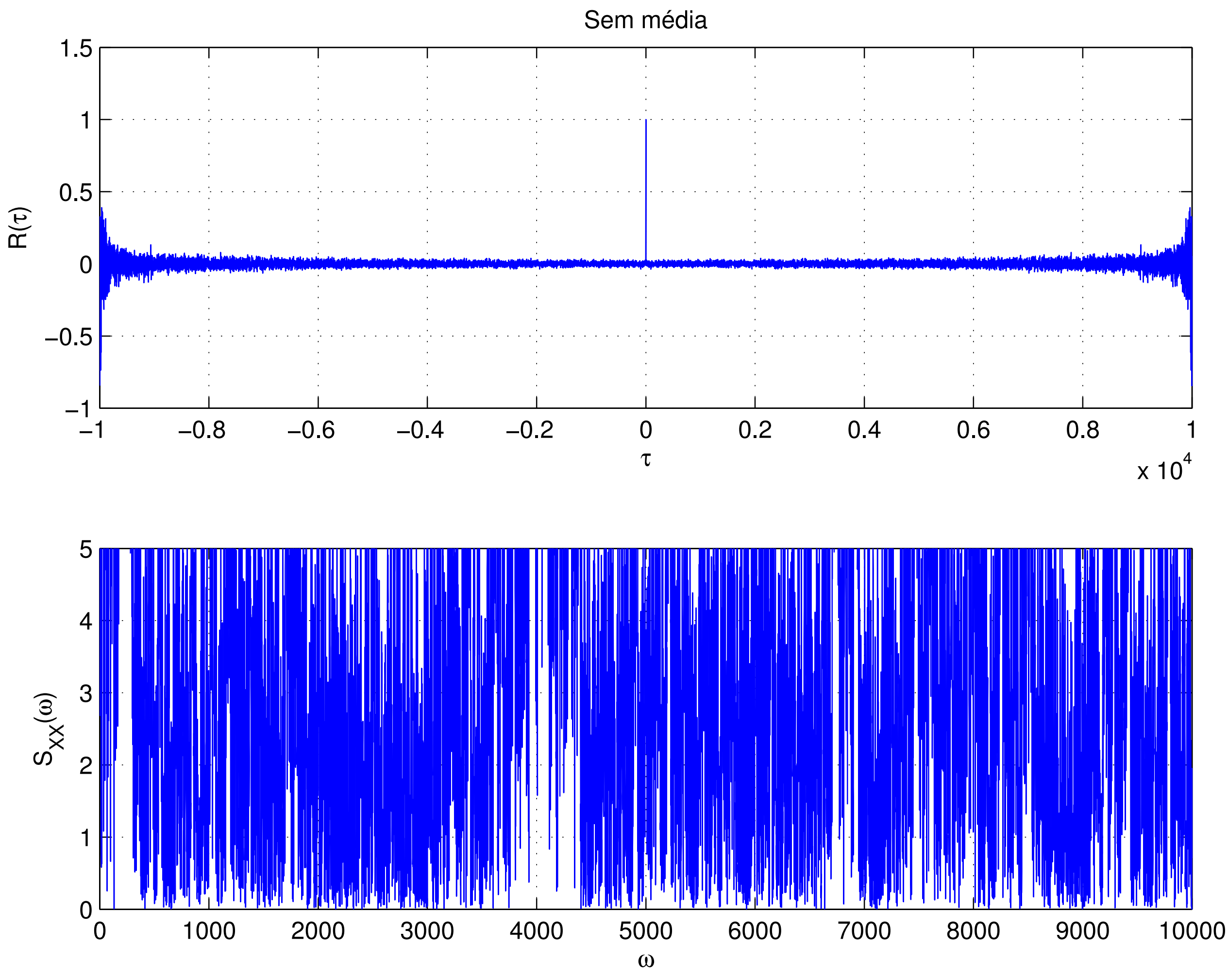

Figura 7.3: $R_X X(\tau)$ e $S_{XX}(\omega)$ do Exercício 7.6 calculado sem média.

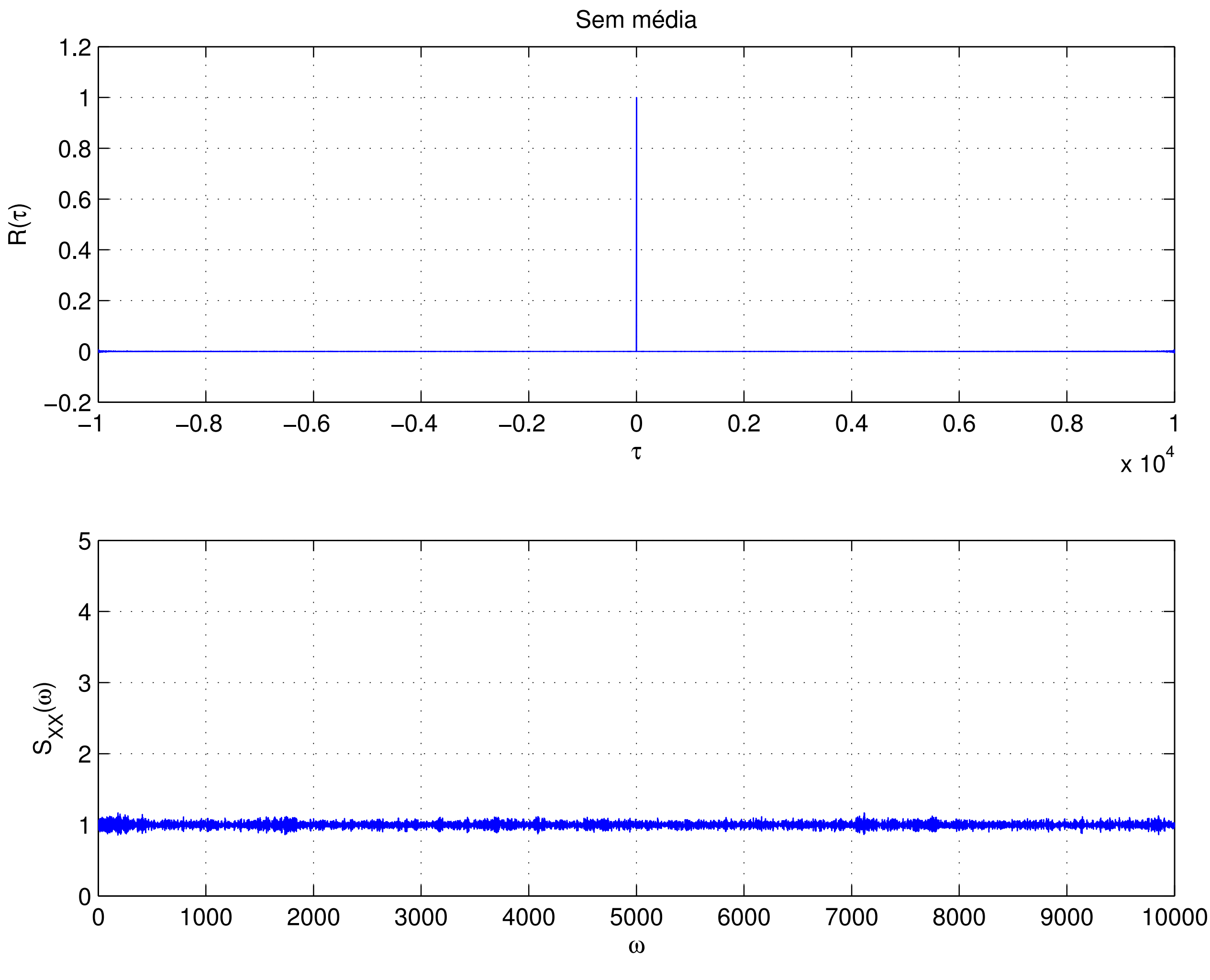

Figura 7.4: $R_X X(\tau)$ e $S_{XX}(\omega)$ do Exercício 7.6 calculado com média.

Capítulo 8

Sistemas lineares com entradas aleatórias

Exercício 8.1. *Considere o circuito LC da Figura 8.1. Pede-se:*

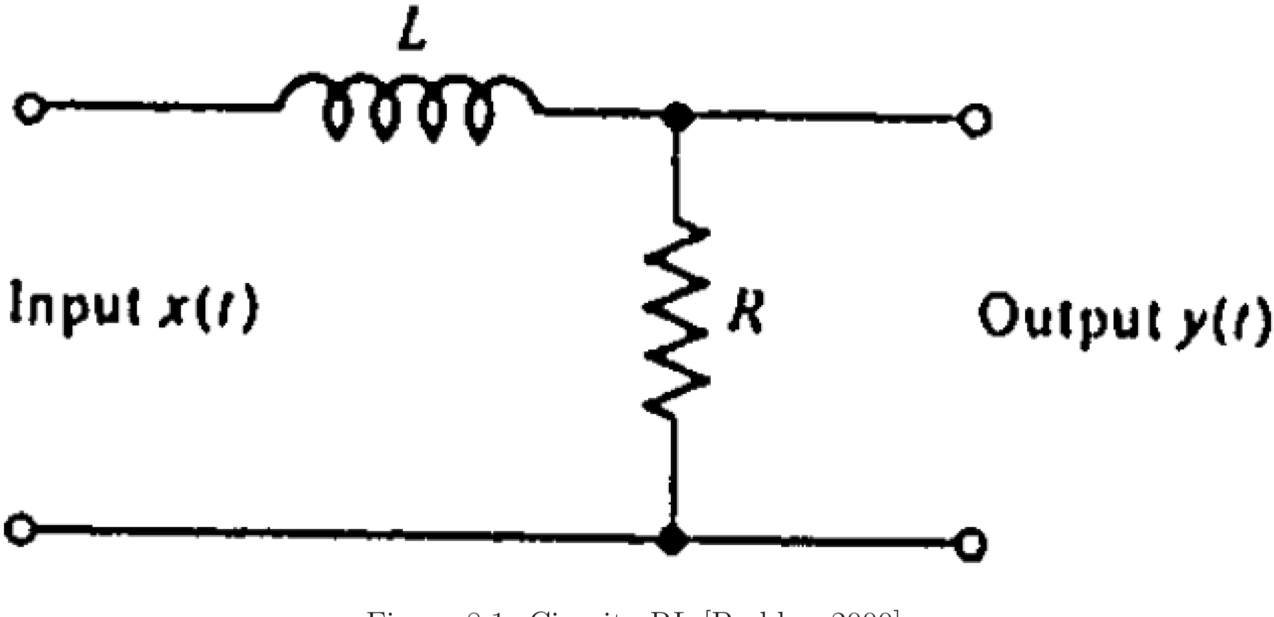

Figura 8.1: Circuito RL [Peebles, 2000].

a) *determine a função de transferência $H(\omega)$ deste circuito;*

b) *Esboce o módulo desta resposta em frequência. Que tipo de filtro é este?*

Exercício 8.2. *[Peebles, 2000] Um processo aleatório $X(t)$ tem função de autocorrelação*

$$R_{XX}(\tau) = A^2 + Be^{-|\tau|} \tag{8.1}$$

em que A e B são constantes positivas. Encontre o valor médio da resposta de um sistema tendo como resposta ao impulso

$$h(t) = \begin{cases} e^{-Wt}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

em que W é uma constante positiva quando a entrada é $X(t)$.

Exercício 8.3. *Determine a DEP e a potência média da saída do circuito RL do Exercício 8.1 quando a entrada é um ruído branco com*

$$S_{XX}(\omega) = \frac{N_0}{2}. \tag{8.3}$$

Dica: $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right).$

Exercício 8.4. *Determine a largura de banda de ruído do circuito RL do Exercício 8.1.*

Exercício 8.5. *Encontre a temperatura equivalente de ruído T_S da associação série de dois resistores R_1 e R_2 a temperaturas T_1 e T_2.*

Exercício 8.6. *Repita o Exercício 8.5 supondo que há um capacitor C_1 ideal em paralelo com o resistor R_1.*

Exercício 8.7. *Um medidor bastante sensível é capaz de medir potência de ruído em uma faixa (estreita) de 1kHz de largura em qualquer frequência $\frac{\omega}{2\pi}$. Ele é conectado à saída de uma antena de microondas usando em um rádio-enlace e registra $2 \times 10^{-18}\,W$ quando uma impedância casada com a antena é conectada. Encontre a temperatura de antena T_a.*

Exercícios de Revisão para P2

Exercício 8.8. *[Hsu, 1996] Considere um processo aleatório $X(t)$ definido por*

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Theta),\ -\infty < t < \infty \tag{8.4}$$

em que A e ω são constantes e Θ é uma VA uniforme no intervalo $(-\pi, \pi)$. Mostre que $X(t)$ é WSS.

Exercício 8.9. *[Hsu, 1996] Considere um processo aleatório $X(t)$ definido por*

$$X(t) = Y\cos(\omega t + \Theta),\ -\infty < t < \infty \tag{8.5}$$

em que Y e Θ são VAs independentes uniformemente distribuídas no intervalo $(-A, A)$ e $(-\pi, \pi)$, respectivamente.

a) *Encontre a média de $X(t)$.*

b) *Encontre a função de autocorrelação $R_{XX}(t, \tau)$ de $X(t)$.*

Exercício 8.10. *[Hsu, 1996] Um processo aleatório WSS de média nula é chamado de ruído branco de banda limitada se sua densidade espectral de potência é dada por*

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases} \tag{8.6}$$

Encontre a função de autocorrelação de $X(t)$ e esboce-a.

Exercício 8.11. *[Hsu, 1996] A entrada $X(t)$ de um filtro RC série é um ruído branco especificado por*

$$S_{XX}(\omega) = \sigma^2 \tag{8.7}$$

Determine o valor médio quadrático de $Y(t)$.

Exercício 8.12. *[Peebles, 2000] Dois resistores com resistências* R_1 *e* R_2 *são conectados em paralelo e têm temperatura física* T_1 *e* T_2 *respectivamente.*

a) *Encontre a temperatura de ruído efetiva* T_S *de um resistor equivalente com resistência igual à combinação paralela de* R_1 *e* R_2*.*

b) *Se* $T_1 = T_2$ *, quanto vale* T_S*?*

Referências Bibliográficas

[Haykin and Moher, 2009] Haykin, S. and Moher, M. (2009). *Communication Systems*. Wiley, 5th edition.

[Hsu, 1996] Hsu, H. (1996). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*. Schaum's Outlines. McGraw-Hill Education.

[Kay, 1993] Kay, S. M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

[Lathi, 1998] Lathi, B. P. (1998). *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 3.ed edition.

[Oppenheim, 2010] Oppenheim, A. V. (2010). *Sinais e Sistemas*. Pearson.

[Peebles, 2000] Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

[Ziemer and Tranter, 2014] Ziemer, R. E. and Tranter, W. H. (2014). *Principles of Communications*. Wiley.