2

Exercícios de Controle Digital PTC 2419

2.1 Exercícios resolvidos

Exercício 2.1

Obtenha aproximações discretas para o sistema contínuo da Figura 2.1, através dos seguintes métodos: retangular para trás, mapeamento pólo-zero, bilinear sem compensação e com compensação de distorção na frequência $\omega_s = 1\text{rad/s}$. Para cada método, calcule a resposta analítica da saída $y(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$, quando a entrada $u(k)$ for um degrau unitário. Suponha $T = 1s$.

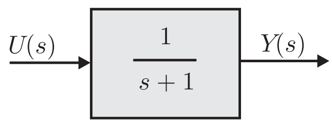

Figura 2.1: Sistema contínuo.

Solução

Método retangular para trás

Sendo

$$s = \frac{z-1}{Tz} \; , \tag{2.1}$$

tem-se que

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{z}+1} = \frac{z}{2z-1} = \frac{0{,}5z}{z-0{,}5} \; . \tag{2.2}$$

Para $U(z)$ degrau unitário, obtém-se

$$Y(z) = \frac{0{,}5z^2}{(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{z}{z-1} - \frac{0{,}5z}{z-0{,}5} \; . \tag{2.3}$$

Logo

$$y(k) = 1 - 0{,}5(0{,}5)^k \; . \tag{2.4}$$

Transformação bilinear ou de Tustin

Sendo

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}\,, \tag{2.5}$$

tem-se que

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{\frac{2(z-1)}{(z+1)}+1} = \frac{z+1}{3z-1} = \frac{\frac{1}{3}(z+1)}{z-\frac{1}{3}}\,. \tag{2.6}$$

Para $U(z)$ degrau unitário, obtém-se

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{3}z(z+1)}{(z-1)(z-\frac{1}{3})} = \frac{z}{z-1} - \frac{\frac{2}{3}z}{z-\frac{1}{3}}\,. \tag{2.7}$$

Logo

$$y(k) = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k\,. \tag{2.8}$$

Transformação bilinear com compensação de distorção em frequência

A função de transferência contínua deve ser modificada para

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{T}{2}}{s+\frac{2}{T}\tan\frac{T}{2}} = \frac{2\tan 0{,}5}{s+2\tan 0{,}5}\,. \tag{2.9}$$

Aplicando a transformação bilinear (2.5) na Equação (2.9), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{2\tan 0{,}5}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}+2\tan 0{,}5} \\
&= \frac{\tan 0{,}5}{\frac{z-1}{z+1}+\tan 0{,}5} \\
&= \frac{\tan 0{,}5}{(\tan 0{,}5+1)}\left(\frac{z+1}{z+\frac{\tan 0{,}5-1}{\tan 0{,}5+1}}\right) \\
&\cong \frac{0{,}3533(z+1)}{z-0{,}2934}\,.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para $U(z)$ degrau unitário, obtém-se

$$Y(z) = \frac{0{,}3533\,z(z+1)}{(z-1)(z-0{,}2934)} = \frac{z}{z-1} - \frac{0{,}6467z}{z-0{,}2934}\,. \tag{2.11}$$

Logo

$$y(k) = 1 - 0{,}6467(0{,}2934)^k\,. \tag{2.12}$$

Método do mapeamento pólo-zero

A função de transferência do sistema discreto é dada por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K}{z - e^{-T}} = \frac{K}{z - 0{,}3679} \ . \tag{2.13}$$

O ganho K é ajustado para que em baixas frequências, o ganho do sistema contínuo seja igual ao do sistema discreto, ou seja

$$\left.\tfrac{Y(s)}{U(s)}\right|_{s=0} = \left.\tfrac{Y(z)}{U(z)}\right|_{z=1} \Rightarrow 1 = \frac{K}{1 - 0{,}3679} \Rightarrow K = 0{,}6321 \ . \tag{2.14}$$

Portanto

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0{,}6321}{z - 0{,}3679} \ . \tag{2.15}$$

Para $U(z)$ degrau unitário, obtém-se

$$Y(z) = \frac{0{,}6321z}{(z-1)(z-0{,}3679)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}3679} \ . \tag{2.16}$$

Logo

$$y(k) = 1 - (0{,}3679)^k \ . \tag{2.17}$$

Na Tabela 2.1 são apresentados os valores da saída contínua $y(t)$ e discreta $y(k)$ $(k = 0, \ldots, 5)$ para os métodos analisados.

t, k	Contínua $y(t) = 1 - e^{-t}$	Retangular para trás	Bilinear sem compensação	Bilinear com compensação	Mapeamento pólo-zero
0	0,0000	0,5000	0,3333	0,3533	0,0000
1	0,6321	0,7500	0,7778	0,8103	0,6321
2	0,8647	0,8750	0,9259	0,9443	0,8647
3	0,9502	0,9375	0,9753	0,9837	0,9502
4	0,9817	0,9688	0,9918	0,9952	0,9817
5	0,9933	0,9844	0,9973	0,9986	0,9933

Tabela 2.1: Saída contínua $y(t)$ e discreta $y(k)$.

Na Figura 2.2 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau para os métodos analisados.

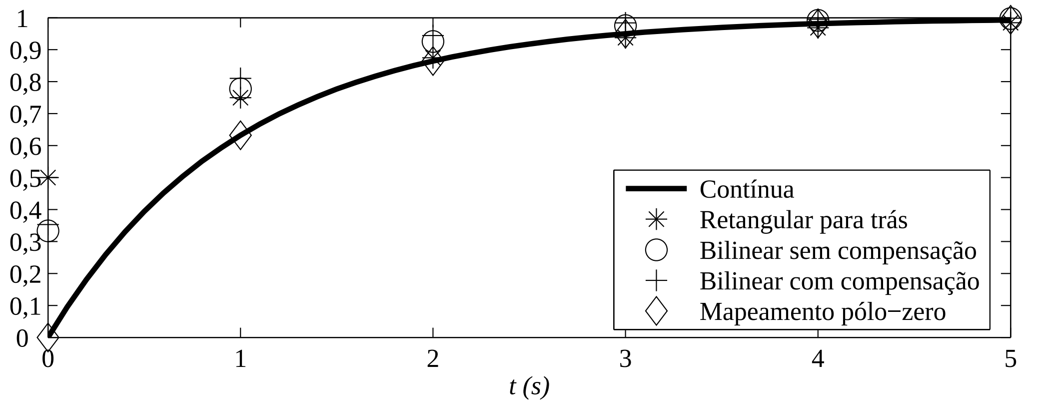

Figura 2.2: Resposta ao degrau.

2.2 Exercícios propostos

Exercício 2.2

Obtenha aproximações discretas para a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+0{,}5)(s+1)} \ . \tag{2.18}$$

Aplique os seguintes métodos: retangular para trás, mapeamento pólo-zero, bilinear sem compensação e com compensação de distorção na frequência $\omega_s = 1\text{rad/s}$. Para cada método, calcule a resposta analítica da saída $y(k)$ para $k = 0, \ldots, 5$, quando a entrada $u(k)$ for um degrau unitário. Suponha $T = 1s$.

Exercício 2.3

Projetar um controle discreto para um processo com função de transferência

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} \ , \tag{2.19}$$

de modo que a resposta para um degrau aplicado na referência tenha um sobressinal máximo de 16,3% e um tempo de acomodação de 2s, segundo o critério de 2%.

Exercício 2.4

Projetar um controle discreto para um processo com função de transferência

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2} \ , \tag{2.20}$$

de modo que a resposta para um degrau aplicado na referência tenha um sobressinal máximo de 20% e um tempo de subida de 1s.

Exercício 2.5

O esquema de um sistema de levitação magnética é apresentado na Figura 2.3. O sistema consiste de um eletroímã que suspende uma massa de material magnético. A levitação da massa é conseguida através do controle da distância $x(t)$, existente entre a massa e a bobina do eletroímã. Na bobina é instalado um sensor que mede a posição $x(t)$ da massa. A partir dessa medida, um sistema de controle discreto calcula uma tensão $u(t)$ a ser aplicada na entrada de um circuito de potência, que por sua vez gera uma corrente $i(t)$ a ser aplicada na bobina. A função de transferência linear do sistema é dada por

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_p K_s}{(s+1)(s-1)} \ . \tag{2.21}$$

Supondo $K_p = 0{,}1(A/V)$ e $K_s = 0{,}25(V/mm)$, projetar um controle discreto de modo que a resposta para um degrau aplicado na referência tenha um sobressinal máximo de 20% e um tempo de pico de 0,1s.

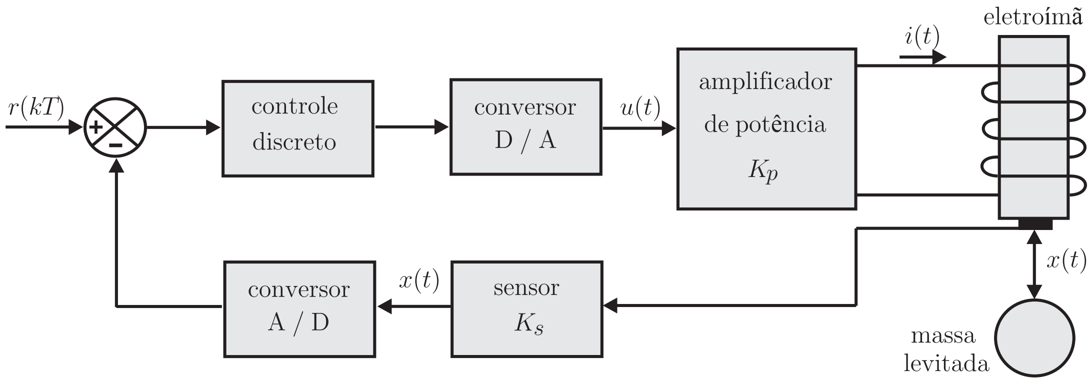

Figura 2.3: Sistema de levitação magnética.