Considerações sobre nossas dificuldades em compreender as propriedades topológicas da matéria

Esmerindo Bernardes[1]
[1]*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil*
(Dated: 8 de abril de 2019)

Como não estudamos monopolos magnéticos em nossos cursos de eletromagnetismo, perdemos a oportunidade de trilhar o caminho mais natural para a compreensão e familiaridade das propriedades topológicas da matéria. O estudo das propriedades de monopolos magnéticos, como feito por Dirac, possibilita a busca por situações análogas em outros sistemas físicos. Os invariantes topológicos em Física da Matéria Condensada é o resultado mais recente deste programa.

CONTEÚDO

I. INTRODUÇÃO

II. MONOPOLO MAGNÉTICO DE DIRAC

Suponha que, além da carga elétrica q_e, exista a carga magnética q_m, também obedecendo a lei de Coulomb (no vazio),

$$\mathbf{B} = C_m Q_m \frac{\hat{r}}{r^2} = C_m Q_m \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -C_m Q_m \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}, \; r \neq 0, \tag{1}$$

onde $C_m = \mu_0/4\pi$ é a constante magnética, tal que $C_e/C_m = 1/\mu_0\epsilon_0 = c^2$, sendo $C_e = 1/4\pi\epsilon_0$ a constante elétrica e c a velocidade da luz no vácuo (ϵ_0 é a permissividade e μ_0 é a permeabilidade do vácuo). Como no caso elétrico, o divergente do campo identifica sua fonte (neste caso, uma carga pontual),

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = C_m Q_m \nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi C_m\, Q_m\, \delta(\mathbf{r}), \tag{2}$$

onde usamos a distribuição delta de Dirac, introduzida em (A15), a qual nos permite definir uma "densidade" para uma carga pontual ($\rho_m = Q_m\, \delta(\mathbf{r})$).

O fluxo ϕ deste campo magnético produzido por uma carga pontual, com simetria radial, é calculado usando uma superfície esférica S^1 centrada na origem,

$$\phi = \int_{S^1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi C_m\, Q_m, \quad d\mathbf{S} = dS\, \hat{r}, \tag{3}$$

ou então usando o teorema de Gauss,

$$\phi = \int_{S^1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S^2} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}\, dV = 4\pi C_m\, Q_m, \tag{4}$$

onde S^2 é a esfera contendo a superfície esférica S^1 como borda.

O mesmo teorema em (4) nos informa enfaticamente que não podemos mais usar a relação $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor, pois $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = 0$ fornece um fluxo nulo. Uma contradição como esta é fruto típico da árvore de singularidades[1] e indica que o potencial vetor desse campo magnético deve ser irregular. Como o campo magnético (1) possui simetria esférica, esperamos que forma do potencial vetor deve apresentar também algum tipo de simetria, além de uma irregularidade.

Dirac escolheu um potencial azimutal (simetria em torno do eixo Z),

$$\mathbf{A} = A_\phi\, \hat{e}_\phi. \tag{5}$$

Justificativas? Talvez Pauli pudesse tê-las enunciadas. Dirac não precisa delas. Com esta escolha,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\left(A_\phi \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}\right)\hat{e}_r - \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta \\ &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\,\hat{e}_\rho + \left(\frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial\rho}\right)\hat{e}_k,\end{aligned} \tag{6}$$

em coordenadas esféricas e cilíndricas, respectivamente.

Requerendo que o rotacional (6) seja o campo magnético (1), então temos duas equações diferenciais para resolver, cuja solução geral é

$$A_\phi = C_m Q_m \frac{f(\phi) - \cos\theta}{r\sin\theta} \tag{7}$$

para as coordenadas esféricas, e

$$A_\phi = \frac{C_m Q_m}{\rho}\left(f(\phi) - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \tag{8}$$

para as coordenadas cilíndricas, onde $f(\phi)$ é uma função arbitrária. Que critérios (adicionais) poderíamos usar para determinar esta função arbitrária? Se ela for $f = \pm 1$, o potencial apresenta uma irregularidade (diverge) nos semi-eixos $\rho = 0$ ($r = |z|$), $z > 0$ ($\theta = 0$) e $z < 0$ ($\theta = \pi$), respectivamente. As coordenadas cilíndricas parecem mais adequadas para percebermos tais irregularidades.

---

[1] Singularidades e irregularidades são identificadas pela análise matemática, um tópico geralmente ignorado nos cursos de Métodos Matemáticos.

Apêndice A: Distribuições

Apesar de chamarmos de função a “função” $\delta(x)$ introduzida por Dirac, ela é algo além, uma “função generalizada” ou uma “distribuição”, definida por

$$\delta(x-a)[\phi] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\delta(x-a)\,dx = \phi(a). \tag{A1}$$

Note que precisamos de uma função auxiliar (ϕ) para revelar a ação da distribuição. A função arbitrária $\phi(x)$, conhecida como suporte, precisa possuir duas propriedades:

1. ser suave e possuir todas as suas derivadas;
2. ter um suporte compacto (ser igual a zero fora de um intervalo limitado).

A distribuição definida por (A1) tem algumas propriedades gerais, independentes de ser a delta de Dirac:

1. ela é um funcional linear (transforma funções em números),
$$\delta[\alpha\,\phi + \beta\,\psi] = \alpha\,\delta[\phi] + \beta\,\delta[\psi], \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}; \tag{A2}$$
2. a derivada dela é outra distribuição,
$$\delta'[\phi] = -\delta[\phi']; \tag{A3}$$
3. ela é homogênea de grau um e par,
$$\delta(\alpha x)[\phi] = \frac{\delta(x)[\phi]}{|\alpha|}; \tag{A4}$$
4. a composição dela com uma função $g(x)$ é
$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad g(x_i)=0,\ g'(x_i)\neq 0, \tag{A5}$$
onde as raízes devem ser simples;
5. a sua versão tridimensional é o produto de distribuições,
$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{A6}$$

O laplaciano, $\Delta = \nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$, da função $1/r$, onde r é a norma do vetor radial, tem uma conexão direta com a distribuição de Dirac (A1), a qual é muito útil em Eletromagnetismo. Primeiro é necessário notar que a ação do laplaciano em $1/r$ somente não está definida na origem ($r=0$),

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\frac{1}{r} = 0, \quad r\neq 0. \tag{A7}$$

Segundo, como a função suporte ϕ é regular, ela admite uma série de Taylor em torno de $r=0$,

$$\phi(x,y,z) = \phi(0) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(0)\,x_i + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(0)\,x_ix_j + \ldots \tag{A8}$$

a qual pode ser reescrita em termos das coordenadas esféricas na forma

$$\phi(r,\Omega) = \phi(0) + f_1(\Omega)\,r + f_2(\Omega)\,r^2 + \ldots \tag{A9}$$

onde Ω representa as coordenadas angulares. Terceiro, precisamos de um processo de regularização,

$$r_\eta = \sqrt{r^2+\eta^2}, \quad \lim_{\eta\to 0} r_\eta = r. \tag{A10}$$

Assim,

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \lim_{\eta\to 0}\nabla^2\frac{1}{r_\eta} = -\lim_{\eta\to 0}\frac{3\eta^2}{r_\eta^5}. \tag{A11}$$

Desta forma verificaremos que a ação do laplaciano em $1/r$ se comporta como uma distribuição,

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{1}{r}[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^3} dV\,\phi\,\nabla^2\frac{1}{r} = \int_{\mathbb{R}^3/S^2} dV\,\phi\,\nabla^2\frac{1}{r} + \int_{S^2} dV\,\phi\,\nabla^2\frac{1}{r} \\ &= \int_{S^2} dV\,\phi\,\nabla^2\frac{1}{r} = -\lim_{\eta\to 0}\int_{S^2} dV\,\phi(r,\Omega)\frac{3\eta^2}{r_\eta^5}.\end{aligned} \tag{A12}$$

Uma pausa para alguns esclarecimentos sobre os procedimentos de integração utizados até aqui. O espaço de integração $\mathbb{R}^3$ foi dividido em duas regiões: uma limitada por uma esfera unitária S^2 centrada na origem $r=0$ e o complemento $\mathbb{R}^3/S^2$, onde a ação do laplaciano é nula.

Para continuarmos, trocaremos em (A12) a função suporte ϕ pela sua série de Taylor (A9) em torno de $r=0$ e o elemento de volume por $dV = dr\,dS$, com o elemento de área $dS = r^2 d\Omega$, onde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi$ é o ângulo sólido compreendido pela área dS,

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{1}{r}[\phi] = &-\phi(0)\int_{\partial S^2} d\Omega \lim_{\eta\to 0}\int_0^1 dr\,\frac{3\eta^2 r^2}{(r^2+\eta^2)^{5/2}} \\ &-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\partial S^2} d\Omega\, f_k(\Omega)\lim_{\eta\to 0}\int_0^1 dr\,\frac{3\eta^2 r^{2+k}}{(r^2+\eta^2)^{5/2}} \\ &= -4\pi\,\phi(0).\end{aligned} \tag{A13}$$

Note que os limites devem ser executados após as integrações (um integral cria funções novas). A primeira integral radial em (A13) tem uma forma simples,

$$\int_0^1 dr\,\frac{3\eta^2 r^2}{(r^2+\eta^2)^{5/2}} = \frac{1}{(1+\eta^2)^{3/2}}. \tag{A14}$$

Os termos de potências ímpares na segunda integral radial em (A13) são proporcionais a η^{k+1} e aqueles de potências pares são proporcionais a η^2, o que anula completamente a contribuição desta segunda integral, após a passagem do limite $\eta\to 0$.

Desta forma, interpretamos a ação do laplaciano em $1/r$: se comporta como uma distribuição (tridimensional), conhecida como delta de Dirac,

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(r) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}), \quad r\geq 0. \tag{A15}$$