



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

---

Departamento de engenharia de Transportes

# Informações Espaciais II

## Notas de Aulas

Laboratório de Topografia e Geodésia



# Sumário

---

<b>Parte 1 — A Evolução dos Referenciais Usados em Geodésia — A Era Moderna .....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1 — A Evolução dos Referenciais Usados em Geodésia — A Era Moderna .....</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução.....	4
1.2 A Geodésia e a Astronomia .....	5
1.3 Coordenadas Geodésicas e Cartesianas.....	6
1.4 Referenciais: Motivação e Conceituação.....	7
1.5 Referencial Celeste.....	10
1.6 Referencial Terrestre .....	12
1.7 Materializações do ITRS .....	13
1.8 Vinculação entre o TRS e CRS.....	15
1.9 Agradecimentos .....	18
1.10 Referências .....	18
 <b>Parte 2 — Altitude: O que Interessa e como Equacionar? .....</b>	<b>21</b>
<b>Capítulo 1 — Altitude: O que Interessa e como Equacionar?.....</b>	<b>23</b>
1.1 Introdução.....	24
1.2 A Altimetria e o PVCG .....	25
1.3 O Nivelamento Geométrico .....	27
1.4 Altitude Científica .....	28
1.5 Considerações Finais .....	30
1.6 Referências .....	30

<b>Parte 3 — Sistema de Projeção UTM.....</b>	<b>31</b>
<b>Capítulo 1 — Geodésia e Geometria do Elipsóide .....</b>	<b>33</b>
1.1 Geodésia.....	33
1.2 Forma da Terra, Geóide, Elipsóide .....	34
1.3 Elipsóide de Referência .....	35
1.4 Elipsóides no Brasil .....	37
1.5 Elementos do Elipsóide .....	38
1.5.1 Sistema de coordenadas.....	38
1.5.2 Raios de curvatura sobre o elipsóide .....	39
1.6 Exercícios Propostos.....	42
<b>Capítulo 2 — Sistema de Projeção Cartográfica .....</b>	<b>45</b>
2.1 Sistema de Projeção.....	45
2.2 Classificação das Projeções.....	46
2.2.1 Classificação quanto à propriedade que conservam .....	46
2.2.2 Classificação quanto ao método construtivo .....	46
2.2.3 Classificação quanto ao tipo de superfície de projeção adotada .....	47
2.2.4 A classificação quanto à posição relativa da superfície de projeção ou à orientação do eixo dessa superfície .....	48
2.3 Designação.....	51
2.4 Seleção do Sistema de Projeção.....	51
<b>Capítulo 3 — Representações Conformes.....</b>	<b>53</b>
3.1 Indicatriz de Tissot (sentido físico).....	53
3.2 Equações de Representação Conforme .....	55
<b>Capítulo 4 — Sistema UTM .....</b>	<b>57</b>
4.1 Breve Histórico e Especificações.....	57
4.2 Relações Fundamentais .....	60
4.3 Dedução das Equações de Transformação .....	60
4.4 Fórmulas de Transformação de Coordenadas Geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ) em Plano Retangulares UTM (N,E) — Problema Direto.....	63
4.4.1 Exemplo: Marco municipal do IGG (Cidade Universitária — SP) .....	64

4.4.2	Exemplo: Marco geodésico .....	64
4.4.3	Exemplo: Outro marco (exemplo fornecido pelo IBGE) .....	65
4.5	Fórmula de Transformação de Coordenadas — UTM (planos retangulares, N, E) para Geodésicas ( $\varphi$ , $\lambda$ ) — Problema Inverso .....	65
4.5.1	Exemplo para Testes .....	66
4.6	Observação sobre Fórmula e Precisão .....	67
<b>Capítulo 5 — Convergência de Meridianos .....</b>		<b>69</b>
5.1	Sentido Físico .....	69
5.2	Análise do Sinal da Convergência Meridiana ( $\gamma$ ) .....	70
5.3	Equações da Convergência de Meridiano .....	71
5.4	Exemplo .....	73
<b>Capítulo 6 — Fator Escala .....</b>		<b>75</b>
6.1	Sentido Físico .....	75
6.2	Fórmulas a Serem Utilizadas em um Programa Computacional.....	77
<b>Capítulo 7 — Problemas Típicos.....</b>		<b>79</b>
7.1	Introdução.....	79
7.2	Monografia de Pontos .....	79
7.3	Mudança de Elipsóide de Referência .....	80
7.4	Reduções nas Distâncias .....	80
7.5	Reduções Angulares .....	82
7.6	Transporte de Coordenadas Elipsóidicas.....	84
7.7	Transporte de Coordenadas UTM.....	84
7.8	Roteiro Simplificado para Instalação de Marcos de Referência para Obras de Engenharia.....	84
<b>Parte 4 — Sistema Topográfico Local .....</b>		<b>87</b>
<b>Capítulo 1 — Sistema Topográfico Local .....</b>		<b>89</b>
1.1	Introdução.....	89
1.2	Definição do Plano Topográfico Local.....	90
1.3	Área de Abrangência do Sistema .....	90

1.4	Coordenadas Plano Retangulares.....	91
1.5	Concepção do Sistema .....	92
1.5.1	Distâncias Projetadas .....	92
1.5.2	Origem das Coordenadas .....	93
1.5.3	Orientação .....	93
1.6	Estabelecimento do Sistema.....	96
1.7	Vantagens do Sistema.....	97
1.8	Fórmulas para Transformação de Coordenadas Geodésicas em Topográficas Locais e Vice-versa .....	97
1.8.1	Transformação de coordenadas geodésicas em Planoretangulares — Sistema Topográfico local .....	97
1.9	Transformação de Coordenadas Planoretangulares — Sistema Topográfico Local em Coordenadas Geodésicas .....	100
1.9.1	Problema.....	100
1.9.2	Fórmulas .....	100
1.10	Determinação do Norte Geográfico a Partir das Coordenadas Planoretangulares no Sistema Topográfico Local de Pontos Definidores de Azimutes Planos (Topográficos) .....	102
1.10.1	Problema.....	102
1.10.2	Fórmulas .....	103
1.11	Exemplo de Transformação de Coordenadas Geodésicas em Planoretangulares no Sistema Topográfico Local.....	103
1.11.1	Dados.....	103
1.11.2	Cálculos preliminares .....	104
1.11.3	Cálculo de $x$ .....	105
1.11.4	Cálculo de $x$ .....	105
1.11.5	Cálculo de $y$ .....	105
1.11.6	Cálculo de $y$ .....	105
1.11.7	Cálculo de $A$ (azimute topográfico da direção $OP$ ) .....	106
1.11.8	Cálculo de $\gamma$ (convergência meridiana em $P$ ) .....	106
1.11.9	Cálculo de $A'$ (somente para aplicação na PROVA) .....	106
1.11.10	Prova.....	106
1.11.11	Resumo .....	106
1.11.12	Conclusões.....	107

1.12	Exemplo de Transformação de Coordenadas Planoretangulares — Sistema Topográfico Local em Coordenadas Geodésicas .....	108
1.12.1	Dados .....	108
1.12.2	Cálculos Preliminares.....	108
1.12.3	Cálculo de $\delta\varphi''$ .....	109
1.12.4	Correção de $\Delta\varphi$ .....	109
1.12.5	Cálculo de $\varphi$ .....	110
1.12.6	Cálculo de $N_p$ .....	110
1.12.7	Cálculo de $\Delta\lambda_1''$ .....	110
1.12.8	Cálculo de $\Delta\lambda''$ .....	110
1.12.9	Cálculo de $\lambda$ .....	110
1.12.10	Cálculo de F .....	110
1.12.11	Cálculo de $\Delta A$ .....	110
1.12.12	Cálculo de $A'$ .....	111
1.12.14	Resumo .....	111
1.13	Conclusões .....	111
1.14	Referências .....	112
 <b>Parte 5 — Sistema de Posicionamento por Satélite GPS.....</b>		<b>113</b>
<b>Capítulo 1 — Introdução.....</b>		<b>115</b>
1.1	Geodésia — Definição .....	115
1.2	Evolução Histórica do Posicionamento .....	115
 <b>Capítulo 2 — Conceitos e Definições.....</b>		<b>117</b>
2.1	Superfícies de Referência .....	117
2.2	Coordenadas Geodésicas ou Elipsoidais e Cartesianas.....	118
2.3	Datum.....	120
 <b>Capítulo 3 — Características do Sistema GPS.....</b>		<b>125</b>
3.1	Estrutura dos Satélites e dos Sinais .....	125
3.2	Formato e Conteúdo da Mensagem .....	127
3.3	Sistema de Tempo GPS .....	130

<b>Capítulo 4 — Métodos e Modelos Matemáticos.....</b>	<b>133</b>
4.1 Observações do Código — Distância .....	133
4.2 Medidas da Fase .....	134
4.2.1 Diferença de pura fase com o tempo .....	136
4.2.2 Simples diferença de fase .....	137
4.2.3 Dupla diferença de fase .....	138
4.2.4 Tripla diferença de fase.....	138
4.3 Combinações Lineares das Observações .....	139
4.4 Solução da Ambigüidade .....	140
4.5 Métodos Rápidos de Posicionamento .....	141
4.6 DGPS.....	142
4.7 Posicionamento Preciso por Ponto .....	144
<b>Capítulo 5 — O GPS e a Altimetria.....</b>	<b>145</b>
<b>Capítulo 6 — O GPS e a Engenharia.....</b>	<b>149</b>
6.1 Apoio Topográfico .....	149
6.2 O GPS no Transporte .....	150
<b>Capítulo 7 — Considerações Finais.....</b>	<b>151</b>
Referências.....	153



# Parte 1

---

## A Evolução dos Referenciais Usados em Geodésia — A Era Moderna

---

Prof. Dr. Denizar Blitzkow  
Dr<sup>a</sup>. Ana Cristina Cancoro de Matos

---



# A Evolução dos Referenciais Usados em Geodésia — A Era Moderna

## Resumo

A Era Espacial permitiu desenvolver metodologias de observação que levaram ao estudo de fenômenos até então impossível de ser realizado. Pode-se citar o deslocamento das placas litosféricas, as marés terrestres e oceânicas, os movimentos do eixo de rotação da Terra, as variações da velocidade de rotação da mesma, o movimento dos satélites artificiais, etc. A qualificação e a quantificação destes fenômenos exigem o estabelecimento de referenciais adequados. Após anos de estudo e análise concluiu-se que dois referenciais seriam suficientes para quantificar todos os fenômenos relacionados com os interesses da geodésia, da engenharia e da geodinâmica: um referencial terrestre e um referencial celeste. A conceituação, a definição e a realização dos referenciais constituem as etapas naturais para o seu estabelecimento e a sua manutenção. Através de observações espaciais, seja a corpos celestes seja aos satélites artificiais, os referenciais são materializados. O presente trabalho apresenta uma descrição geral da evolução dos referenciais na era moderna, de seu estabelecimento e de sua manutenção, função atribuída atualmente ao IERS.

## Abstract

The Space Era brought the attention to methodologies of observation that allowed the study of phenomena impossible to be considered a few years ago. The lithospheric plates, the earth and ocean tides, the movements of the Earth rotation axis, the change in the angular velocity, the movements of artificial satellites are some examples. The qualification and quantification of these phenomena are only possible if convenient reference systems are established. After many years of analysis and research the attention was addressed to two reference coordinate systems: a terrestrial reference system and a celestial reference system. They are sufficient to deal with all geodetic, engineering and geodynamic phenomena. The concept, the definition and the materialization are the natural steps for the establishment and the maintenance of the reference systems. The materialization is carried out through the observation of satellites as well as space objects. This paper is intended to present a description on the evolution of the reference systems and the present maintenance on the responsibility of IERS.



## 1.1 Introdução

Conforme o dicionário Webster, “Geodésia é um ramo da matemática aplicada que se preocupa com a determinação do tamanho e da forma da Terra, com a exata posição de pontos sobre a sua superfície e com a descrição das variações do seu campo de gravidade”. Com certeza a Geodésia atual vai muito além disso; não é simples matemática aplicada e nem se dedica exclusivamente a um processo de observações.

Entre muitos exemplos de fenômenos com os quais a Geodésia tem envolvimento, sabe-se que a atmosfera é a fonte principal de excitação da rotação da Terra em escala sazonal e interanual. Em conseqüência, o momento angular da Terra (duração do dia), é muito correlacionado com o momento angular atmosférico (MAA) axial. Além disso, incertezas do vapor de água na atmosfera e os seus efeitos na propagação de sinais são reconhecidamente algo que merece a atenção no uso do VLBI (Very Long Baseline Interferometry), no GPS (Global Positioning System) ou mais genericamente no GNSS (Global Navigation Satellite System) e no SLR (Satellite Laser Range). Estas características vêm integrando a Meteorologia com a Geodésia e são estudados e analisados através de redes GNSS de monitoramento contínuo. A análise das observações destas redes permite ainda a determinação do TEC (Total Electron Content) na ionosfera. Mas não fica por aí as interações da geodésia com outras atividades. O objetivo primordial do GPS, posicionamento instantâneo com precisão de poucos metros, tem aplicação na navegação terrestre, aérea e marítima; no controle de frotas com conseqüências positivas na logística de transportes; na agricultura de precisão com benefícios na avaliação da produtividade e no uso racional dos insumos agrícolas. Além disso, as medidas precisas (centimétricas) do GPS, possíveis através da técnica de ‘Fase de Batimento da Portadora’, permitem aplicações na área da engenharia tanto na locação de obras quanto no monitoramento de grandes estruturas.

O aprimoramento das redes GPS, as modernas missões CHAMP (**C**hallenging **M**inisatellite **P**ayload) e GRACE (**G**ravity **R**ecovery and **C**limate **E**xperiment) e a futura missão (2007/2008) GOCE (**G**ravity field and steady-state **O**cean **C**irculation **E**xperiment), permitem vislumbrar novos e desafiadores interesses. Um ponto importante a focalizar é a variação no tempo do campo gravitacional. Avaliações do referido campo através de satélites já indicaram avanços consideráveis no entendimento da estrutura e da dinâmica núcleo/manto, da estrutura térmica e dinâmica na litosfera, da circulação oceânica e da tectônica de placas [Dickey, 2001].

Observa-se, desde o início do último século, um desequilíbrio progressivo do efeito estufa devido a um aumento de certos gases na atmosfera, em particular, o CO<sub>2</sub>. A conseqüência direta é o aumento constante da temperatura da Terra. Um dos efeitos imediatos é a elevação do nível médio do mar que vem ocorrendo, em caráter global, à taxa de 1 – 3 mm/ano no último século. As fontes para a elevação do nível do mar ainda são incertas. A expansão térmica dos oceanos é, com certeza, a mais importante. Mas, o derretimento das geleiras nas altas montanhas e das calotas polares certamente contribui de forma considerável. Isto acarreta numa redistribuição de massas cujo efeito é a variação, no tempo, do campo gravitacional e, portanto, da superfície geoidal.



No passado se dividia a geodésia em física, geométrica e espacial. Esta divisão perdeu sua razão de ser em função da interação que existe entre as metodologias que envolvem as atividades envolvidas nas três áreas. A tendência atual é separar três objetos distintos da geodésia: a geometria da Terra, os parâmetros de orientação do planeta no espaço e o campo de gravidade envolvendo o geóide. Enfim, pode-se concluir que a Geodésia tem um envolvimento muito grande com várias atividades da geociência.

## 1.2 A Geodésia e a Astronomia

A Geodésia tem uma estreita e antiga relação com a Astronomia no que diz respeito ao estabelecimento de referenciais. A Astronomia basicamente se dedica à observação dos corpos celestes: estrelas, planetas, cometas, quasares, etc., a partir de suas radiações luminosas. Ela possui três razões para isso. Um dos primeiros interesses desde as antigas civilizações pela observação das estrelas foi quantificar a emissão de luz das mesmas, objeto da **fotometria**. Registros muito antigos da astronomia já classificavam os corpos celestes em ordem de grandeza em função da intensidade luminosa que chegava ao observador. Por outro lado, observando uma estrela em diferentes épocas, pode-se verificar se a luminosidade varia com o tempo. O estudo desta variabilidade leva a vários fenômenos associados às estrelas: pulsação, sistemas múltiplos, explosões, micro lentes gravitacionais, etc. Um outro interesse bastante antigo é pela posição do astro, objeto da **astrometria**. Embora o maior interesse seja na posição espacial, o não conhecimento das distâncias da grande maioria dos astros faz com que, quase sempre, a palavra posição signifique a direção de onde vem a luz, isto é, a posição do astro na esfera celeste. Neste aspecto, há diversas possibilidades de posicionar o astro, mas a que se mostrou mais conveniente, por independe do movimento de rotação da Terra, foi através das coordenadas equatoriais (uranográficas): ascensão reta e declinação. Esta aplicação une mais intimamente a Geodésia e a Astronomia. Finalmente, a era mais moderna permitiu desenvolver sensores para medir o espectro das radiações oriundas das estrelas, caracterizando a **espectroscopia**. Entre outras possibilidades, consegue-se depreender a existência de raios de comprimentos distintos de onda no espectro. Isto leva a conclusões sobre, por exemplo, a constituição físico-química do astro.

Para a Geodésia, a astrometria caracteriza a aplicação mais fundamental uma vez que este tipo de observação, conduzida através de um equipamento ótico (luneta) ou mais recentemente eletrônico (VLBI), permite a definição e a materialização do sistema celeste de referência.

Por outro lado, para entender conceitos a serem estabelecidos nos parágrafos a seguir, é essencial considerar certos fenômenos associados com a observação de um astro. O primeiro deles é a paralaxe. Trata-se da aparente mudança de posição (direção) do corpo celeste (deslocamento paralático) que ocorre quando se muda a posição do observador. Isto tem origem em distintos aspectos relacionados ao observador. A observação em instantes diferentes resulta numa paralaxe chamada diária, fruto do deslocamento do ponto de observação, em consequência do movimento de rotação da Terra. Por outro lado, se o observador estiver sobre a superfície da Terra ou for imagi-

nado no centro de massa da mesma, haverá uma paralaxe devido ao deslocamento correspondente. Além disso, a Terra tem seu movimento de translação ao redor do Sol, o que resulta na chamada paralaxe anual, com diferentes direções do astro em épocas distintas do ano. Assim sendo, a observação do astro a partir da superfície física da Terra resulta na determinação de direções vinculadas a um referencial topocêntrico. Se houver necessidade de referir as direções ao geocentro ou ao baricentro do sistema solar é preciso eventualmente corrigir a paralaxe resultante da translação correspondente. Um segundo fenômeno é a aberração. A título de ilustração, observe-se o que ocorre com um transeunte em dia de chuva; parado, na presença de uma chuva sem vento, ele observa os pingos caindo verticalmente. Ao se deslocar, a sensação é de que os pingos caem inclinados vindos na direção contrária ao movimento e, espontaneamente, inclina o guarda-chuva. Como consequência dos movimentos do observador (rotação e translação) e do fato da velocidade da luz ser finita, este mesmo fenômeno deslocará a luz que é recebida dos astros na direção do movimento do observador.

Em função dos movimentos de um observador na superfície da Terra, eventualmente com acelerações não desprezíveis, a utilização do baricentro do sistema solar como origem de um sistema de referência, representa uma aproximação muito melhor de um referencial inercial. Isto é possível dentro da relatividade geral.

### 1.3 Coordenadas Geodésicas e Cartesianas

Segundo se lê em [Gemael, 1981] “até há bem pouco, os geodestas se valiam de dois escalares — a latitude ( $\varphi_G$ ) e a longitude ( $\lambda_G$ ) — para definir, não a posição de um ponto P sobre a superfície física da Terra, mas de sua projeção P' sobre a superfície do modelo de referência adotado, o elipsóide de revolução (Figura 1.1); um terceiro escalar — a altitude ortométrica (H) — relaciona o ponto P com o geóide (superfície equipotencial fundamental do campo de gravidade). Este terceiro número, de natureza física e não geométrica como os anteriores, não constitui com aqueles um conjunto capaz de fixar a posição de um ponto no espaço. Primeiramente as duas redes, horizontal (triangulação,  $\varphi$  e  $\lambda$ ) e vertical (nivelamento, H), são independentes. Em segundo lugar, a altitude ortométrica não define a posição do ponto em relação ao elipsóide, mas sim ao geóide”. Finalmente, há que ressaltar que a determinação da altitude ortométrica depende do conhecimento da distribuição de densidades no interior da crosta; os modelos existentes de distribuição de densidade ainda são insuficientes para o cálculo da altitude ortométrica a partir do nivelamento geométrico, ao menos em caráter continental e dentro das precisões exigidas, e.g., na geodésia e na engenharia.

A partir da década de 60, o desenvolvimento da Geodésia Celeste (tridimensional), através do posicionamento por satélite, permitiu obter as coordenadas cartesianas ( $y_1, y_2, y_3$ ) do centro elétrico da antena numa estação de rastreamento, referidas a um terno cartesiano “geocêntrico” ( $Y_1, Y_2, Y_3$ ). Tais coordenadas podem ser transformadas para um terno cartesiano “quase-geocêntrico” ou “local”, isto é, com origem no centro geométrico do elipsóide, e convertidas em curvilíneas ( $\varphi, \lambda, h$ ), h representando a altitude geodésica ou elipsoidal, consistente com as duas outras coordenadas em função do elipsóide adotado (Figura 1.1).

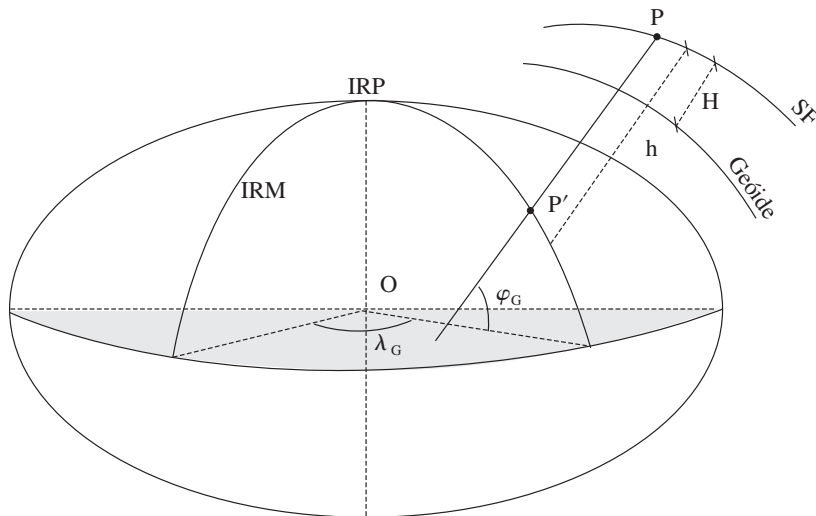


Figura 1.1 Representação das coordenadas geodésicas no elipsóide.

## 1.4 Referenciais: Motivação e Conceituação

A Terra, seu meio ambiente e os corpos celestes em geral, não são estáticos: deslocam-se, giram e podem se deformar. Vários fenômenos dinâmicos podem ser citados como exemplos:

- movimentos de placas da litosfera: inter-placa e intra-placa
- marés oceânicas e terrestres
- efeitos de carga sobre a crosta (e.g., soerguimento pós-glacial)
- movimento de rotação
- deslocamento do eixo de rotação
- comportamento dinâmico do sistema Terra-Lua
- movimento dos planetas e dos satélites, etc.

O estudo qualitativo e quantitativo de tais fenômenos exige o estabelecimento de referenciais adequados. A Era Moderna, valendo-se das técnicas espaciais, conseguiu aprofundar os estudos e chegou a uma conclusão definitiva em relação ao problema da referência. As etapas racionais necessárias para o estabelecimento de um sistema de referência estão equacionadas em [Oliveira, 1998] e são assim enunciadas:

- Conceito
- Definição
- Materialização
- Densificação

Do ponto de vista **conceitual** um referencial ideal seria aquele em que a origem seguisse a lei newtoniana da inércia (se mantivesse em repouso ou em movimento retilíneo uniforme). Um referencial em que a origem seja o centro de massa da Terra não pode ser definido como inercial por força do movimento de translação que implica numa aceleração da origem. Esta aceleração é pequena e daí a razão para qualificar o referencial de “quase-inercial”. Porém, se a origem for transladada para o baricentro do sistema solar, o que é possível no contexto da relatividade geral, o sistema passa a ser inercial. Além disso, é necessário um referencial cujos eixos coordenados sejam fixos no espaço, tanto em relação à origem quanto à orientação, ou estejam sujeitos a variações no tempo bem conhecidas em relação a algo fixo. A questão relacionada com a orientação dos eixos é complicada até certo ponto, em função dos fenômenos que envolvem o movimento do eixo de rotação da Terra, mas a era moderna permitiu um equacionamento adequado.

Por outro lado, para que seja possível a realização de comparações é necessário adotar “convencionalmente” uma **definição** do referencial. Para isso são estabelecidos princípios que fixam a origem, a orientação dos eixos e a escala de sistemas de coordenadas.

Através de observações levadas a efeito a partir de pontos devidamente materializados sobre a superfície da Terra e conduzidos sobre objetos adequados para o caso, estabelece-se um conjunto de coordenadas de referência para os pontos. Este conjunto **materializa** uma rede de referência, normalmente com caráter global, utilizada para vincular outras determinações. Um exemplo de uma rede de referência materializada é a do IGS (International GNSS Service) (Figura 1.2).

As redes com características globais implicam numa distribuição de pontos separados por centenas e até milhares de quilômetros. As necessidades práticas, bem como, as técnicas de obtenção de coordenadas vinculadas a uma referência global exigem o estabelecimento de redes com um espaçamento menor entre os pontos materializados (poucas dezenas de quilômetros). Isto implica na implantação de pontos de **densificação**, os quais compõem as redes de referência continentais, nacionais ou regionais como, por exemplo, a rede SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) que se enquadra no primeiro caso (Figura 1.3).

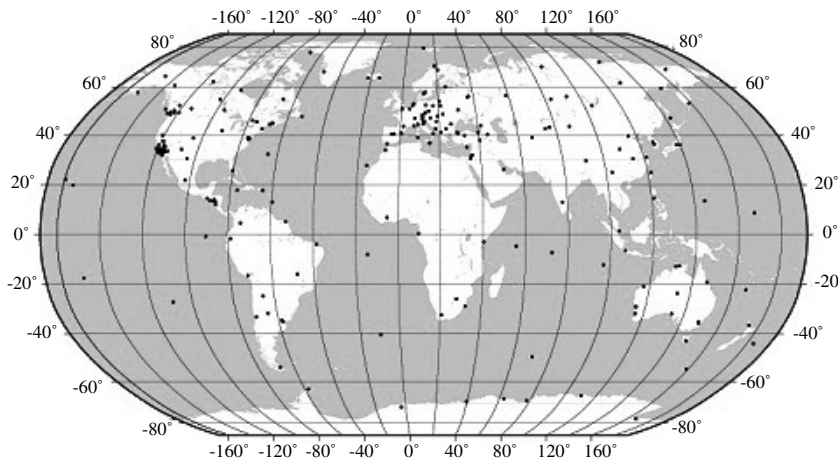


Figura 1.2 Rede de referência do IGS.



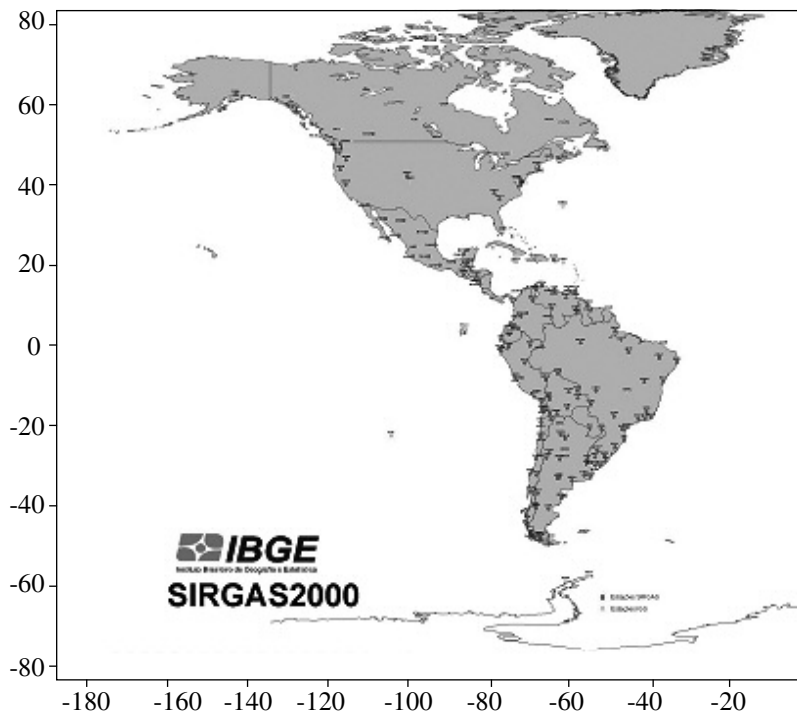


Figura 1.3 Rede de Referência do SIRGAS.

Três associações internacionais, diretamente interessadas, têm envidado esforços na conceituação, na definição e na materialização de referenciais: a Associação Internacional de Geodésia, a União Astronômica Internacional e a União Geodésica e Geofísica Internacional. Elas são conhecidas pelas suas siglas, respectivamente: IAG, IAU e IUGG. A densificação tem ficado por conta de organizações nacionais e locais.

A Era Espacial, depois de algumas décadas de estudo e análise, permitiu concluir que dois referenciais são suficientes: o Referencial Celeste (RC) e o Referencial Terrestre (RT). O RC tem sua origem no baricentro do sistema solar e seus eixos orientados fixamente no espaço. O RT acompanha a Terra em seu movimento de rotação entorno do eixo e de translação ao redor do Sol e tem sua origem no centro de massa da Terra.

A IUGG e a IAU criaram em 1987, tendo iniciado seu funcionamento em 1º janeiro de 1988, um serviço especial denominado, na época, “International Earth Rotation Service” (IERS), hoje “International Earth Rotation and Reference Systems Service”, mantida a mesma sigla. O IERS substituiu o IPMS (International Polar Motion Service) e a sessão de rotação da Terra do BIH (Bureau International de l’Heure). O IERS é um dos membros da chamada Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis (FAGS) e é responsável pelas seguintes funções:

- a definição e a manutenção de um sistema de referência terrestre convencional baseado em técnicas de observações de alta precisão da geodésia espacial;

- a definição e a manutenção de um sistema de referência celeste convencional baseado em fontes de rádio extra-galáticas e a relação do mesmo com outros sistemas celestes de referência;
- a determinação dos parâmetros de orientação da Terra (EOP — Earth Orientation Parameters) que servem para conectar os dois sistemas, em conjugação com um modelo convencional da precessão/nutação;
- a organização de atividades operacionais para a observação e a análise de dados, coletando e arquivando dados e resultados apropriados, e disseminando os mesmos para atendimento às necessidades dos usuários. [IERS, 1995].

## 1.5 Referencial Celeste

A origem e os eixos de um referencial, em particular o Referencial Celeste (RC), não podem ser materializados de forma direta. Eles são estabelecidos (definidos) de uma forma convencional e é necessário escolher uma estrutura física que sirva de base para a sua materialização. Durante muito tempo utilizou-se o conjunto de 1535 estrelas do catálogo FK4 cujas coordenadas uranográficas, ascensão reta e declinação, eram definidas. Este sistema completava-se com os valores de precessão e da obliquidade da eclíptica de Newcomb e a teoria da nutação de Woollard [Seeber, 1993].

Em meados da década de 80 o Astronomisches Rechen Institut compilou um novo catálogo, o FK5 [Kovalevsky et al., 1989]. Resultado da comparação de 100 novos catálogos com o FK4, o FK5 permitiu melhorar os movimentos próprios individuais das estrelas de um fator 2. O sistema usou os valores convencionais de precessão IAU(1976), uma nova determinação do equinócio, do equador e a rotação do padrão local de repouso [Kovalevsky et al., 1989]. Esta última inovação introduziu o sistema parcialmente cinemático e não puramente dinâmico. A precisão média atingida no FK5 foi de  $\pm 0,02''$  em posição e  $\pm 0,8$  mas (miliarcosegundo) por ano no movimento próprio. As coordenadas dos catálogos estão referidas, por convenção, à época J2000, que corresponde à época juliana em 1<sup>o</sup> de janeiro de 2000, 12hs TDB (Tempo Dinâmico Baricêntrico) [Torge, 2001, §2.2.2]. O calendário Juliano foi estabelecido pelo imperador romano Júlio Cesar e tem como origem o ano 4713 a.C., constituindo uma contagem contínua de dias. O ano Juliano tem a mesma duração do ano civil, 365,25 dias solares médios. Assim, a chamada época J2000, 1<sup>o</sup> de janeiro de 2000, corresponde a 2.451.545,0 dias Julianos.

Em 1991, nas recomendações sobre Sistemas de Referência, a IAU optou por objetos extragaláticos distantes, em substituição às estrelas, que definissem de forma adequada um referencial celeste e adotou direções que fossem fixas em relação a um conjunto selecionado destes objetos [Gontier et al., 1997]. De conformidade com esta recomendação, o ICRS (International Celestial Reference System) é realizado pelo ICRF (International Celestial Reference Frame) definido através de um catálogo de coordenadas equatoriais (uranográficas), ascensão reta e declinação, de objetos extragaláticos; as coordenadas são obtidas a partir de observações VLBI, relativas ao equador médio em J2000 [McCarthy, 1996]. Uma vantagem fundamental dos objetos extragaláticos é que suas distâncias são tão grandes que seus movimentos próprios são indetectáveis, mesmo com as técnicas atuais mais precisas, contrariamente ao que ocorre com as estre-

las, o que garante uma estabilidade rotacional ao referencial. Além disso, ainda devido à distância que os separa da Terra, as paralaxes diurna e anual também são imperceptíveis. Mesmo a paralaxe oriunda de uma suposta observação a partir do centro de massa da Terra ou do baricentro do sistema solar é desprezível. Daí afirmar-se que, dentro do conceito da relatividade geral, a origem do ICRS é o baricentro do sistema solar. Esta característica permite assegurar que, para todos os efeitos, o ICRS é um sistema inercial. Na transformação entre os referenciais celeste e terrestre não há necessidade de considerar a referida translação entre as origens, uma vez que o interesse exclusivo é pela orientação dos eixos. Os objetos referidos acima são conhecidos como quasares, abreviação da expressão em inglês: Quasi-Stellar Radio Source (Quasars). A precisão típica na posição dos quasares é de  $\pm 0,35$  mas em ascensão reta e  $\pm 0,40$  mas em declinação.

A nova escolha de objetos extragaláticos para a realização de direções fiduciais foi possível graças à técnica altamente precisa de observação, o VLBI. Trata-se de uma técnica geométrica que mede precisamente direções no espaço e a distância entre as antenas na superfície. Usando um par de antenas, que podem estar separadas por até milhares de quilômetros, a diferença no tempo de chegada nas duas estações de sinais de alta frequência emitidos por fontes estelares é medida com precisão de poucos pico-segundos (a luz percorre 1 mm em 3 pico-segundos). O atraso no tempo e sua derivada primeira são reconstituídas por correlação dos sinais gravados nas duas estações. Uma questão fundamental no VLBI é o relógio que serve para datar os eventos. Ele deve ser muito estável em curtos períodos. O VLBI utiliza um padrão de frequência constituído pelo maser de hidrogênio que tem estabilidade de  $10^{-14}$  em 1000 segundos [Gontier, et al. 1997]. As bandas de frequência usadas nas aplicações geodésicas do VLBI são S e X, com frequência de 2,3 e 8,4 GHz e comprimentos de onda de 13 cm e 3,6 cm, respectivamente.

Em função da evolução descrita acima conclui-se que a escolha da estrutura física é um tanto arbitrária o que leva a qualificar os referenciais de “convencionais”.

Quando da escolha dos novos objetos fiduciais, os quasares, a IAU introduziu explicitamente a teoria da Relatividade Geral como fundamento para todos os problemas teóricos e de análise de observações relacionados ao tempo e ao espaço. De acordo com as novas regras, as direções fundamentais do RC permanecerão fixas no espaço; serão independentes do modelamento do movimento dos objetos do sistema solar. Os objetos serão monitorados e suas posições eventualmente re-estimadas de acordo com a qualidade e a disponibilidade de informações, mas a direção dos eixos coordenados será mantida, para consistência com o FK5 [Gontier et al., 2006]. A origem é o baricentro do sistema solar e o plano primário é próximo ao equador médio em J2000 [Arias et al., 1995] [McCarthy, 1996]. Enfatize-se que o plano primário do sistema IERS é vinculado à precessão convencional IAU(1976) e à teoria da nutação IAU(1980). Sabe-se hoje que estes modelos estão errados em vários milíarcosegundos, exigindo, portanto, o uso de modelos de nutação e precessão mais acurados para definir o equador médio em J2000 relativo ao sistema IERS. Este fato é levado em consideração nas novas convenções da IAU2000 (IERS, 2004). Finalmente, a origem da ascensão reta deve ser próxima do equinócio dinâmico em J2000, consistente com o valor convencional do FK5 (12h 29m 6,6997s em J2000) [Arias et al., 1995]. Estas e outras especificações compõem as recomendações do Grupo de Trabalho sobre Sistemas de Referência, pesquisadas durante vários anos e adotadas pela IAU em 1997 [Kovalevsky et al., 1997]. Com isso

ficou definido, por convenção, o Sistema de Referência Celeste do IERS, o ICRS, tendo as seguintes características:

- a origem está no baricentro do sistema solar;
- o eixo  $OX_1$  é orientado segundo o equinócio vernal do equador médio J2000;
- o eixo  $OX_3$  orientado para o polo convencional das efemérides na época J2000, o CEP (Celestial Ephemeris Pole);
- o eixo  $OX_2$  completando um sistema dextrógiro;

portanto, direções consistentes com aquelas do FK5.

## 1.6 Referencial Terrestre

O Sistema de Referência Terrestre do IERS, o ITRS (International Terrestrial Reference System) é definido conforme os critérios estabelecidos pelo IERS, sendo fixo na Terra. Trata-se de um sistema geocêntrico, isto é, origem no centro de massa da Terra, o que inclui a parte sólida, líquida (oceanos — hidrosfera) e gasosa (atmosfera), e que foi melhor caracterizado recentemente através das técnicas SLR (Satellite Laser Range) e LLR (Lunar Laser Range). A orientação dos eixos foi definida em 1984 pelo BIH e é mantida pelo IERS dentro de  $\pm 3$  mas (IERS 1997, pg. II-3). Durante muito tempo o eixo  $OY_3$  do RT foi orientado segundo a posição média do polo no período 1900 — 1905, na época chamado CIO (Conventional International Origin). Após a introdução da nova orientação em 1984, o que foi possível com a melhoria do modelo de nutação, o mesmo passou a ser denominado IERS Reference Pole e representado pela sigla IRP. Ainda consistente com o sistema BIH 1984 o eixo  $OX_1$  é orientado segundo o IERS Reference Meridian (IRM). O eixo  $OX_2$ , a  $90^\circ$  de  $OX_1$ , completa um sistema dextrógiro. O ITRS acompanha o movimento diário de rotação da Terra. Com isso, as coordenadas de pontos sobre a superfície da Terra variam pouco com o tempo, exceção aos movimentos geodinâmicos (movimentos das placas tectônicas) e de marés.

A materialização de um Sistema de Referência Terrestre Internacional é uma das atribuições do IERS, como já mencionado. O sistema é usado tanto para analisar conjuntos individuais de uma das técnicas disponíveis atualmente (VLBI, SLR, LLR, GPS, DORIS, PRARE) ou a combinação das observações individuais visando um conjunto único de informações (coordenadas de estações, parâmetros de orientação, UT1, velocidade dos pontos). O ITRS satisfaz aos seguintes critérios [McCarthy, 1996], numa tentativa de adequar a definição à materialização:

- É geocêntrico, sendo o centro de massa definido para a Terra total o que inclui também os oceanos e a atmosfera;
- sua escala é compatível com um catálogo local de coordenadas terrestres, no sentido relativístico da teoria da gravitação;
- sua orientação é aquela definida inicialmente pelo BIH em 1984;
- a evolução da orientação da rede no tempo é garantida pela condição de “não rotação residual da rede” (no-net-rotation) com relação aos movimentos tectônicos sobre toda a Terra, do ponto de vista global. Em resumo, a solução é obtida impondo a condição de que a integral dos movimentos das placas, em tese movimentos angulares ao redor do centro de massa, seja nula globalmente.

A adoção destes critérios não deixa de ser convencional o que torna comum a denominação CTRS (Conventional Terrestrial Reference System) sendo mais comum a sigla ITRS. O sistema é materializado atualmente através de um catálogo de coordenadas e de velocidades, num dado momento, para um conjunto de estações. Tais coordenadas são especificadas pelo terno cartesiano  $(X_1, X_2, X_3)$ , preferencialmente, e suas derivadas em relação ao tempo. Quando do uso de coordenadas geográficas é recomendado o GRS80 cujo elipsóide é dado pelos seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137,0 \text{ m} && (\text{semi-eixo maior}) \\ e^2 &= 0,00669438003 && (\text{quadrado da excentricidade}) \end{aligned}$$

Em suma, o CTRS estabelecido pelo IERS é conhecido pela sigla ITRS (IERS Terrestrial Reference System) e é especificado pela resolução nº 2 da IUGG adotada na XXª Assembléia Geral em 1991, Viena.

A título de observação cabe uma consideração sobre o centro de massa da Terra. Em princípio, o centro de massa da Terra é estabelecido pelas observações laser e GNSS. Entretanto, pairam algumas incertezas no problema. Primeiramente, como saber se o centro de massa varia em função das redistribuições de massa (as águas das geleiras e das calotas polares, o movimento das placas tectônicas) ou não. Há quem argumente que a conservação do momento angular impede a mudança no centro de massa. Por outro lado, as observações que garantem a origem do referencial estão sujeitas a incertezas na maneira de combinar e ponderar as diferentes observações na solução da rede IGS e nas injunções dos modelos de movimento das placas. Isto tem levado a uma distinção no que é o geocentro e no que é o centro de massa, assegurando que o referencial tem origem no geocentro, o qual imperfeitamente coincide com o centro de massa.

## 1.7 Materializações do ITRS

Como foi enfatizado no §4, uma vez definido, o sistema ITRS precisa ser materializado. Desde 1988 vem se evoluindo para materializações cada vez mais compatíveis com a definição. Por outro lado, as materializações implicam em soluções globais para as coordenadas das estações de observação da rede IGS. As soluções através do Método dos Mínimos Quadrados trazem inúmeras dificuldades em função da necessidade de tratar diferentes tipos de observações (VLBI, GPS, LLR, SLR, DORIS) e do equacionamento das injunções necessárias e possíveis. Um estudo a este respeito pode ser encontrado em [Monico, 2005].

As materializações do ITRS são produzidas pelo IERS sob a sigla ITRFyy (International Terrestrial Reference Frame) sendo yy os dois últimos dígitos do último ano em que as observações contribuíram na realização em apreço (não são somente observações de um ano que entram na solução). Por exemplo, ITRF94 designa a realização construída em 1995 usando todas as observações levadas a efeito até o final de 1994. A partir do ano 2000 decidiu-se identificar pelos quatro dígitos do ano, e.g., [Boucher et al., 2004] descreve os resultados do ITRF2000. Nas diversas realizações o IERS publica as coordenadas das estações, as variações no tempo (velocidades) e os parâmetros de transformação da realização em apreço para as anteriores. Em [Boucher et al., 2004] a Tabela 4.1 apresenta os parâmetros de transformação e suas variações no tempo do

ITRF2000 para as 9 realizações anteriores (1997, 1996, 1994, 1993, 1992, 1991, 1990, 1989 e 1988). A compatibilização das diferentes realizações é feita usando a transformação de similaridade através de sete parâmetros: três translações, três rotações e uma escala.

As variações das coordenadas das estações no tempo são o resultado dos movimentos tectônicos que acarretam deslocamento dos pontos, portanto, mudanças nas coordenadas. Assim, a posição de um ponto sobre a superfície da Terra, para distintas épocas, deve ser expressa na forma:

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_o + \bar{V}_o(t - t_o) + \sum_i \Delta\bar{X}_i(t) \quad (1)$$

onde  $\Delta\bar{X}_i$  são correções devido aos vários efeitos de variação com o tempo e  $\bar{X}_o$  e  $\bar{V}_o$  são a posição e a velocidade da época inicial  $t_o$ . As correções incluem o deslocamento de maré da Terra sólida, a carga do oceano, a carga pós-glacial e a carga da atmosfera. As coordenadas são dadas num referencial convencional onde os efeitos de todas as marés são removidos [McCarthy, 1996]. No processamento das observações levadas a efeito nos vários anos  $\bar{X}_o$  e  $\bar{V}_o$  devem entrar como incógnitas. Em particular, quando da ocorrência de um evento não linear (terremoto, evento vulcânico, etc.) um novo  $X_o$  é adotado.

A escala do ITRS é obtida através de um modelamento relativista adequado. Especificamente, conforme resoluções da IAU e da IUGG, a escala é consistente com o TCB (Coordenada Temporal Baricêntrica). Em relação à origem, somente observações que incluam técnicas dinâmicas (SLR, LLR, GPS, GLONASS, DORIS) permitem determinar o geocentro (centro de massa). O VLBI garante a orientação do sistema celeste e contribui com a escala do ITRS; ele só pode ser referido à origem através das coordenadas obtidas para uma estação numa dada época através de técnicas externas ao mesmo.

O Polo e o Meridiano de Referência, respectivamente, IRP (International Reference Pole) e IRM (International Reference Meridian) são consistentes com as correspondentes direções no Sistema Terrestre BIH (BTS) dentro de 0,005". O Polo de Referência do BIH foi ajustado ao CIO (Conventional International Origin) em 1967. A incerteza do IRP em relação ao CIO é de  $\pm 0,03''$ . A evolução da orientação no tempo é assegurada através da chamada "condição de não rotação da rede" em relação a movimentos tectônicos horizontais em toda a Terra. Para tanto, a referência é o NNR-NUVEL1A.

A vinculação entre os sistemas celeste e terrestre é feita através dos parâmetros de orientação da Terra — EOP. Estes parâmetros descrevem a orientação de um dado referencial terrestre, em função do tempo, em relação a um referencial celeste. Consistem em 5 componentes:  $x, y$  são as coordenadas do CEP (Polo Celeste das Efemérides) relativamente ao polo do referencial terrestre (IRP);  $d\psi, de$  são as diferenças em longitude e em obliquidade respectivamente, do polo celeste em relação à direção estabelecida no referencial celeste pelos modelos convencionais de precessão/nutação da IAU; tempo universal (UT1), que está vinculado ao Tempo Sideral Médio de Greenwich, permite o acesso ao ângulo de rotação do referencial terrestre relativamente ao referencial celeste, ambos materializados, contado ao redor do eixo do CEP. É expresso pela diferença UT1 — TAI, sendo este último o Tempo Atômico Internacional.

Finalmente, algumas considerações devem ser enfatizadas. O ITRS, tal como caracterizado pelo IERS, é adotado por definição e não deixa de ser uma convenção. A partir da definição é necessário materializá-lo o que não pode ser feito de forma direta. Na prática, o sistema é materializado através das coordenadas de um conjunto de estações, por exemplo, a rede IGS, as quais são obtidas por uma das técnicas espaciais ou por uma combinação de várias delas, isto quando há técnicas co-locadas (locadas conjuntamente). Toma-se os cuidados necessários para que as coordenadas estejam perfeitamente referidas ao ITRS. Na realidade, as coordenadas são obtidas a partir de observações, que têm sua margem de erro, e de modelos que levam em consideração fenômenos da crosta, e que também não são perfeitos. Por outro lado, vem se estimando as coordenadas das estações periodicamente. É o que constitui o ITRFyy. Assim sendo, existem diversas materializações (realizações) do ITRS, por exemplo, ITRF90, ITRF91, ITRF95, etc., cada um se propondo a ser a melhor aproximação possível. A comparação das coordenadas das diferentes realizações resulta em parâmetros de transformação de Helmert, e até mesmo sua variação no tempo, que são divulgadas conjuntamente com as coordenadas. Na divulgação é sempre caracterizada a realização específica para a qual valem os parâmetros. Em resumo, os parâmetros administram o problema das diferenças entre as realizações.

Mas há uma outra questão que envolve as coordenadas e não os parâmetros de transformação. Trata-se do fato de que as estações se movimentam ao longo do tempo em função dos processos geodinâmicos. Normalmente o deslocamento é linear, mas há casos em que ocorre um deslocamento instantâneo; isto pode ocorrer no momento de um terremoto. A análise contínua das observações, sobretudo GPS e agora GNSS, nas estações IGS tem permitido estimar a variação das coordenadas com o tempo a partir de uma coordenada inicial  $X_0$  e de uma velocidade inicial  $V_0$  (equação 1).

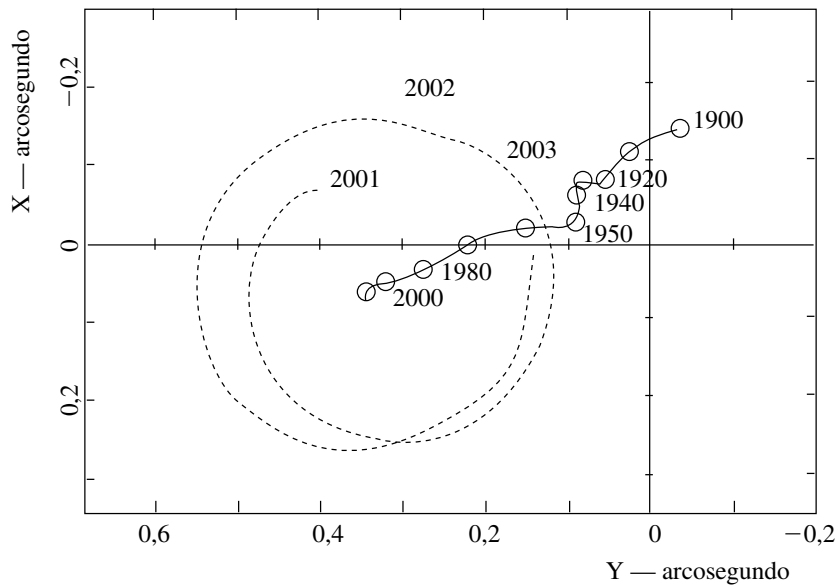
Portanto, há dois aspectos a cuidar na transformação. Exemplificando, quando se tem as coordenadas de uma estação referidas à realização ITRF2000 e se deseja as coordenadas da mesma referidas ao ITRF97, aplica-se os respectivos parâmetros de transformação. Porém, se o objetivo for conhecer as coordenadas da estação onde ela estava em 1997, é preciso levar em consideração as velocidades de deslocamento, o que é muitas vezes denominado de transformação completa de Helmert. A América do Sul decidiu adotar como referencial comum o SIRGAS2000, coincidente com o ITRF2000. A época adotada no Brasil é 2000,4. Nos demais países varia a época.

## 1.8 Vinculação entre o TRS e CRS

A Terra não tem uma distribuição homogênea de massa, sendo a principal heterogeneidade a protuberância equatorial. Além disso, a Terra tem partes muito viscosas, líquidas até, como os oceanos, e partes menos viscosas, o núcleo externo. Há também a atmosfera que é gasosa e que resulta em processos de interação com as partes líquida e sólida. Há necessidade de monitorar as deformações e deslocamentos da parte sólida e as variações da parte líquida (nível do mar, camadas de gelo, etc.). Por outro lado, quando se considera o sistema solar, todos os corpos giram entorno do baricentro do sistema; mas este na prática coincide com o centro de massa do Sol, uma vez que a massa do mesmo é predominante no sistema. O sistema Terra-Lua é mais simples do que o sistema solar,

porém, com uma característica específica. A massa da Terra não é predominante e o centro de massa do sistema está em um ponto distante do centro de massa da Terra de aproximadamente  $2/3$  do raio. Ou seja, pode-se dizer que os planetas giram entorno do centro de massa do Sol; mas, no caso do sistema Terra-Lua, os astros envolvidos giram entorno do baricentro do sistema; por outro lado este sistema gira entorno do centro de massa do Sol. O fato tem conseqüência na consideração da força de maré. Finalmente, a Terra experimenta deslocamentos de massa como, o movimento das placas tectônicas (intra-placa e inter-placa), a variação do nível do mar função do aumento da temperatura média (expansão térmica) e do derretimento das geleiras e das calotas polares. Isto tudo faz com que a Terra seja um corpo girando no espaço com diversas oscilações, livres e forçadas. O resultado é um eixo de rotação sempre em movimento ao longo do tempo. Em conseqüência, a transformação entre o referencial celeste, fixo no espaço, e o referencial terrestre, fixo na Terra, passa a não ser algo trivial.

Em suma, considerando um eixo (imaginário) de rotação, ao observá-lo constata-se oscilações do mesmo no espaço, traduzidos por 4 movimentos principais: precessão, nutação (longos períodos — milhares ou dezenas de anos respectivamente), movimento do pólo (período mais curto) e a deriva para oeste. Numa tentativa de explicação simples pode-se pensar numa situação em que uma pessoa se fixasse no espaço e passasse a observar continuamente o pólo a partir de um instante. Após algumas horas apenas de observação verificaria um pequeno movimento do ponto. Persistindo um pouco mais na observação (vários dias) o movimento continuaria de uma forma aparentemente irregular. Mantendo-se a observação por alguns anos notar-se-ia uma tendência de um movimento em círculo, porém, irregularmente. É o que se conhece por “movimento do pólo” representado na Figura 1.4 pela linha tracejada (a polódia). Porém, olhando para este



**Figura 1.4** Movimentos do eixo de rotação: polódia e deriva para oeste.



movimento num período maior (vários anos) a constatação vai além e nota-se uma deriva para oeste representada pela linha de círculos na Figura 1.4. No contexto destes dois movimentos convencionou-se escolher um ponto num dado momento e adotá-lo como orientação do Sistema de Referência Terrestre, o CIP (Conventional International Pole). Indo além e extendendo a observação ao polo por dezenas de anos ficaria clara a existência de um movimento mais lento, a nutação, com um período de 18,6 anos (Figura 1.5). Se hipoteticamente o observador ficasse milhares de anos observando ainda comprovaria a existência da precessão (período de 25 600 anos). Uma certa posição do pólo nestes dois movimentos de períodos mais longos foi convencionalmente adotado como orientação do eixo Z do sistema celeste e denominado CEO (Celestial Ephemeris Origin).

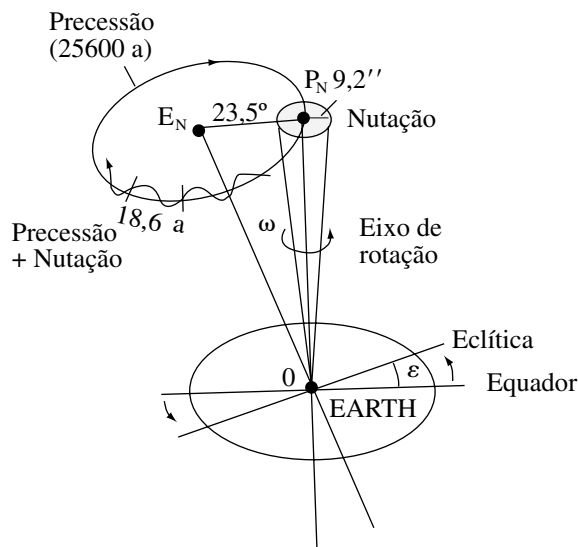


Figura 1.5 Movimento de precessão e de nutação.

Os diferentes fenômenos fazem com que o eixo de rotação terrestre não coincida com o eixo de inércia. O resultado é os movimentos do eixo de rotação entorno do eixo da eclíptica. Assim, os referenciais terrestre e celeste se vinculam entre si através dos parâmetros de orientação da Terra, que descrevem os movimentos do eixo de rotação em relação ao eixo da eclíptica, em associação com os modelos de precessão (componente secular) e de nutação (componente periódica). A expressão de transformação para uma data  $t$  é a seguinte:

$$\vec{X}^C = Q(t)R(t)W(t)\vec{X}^T \quad (2)$$

sendo  $Q$ ,  $R$  e  $W$  as matrizes de transformação oriundas do movimento do polo celeste no sistema celeste (precessão e nutação), da rotação da Terra ao redor do eixo do polo, e do movimento do polo respectivamente. As matrizes de precessão e de nutação são definidas através dos modelos estabelecidos pela IAU em 1976 e em 1980 respectivamente [IERS, 1992], recentemente corrigidos pelo IERS através de observações VLBI.

Os sistemas de referência e os procedimentos inerentes a eles, a cargo do IERS, estão baseados em resoluções aprovadas e recomendadas por uniões internacionais. Assim, o sistema celeste segue a Resolução A4 da IAU de 1991. O sistema foi oficialmente iniciado e implantado pela Resolução B2 da IAU em 1997 e sua definição foi objeto de um refinamento através da Resolução B1 da IAU em 2000. O sistema terrestre se baseia na Resolução 2 da IUGG. Já a transformação entre os sistemas celeste e terrestre é fundamentada pela Resolução B1 da IAU em 2000. [IERS, 2004], [Monico, 2004].

**Observação:** Para se definir a posição de um ente ou um evento no espaço usa-se uma coordenada compatível. Assim, é usual se utilizar coordenadas geodésicas, cartesianas ou outras, como UTM. Para se posicionar o evento no tempo a coordenada apropriada é a temporal (de tempo). Neste caso igualmente há mais de uma possibilidade de escolha da coordenada temporal dependendo de um caráter relativista da origem. Por exemplo, pode-se referir ao geocentro ou ao baricentro do sistema solar. Neste aspecto refere-se a uma coordenada temporal geocêntrica — TCB (Time Coordinate Geocentric) ou coordenada temporal baricêntrica — TCB (Time Coordinate Baricentric). Há um certo vício em confundir o entendimento com o TUC (Tempo Universal Coordenado) que não deixa de ser igualmente uma coordenada temporal, mas por ser estabelecido por um órgão internacional (BIH) passou a ser entendido como um tempo coordenado. No caso do TCG e do TCB não se trata de um tempo coordenado, mas de uma coordenada temporal (de tempo).

## 1.9 Agradecimentos

Muitas das idéias aqui expostas em relação aos métodos astronômicos foram absorvidas em exposições do Prof. Dr. Ramacrishna Teixeira em diferentes visitas realizadas ao Observatório Astronômico de Valinhos. Além disso, os autores são gratos a ele pela leitura do artigo e pelas sugestões fornecidas. Discussões levadas a efeito, em visita ao DGFI, com o Dr. Hermann Drewes e o Dr. Klaus Kaniuth serviram para aperfeiçoar alguns conceitos. Discussões com o Prof. Dr. João Francisco Galera Monico enriqueceram o conteúdo em vários aspectos. Finalmente, importantes sugestões foram incorporadas ao texto após a leitura atenciosa do Prof. Dr. Edvaldo Simões da Fonseca Jr.

## 1.10 Referências

- ARIAS E. F., CHARLOT P., FEISSEL M. & LESTRADE J. F. (1995). **The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service**, ICRS. *Astronomy and Astrophysics*, 303, pp. 604-608.
- BOUCHER C., ALTAMINI Z., SILLARD P., VERNIER M.F. (2004). The ITRF2000. IERS Technical Note n<sup>o</sup> 31, IERS ITRS Centre, Institut Géographique National, França.
- DICKEY J. (2001). **Interdisciplinary Space Geodesy: Challenges in the New Millennium**. Jet Propulsion Laboratory. Internal report. Pasadena.

- GEMAEL C. (1981). Referenciais Cartesianos utilizados em Geodésia. *Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas*. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- GONTIER A. M., ARIAS E. F., BARACHE C. (2006). **Maintenance of the ICRF using the most stable sources**. In: IERS Technical Note 34. Observatoire de Paris. Paris.
- GONTIER A. M., FEISSEL M. Ma C. (1997). **The contribution of VLBI to the realization of a Celestial Reference System**. In: IERS Technical Note 23. Observatoire de Paris. Paris.
- IERS (2004). *IERS Conventions (2003)*. Technical Note 32. Editors: Dennis D. McCarthy and Gérard Petit. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodasie. Frankfurt.
- \_\_\_\_\_ (1997). *1997 IERS Annual Report*. Observatoire de Paris. Paris.
- \_\_\_\_\_ (1995). *Missions and goals for 2000*. IERS-IUGG-IAU. Observatoire de Paris. Paris.
- \_\_\_\_\_ (1992). *IERS Technical Note 13*. Observatoire de Paris. Paris.
- KOVALEVSKY J. (1989). **Stellar Reference Frames**. In: IERS Technical Note 23. Observatoire de Paris. Paris.
- KOVALESVSKY J., MUELLER I.I., KOLACZEK B. (1989). **Reference Frames in Astronomy and Geophysics. IERS Technical Note 23**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- MCCARTHY D. D. (1996) *IERS conventions (1996)*. IERS Technical Note 21. Observatoire de Paris. Paris.
- MONICO J.F.G. (2005). **Fundamentos matemáticos envolvidos na combinação de soluções para a realização dos ITRS**. Comunicação pessoal do artigo em preparação.
- \_\_\_\_\_ (2004). **Transformação entre referenciais celeste e terrestre de acordo com a Resolução IAU 2000**. In: Série em Ciências Geodésicas, vol. 4. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba.
- MUELLER I. I. (1969). **Spherical and practical astronomy as applied to geodesy**. Frederich Ungar Co. New York.
- OLIVEIRA L. C. (1998). Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD-69 — *Uma proposta metodológica de transformação*. Tese de doutorado apresentada à Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Transportes. São Paulo.
- SEEBER G. (1993). **Satellite Geodesy**. Walter de Gruyter, Berlin.
- TORGE W. (2001). **Geodesy**. 3<sup>rd</sup> Edition. De Gruyter, Berlin.



# Parte 2

---

## Altitude: O que Interessa e como Equacionar?

Prof. Dr. Denizar Blitzkow

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ilce de Oliveira Campos

Prof. Dr. Sílvio R. C. De Freitas



# Altitude: O que Interessa e como Equacionar?

## Resumo

A altitude continua sendo um problema muito discutido em geodésia, sobretudo pela comunidade que está envolvida com a sua determinação e utilização. A discussão diz respeito ao ponto de vista conceitual e ao ponto de vista prático quando de sua determinação. Na verdade, o conceito de altitude está intimamente relacionado ao problema de valor de contorno da Geodésia Física. Em consequência, a questão precisa ser pensada não somente de um ponto de vista geométrico mas sobretudo de um ponto de vista físico. É necessário considerar a superfície escolhida como origem para as medições altimétricas e olhar para o seu significado como superfície de referência do campo de gravidade. Por outro lado, é comum o envolvimento com problemas que não exigem o conhecimento de um valor absoluto da altitude e outros que exigem, ou ainda, estudos onde tão somente a diferença de altitude é o fundamental. A variação da altitude com o tempo é também considerada na engenharia e na geodinâmica. Finalmente, a materialização da superfície de referência para as altitudes precisa levar em consideração os efeitos seculares e periódicos sobre as observações maregráficas. Este trabalho se propõe a rever alguns dos conceitos e das dificuldades relativas à determinação da altitude.

**Palavras-chave:** Altimetria, Geóide, Geodésia

## Height: What does it Matter and How to manage?

### Abstract

There is still very much concern in geodesy about the height problem, in particular, by the community involved with its realization and use. The discussions involve the concept as well as the determination of the height. The concept is strongly related to the boundary value problem of Physical Geodesy. As a consequence, the problem must be considered not only on the geometrical but also on the physical point of view. It is necessary to consider the surface selected as an origin for the measurements and look after its meaning as a reference surface of the gravity field. On the other hand, it is very usual to deal with problems that demand or not an absolute value for the height and problems for which a relative value is fundamental. The height variation with time is also considered for engineering and geodynamics. This paper intends to review some of the concepts and difficulties related to the height.

**Keywords:** *Altimetry, Geoid, Geodesy*

## 1.1 Introdução

A posição de pontos no espaço, sobre a superfície da Terra ou próximo a ela, é estabelecida através de três coordenadas: latitude, longitude e altitude. A latitude e a longitude geodésicas ou elipsoidais definem o que coloquialmente se denomina coordenadas planimétricas, embora não se refira a um plano propriamente dito. A componente vertical é estabelecida em função de considerações e conceitos mais requintados. No passado, quando as coordenadas planimétricas eram determinadas através da triangulação, procurava-se complementar a informação altimétrica através do nivelamento geométrico, a despeito dos problemas envolvidos com o mesmo. Na prática, as redes de triangulação e de nivelamento não eram coincidentes e, no geral, as informações planimétricas e altimétricas eram independentes entre si.

Desde o advento das observações por satélite, as determinações de posição no espaço vêm sendo resolvidas de forma simples e eficiente; assim, pode-se facilmente determinar coordenadas referidas a um elipsóide de referência. Na prática, através do satélite, obtém-se coordenadas cartesianas ( $X, Y, Z$ ) que são transformadas no terno geodésico ( $f, l, h$ ), sendo  $h$  a altitude elipsoidal, uma grandeza geométrica sem significado físico. Ela é referida à superfície elipsoidal que não é uma superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra real, mas sim do modelo adotado, o elipsóide. Por este motivo, a altitude elipsoidal nem sempre atende a todas as exigências e muitas vezes necessita-se de um tipo de altitude que satisfaça condições específicas.

A seleção do tipo de altitude a ser usada e a escolha da superfície de referência (origem) são fundamentais em aplicações práticas da altimetria. Considerando estas opções, uma altitude pode ter significado apenas geométrico ou ter um sentido físico por constituir uma grandeza relacionada ao campo de gravidade. Saliente-se que o fluxo natural de água é regido pelo campo de gravidade e não por condições geométricas.

O presente trabalho propõe-se a descrever e a discutir os conceitos relativos ao problema da altitude e a relacioná-los aos procedimentos analíticos empregados na determinação dos diferentes tipos de altitude. Assim, segundo o procedimento de determinação, a escolha da superfície de referência e os modelos matemáticos ou físicos considerados no processamento das observações, distingue-se as seguintes altitudes:

- Geométricas: elipsoidais e niveladas.
- Científicas: dinâmicas, ortométricas, normais, etc.

No primeiro caso, é possível estabelecer uma grandeza geométrica associada com a referida altitude, em outras palavras, uma distância segundo uma direção que associa duas superfícies de referência. No segundo caso, a altitude está vinculada a um conceito físico do campo de gravidade, podendo ou não ter também uma interpretação geométrica associada.

Além disso, levanta-se as questões referentes à necessidade de obtenção do valor absoluto da altitude num ou mais pontos, do conhecimento da sua eventual variação no tempo ou, finalmente, do conhecimento da simples diferença de altitude. O primeiro caso implica em selecionar uma superfície de referência como origem, estabelecer procedimentos de observação, selecionar métodos analíticos de cálculo e fazer a determinação da altitude num ponto ou num conjunto de pontos, em suma, implantar uma rede altimétrica. Por outro lado, é comum a necessidade de controle e de monitoramento da altitu-



de, de um ou mais pontos, no tempo, objeto da segunda questão. Isto ocorre em grandes estruturas de engenharia e na crosta terrestre, onde movimentos verticais podem ocorrer. As estruturas sofrem com deslocamentos ou deformações e a crosta tem movimentos de subducção (subsidência), obducção e deslocamento das placas tectônicas [Drewes et al., 1998]. Neste caso, há sempre a preocupação e a dificuldade de obter uma referência que, confiadamente, seja estável, isto é, não sofra variação no tempo ou que a mesma seja controlada. Finalmente, em muitos casos, sobretudo na engenharia, é satisfatório obter a diferença de altitude num conjunto maior ou menor de pontos, numa determinada área, em relação a um valor de referência. No passado, este era escolhido, em muitos casos, de forma arbitrária; porém, cada vez mais se foi encontrando razões para optar por uma referência absoluta. É o caso, por exemplo, da implantação de uma represa, seja para abastecimento ou seja para a geração de energia (usinas hidroelétricas). O que se procura é a diferença de altitude, em relação a uma referência, numa série de pontos na região da obra visando determinar a área inundada e o volume de água armazenada.

## 1.2 A Altimetria e o PVCG

A teoria do potencial apresenta três problemas de valor de contorno que assim se enunciam:

- a) Problema de Dirichlet ou primeiro problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores de uma função arbitrária  $V$  sobre uma superfície  $S$ , determinar essa função  $V$  de tal forma que ela seja harmônica interna ou externamente a  $S$  e que sobre a superfície  $S$  ela assuma os valores da função escolhida.
- b) Problema de Neumann ou segundo problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores da derivada normal de uma função  $V$  sobre uma superfície  $S$ , determinar a função  $V$  que seja harmônica interna ou externamente a  $S$ .
- c) Problema de Hilbert ou terceiro problema de valor de contorno: conhecendo-se os valores da combinação linear da função  $V$  e da sua derivada normal sobre a superfície  $S$ , determinar a função  $V$  nas condições anteriores.

Este último problema tem especial importância para a geodésia, pois a determinação do potencial perturbador de certa forma se relaciona a ele. Com efeito, a anomalia da gravidade, que é observada, em geral sobre a superfície física, é uma combinação linear do potencial perturbador com a sua derivada normal [Blitzkow, 2003, (2.29)]. O problema na geodésia é que a superfície é desconhecida e é ela exatamente uma das questões que precisam ser equacionadas, pois ela serve de referência para a altitude.

A forma atribuída à Terra, por convenção, é a do geóide. Este é limitado pela superfície geoidal, entendida até o momento como sendo materializada pela superfície equipotencial que coincide com o nível médio não perturbado dos mares. Em última instância, a Geodésia está preocupada com o estudo do geóide. Sabe-se que o geóide se assemelha muito a uma figura matemática regular, o elipsóide de revolução ou Terra normal. Esta é definida como tendo a mesma massa da Terra real, a mesma velocidade de rotação e cujo esferopotencial de gravidade da Terra normal sobre sua superfície seja igual ao geopotencial de gravidade da Terra real sobre a superfície do geóide. A diferença, pequena, entre o geóide e o elipsóide em termos de forma é a altura geoidal ( $N$ ), medida ao longo da normal, e em termos de potencial é o potencial perturbador ( $T$ ) [Blitzkow, 2003 (2.20)].

As duas grandezas se relacionam entre si através da fórmula de Brüns. (H&M, p.85, 2.144). Este estudo bem como a determinação das chamadas alturas geoidais, separação entre a superfície geoidal e a elipsoidal ao longo da normal, podem ser feitas a partir do conhecimento do campo de gravidade que modela a distribuição de massa e o efeito rotacional da Terra e, conseqüentemente, permite deduzir a forma. Na prática, o efeito rotacional sendo conhecido, o que se procura é modelar o potencial de atração ou gravitacional através do potencial perturbador. Isto é o que se denomina “Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG)”. Um modelo do geopotencial, como é chamado um conjunto de coeficientes do desenvolvimento do potencial gravitacional em série de funções harmônicas esféricas, contribui decisivamente no PVCG. Os modelos mais recentes, em particular o EGM96, publicado durante o GRAGEOMAR96 (Gravity, Geoid and Marine Geodesy 1996) no Japão, e mais recentemente, os modelos vinculados às chamadas missões modernas, CHAMP e GRACE, resolveram satisfatoriamente os longos e até médios comprimentos de onda do campo gravitacional. Resta, em geral, determinar os curtos comprimentos de onda. Eles são calculados, no contexto da geodésia física, através de dados gravimétricos de superfície utilizando a integral modificada de Stokes [Blitzkow, 2003], associando ainda um modelo digital do terreno.

Uma outra alternativa é estudar diretamente a forma sem preocupação direta com o potencial. Isto é feito obtendo-se as irregularidades da superfície geoidal relativamente a um modelo teórico, o elipsóide de revolução. A separação entre as duas superfícies, como já mencionado, são as chamadas alturas geoidais. Elas podem ser obtidas a partir de observações sobre satélites artificiais (GPS) quando conduzidas sobre uma referência altimétrica compatível.

A determinação das alturas geoidais no interior dos continentes, utilizando a integral de Stokes, envolve uma dificuldade fundamental: o conhecimento de um modelo de distribuição de densidades no interior da crosta entre a superfície física e a geoidal. A razão é a necessidade de reduzir os valores da aceleração da gravidade, observados sobre a superfície física, ao geóide. A impossibilidade de conhecer adequadamente a distribuição da massa torna a proposta de Stokes para a solução do PVCG impraticável. Mais recentemente Molodenskiy propôs a superfície física como superfície de contorno. Com esta alternativa foge-se do problema de conhecimento das densidades. O resultado é a determinação da anomalia de altura  $V$  ao invés da altura geoidal  $N$ . A superfície que se vincula ao elipsóide através da anomalia de altura é o quase-geóide. Ou ainda, se a anomalia de altura for plotada a partir da superfície física obtém-se o teluróide. Contrariamente ao geóide, o quase-geóide e o teluróide não são superfícies equipotenciais. A Figura 1.1 apresenta as grandezas e as superfícies envolvidas no PVCG.

Em suma, é essencial a coerência entre a solução do PVCG e o sistema de altitude selecionada. Neste aspecto, o modelo geoidal se coaduna com a altitude ortométrica, enquanto a anomalia de altura está vinculada ao quase-geóide e à altitude normal. Esta é a compatibilidade que precisa ser atingida nas observações GPS sobre o nivelamento. Através da Figura 1,1 deduz-se que:

$$h = H^N + \zeta \quad (1)$$

$$h = H + N \quad (2)$$

$$N = \zeta + H^N - H \quad (3)$$

donde se conclui que a diferença entre a altura geoidal ( $N$ ) e a anomalia de altura ( $z$ ) é igual à diferença entre a altura normal ( $H^N$ ) e a altitude ortométrica ( $H$ ).

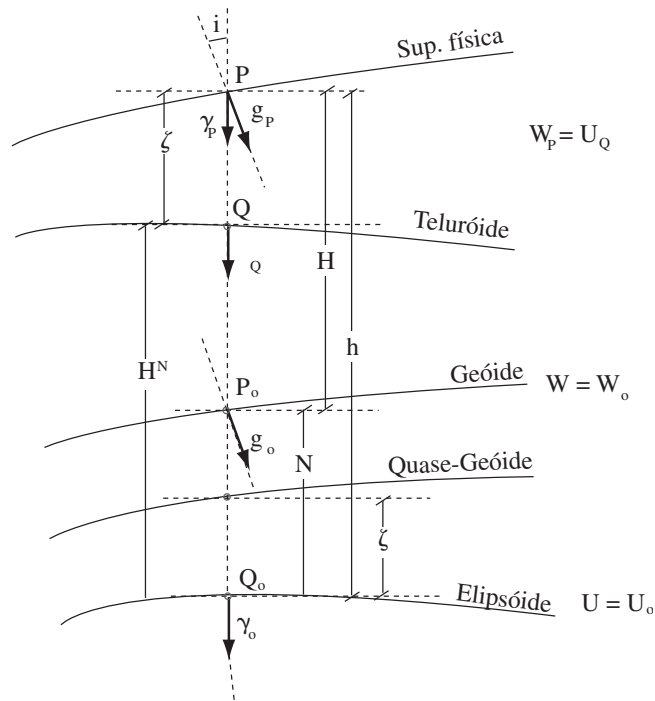


Figura 1.1 Quantidades envolvidas no PVCG.

### 1.3 O Nivelamento Geométrico

Será denominada altitude nivelada aquela resultante da operação de nivelamento geométrico. Este consiste em realizar leituras em duas miras graduadas, ré e vante, utilizando um nível de luneta (Figura 1.2). O nível deve estar nivelado, portanto, estar com seu eixo óptico tangente à superfície equipotencial que passa pelo mesmo [Drewes et al. 1998] e as miras devem estar na posição vertical.

Diz-se que a diferença de leitura das duas miras representa a diferença de altitude dos pontos. Uma primeira questão a se perguntar é de que altitude se trata. Mas, outro ponto a enfatizar é que, na verdade, o que se obtém é a separação (distância) entre as duas superfícies equipotenciais, supostas paralelas, que passam pela base das duas miras. O paralelismo se verifica para a distância de um lance ( $\sim 100$  m) ou de uma seção de nivelamento ( $\sim 3$  km). Em distâncias maiores as superfícies equipotenciais não são paralelas; a razão é que a distribuição de massa da Terra não é homogênea [Freitas & Blitzkow, 1999]. A maior irregularidade de massa é provocada pelo achatamento nos polos. A Figura 1.3 ilustra este problema, onde se conclui que o somatório de  $Dh_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ) é diferente de  $Dh_{AB}$ . Em tese, o que duas superfícies equipotenciais têm de constante entre



elas é a diferença de potencial e não a distância. Assim, conclui-se que o nivelamento geométrico fornece resultados que dependem do trajeto percorrido.

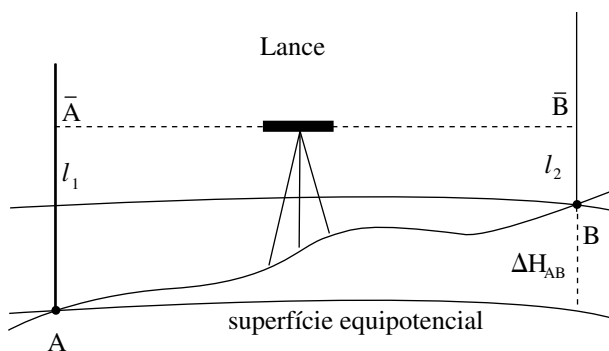


Figura 1.2 Lance no nivelamento geométrico.

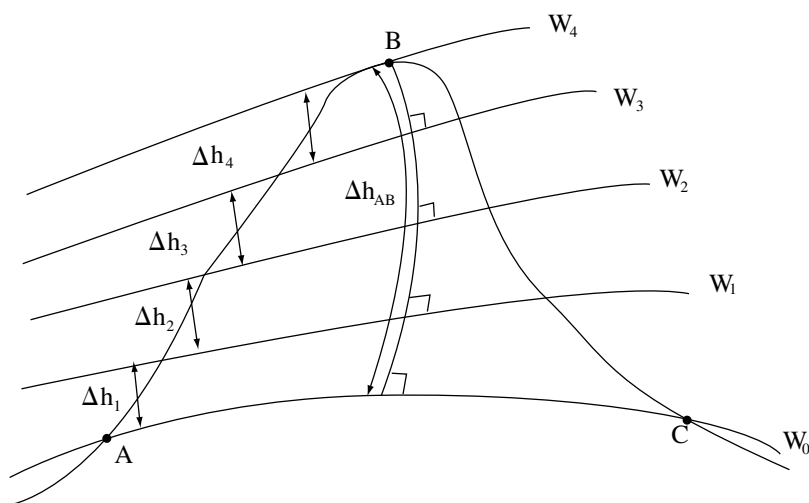


Figura 1.3 Não paralelismo das superfícies equipotenciais.

## 1.4 Altitude Científica

Para sanar a dificuldade é necessário introduzir uma grandeza física ao nivelamento o que é feito através da aceleração de gravidade. Define-se, então, número geopotencial  $C_{AB}$  como sendo:

$$W_B - W_A = C_{AB} = - \int_A^B g dH \quad (4)$$



Trata-se de uma grandeza física correspondente à diferença de potencial de gravidade  $W$  entre A e B e que, ao ser somada algebricamente em um circuito fechado, sempre resulta num somatório nulo, independente do trajeto percorrido. Na prática não se conhece a aceleração de gravidade  $g$  de forma contínua sobre a superfície da Terra, mas ela pode ser determinada sobre as referências de nível (RNs). Por outro lado, os desníveis  $Dh$  são determinados através do nivelamento geométrico com espaçamento, por exemplo, equivalente a duas RNs, da ordem de 3 km. Com isso, a integral transforma-se num somatório:

$$W_B - W_A = C_{AB} \cong - \sum_{i=1}^n \bar{g} \Delta h_i \quad (5)$$

sendo  $\bar{g}$  a média dos valores de aceleração da gravidade entre pontos  $i$  e  $i+1$  e  $Dh_i$  o desnível entre os mesmos.

O número geopotencial representa uma grandeza física, com dimensão específica (e.g.,  $m^2xs^{-2}$ ), pouco usual nas aplicações onde a altitude é exigida. Daí a conveniência em trabalhar com uma grandeza compatível com a dimensão usualmente empregada na altitude, o metro. Isto é conseguido dividindo o número geopotencial por um determinado valor da aceleração de gravidade. Se este valor for a média  $g_m$  entre a superfície física e o geóide, tem-se a altitude ortométrica: [Freitas & Blitzkow, 1999]

$$H_o = \frac{C_P}{g_m} \quad (6)$$

O valor médio do denominador em (3) depende do conhecimento da estrutura da crosta, ou seja, de um modelo de distribuição de densidades; portanto, sua obtenção é praticamente impossível. Trata-se do mesmo problema que ocorre com a redução do valor de  $g$  no PVCG (§ 2). A alternativa é substituir o valor da gravidade real pela gravidade normal  $\gamma_m$  obtendo a altitude normal como sendo:

$$H_N = \frac{C_P}{\gamma_m} \quad (7)$$

sendo  $\gamma_m$  a gravidade normal média entre o elipsóide e o ponto da superfície física [Freitas & Blitzkow, 1999, (11)]. A altitude normal representa a separação entre o elipsóide e o teluróide ou entre o quase-geóide e a superfície física (Figura 1.1). A vantagem da altitude normal é que ela independe do trajeto percorrido. A desvantagem é que a superfície à qual ela é referida, o quase-geóide ou o teluróide, não são superfícies de nível. Logo, dois pontos com a mesma altitude normal não estarão necessariamente sobre a mesma superfície equipotencial.

Outras possibilidades de escolha do denominador resultam em outros diferentes tipos de altitudes como: Helmert, Vignal, Baranov [Freitas & Blitzkow, 1999]. Mas uma altitude de particular interesse é a altitude dinâmica. Ela é o resultado da escolha de um valor  $\gamma_o$  válido para uma dada latitude padrão, e. g.,  $45^\circ$ .

$$H_D = \frac{C_P}{\gamma_o} \quad (8)$$

A característica da altitude dinâmica é que ela é constante ao longo da mesma superfície equipotencial. Obviamente a altitude dinâmica difere do número geopotencial somente de um fator de escala ou na unidade. Ela não tem um sentido geométrico como distância entre duas superfícies. Mas com certeza a água flui de um ponto de maior altitude dinâmica para outro de menor valor.

## 1.5 Considerações Finais

A altimetria vem se desenhando como uma necessidade da mais alta importância em diversos campos de aplicação. Ora um modelo digital de elevação (MDE) como é chamado atende satisfatoriamente, ora o tipo de altitude não se apresenta tão fundamental pois a diferença de altitude é que se caracteriza como essencial. Na engenharia a altitude precisa representar uma grandeza com significado físico quando a aplicação envolve o armazenamento ou o transporte de água. Sempre que isto ocorre e quando as dimensões de uma represa ou de um canal são consideráveis, dezenas de quilômetros, a consideração do número geopotencial é necessário. Neste caso, a operação de nivelamento geométrico precisa ser acompanhada da gravimetria.

Os países da América do Sul adotaram como sistema de altitudes, para efeitos do referencial altimétrico do continente, a altitude normal. A vantagem é que a conexão de duas referências de nível neste sistema irá resultar num fechamento coerente do nivelamento. Isto não ocorre com as altitudes niveladas.

## 1.6 Referências

BLITZKOW, D. **Sistemas de altitudes e a determinação do geóide**. Curso proferido no Instituto Oceanográfico da Armada (INOCAR). Quiaquil, Equador, 2003.

DREWES, H.; SÁNCHEZ, L.; BLITZKOW, D.; FREITAS, S.R.P. **Documento técnico sobre o sistema de referência vertical para a América do Sul**. SIRGAS, Boletim Informativo n. 6, 1998, p. 23-31.

FREITAS, S.R.C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e geopotencial**. IGeS Bulletin — Special Issue for South America, n. 9, 1999, p. 47-62.

HEISKANEN, W.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. W. H. Freeman, San Francisco. 1967.



# Parte 3

---

## Sistema de Projeção UTM

Prof. Dr. Jorge Pimentel Cintra





# Geodésia e Geometria do Elipsóide

## 1.1 Geodésia

A Geodésia procura, entre outras coisas, determinar a geometria da superfície terrestre. Estuda o geóide e o elipsóide, bem como a amarração entre ambos. Visa também uma descrição da superfície terrestre para fins de cartografia e engenharia.

Uma boa analogia da relação entre a Geodésia e a Topografia pode ser feita com a construção de edifícios de concreto, que possuem uma estrutura resistente (lajes, vigas, pilares, fundações) e as partes complementares, de fechamento e acabamento (paredes, portas, janelas). A Geodésia procura então determinar vértices de amarração que cobrem todo o território e que possuem coordenadas bem determinadas e precisas; a topografia e a cartografia preenchem os espaços intermediários, sustentando-se nos vértices geodésicos, e amarrando todos os acidentes geográficos e edificações (rios, caminhos, rodovias, montanhas, lagoas) na rede existente, de maneira a poder produzir mapas confiáveis e sem deformações exageradas.

A Geodésia, ainda que seja uma ciência única, para fins didáticos pode ser dividida em:

- a) Geodésia geométrica — trata da geometria do geóide e do elipsóide.
- b) Geodésia física — trata da gravimetria, enquanto é útil para efetuar a amarração entre o geóide e o elipsóide, através da determinação de pontos de ligação (*datum*, plural: *data*).
- c) Geodésia astronômica — trata dos métodos de determinação da latitude, longitude e azimutes verdadeiros.
- d) Geodésia por satélite — trata da determinação da forma da terra e da posição de pontos (coordenadas) através de satélites, notadamente o GPS.

Podem ser apontados os seguintes problemas típicos da Geodésia que ajudam a compreender sua natureza e objetivos:

1. o conhecimento da figura da terra (forma e dimensões);
2. o estudo do elipsóide como superfície de referência;
3. o modo de resolver problemas geométricos sobre o elipsóide: métodos, fórmulas, aproximações;

4. como representar o elipsóide no papel (plantas, mapas): sistemas de projeção em levantamentos cartográficos e topográficos;
5. unificação de redes geodésicas para um território e para todo o planeta (elipsóide internacional);
6. estudo envolvendo o campo gravitacional da terra, medição da força da gravidade e desvio da vertical em pontos concretos;
7. determinação de altitudes e cotas e da diferença de nível dos mares;
8. estudo de movimento da crosta terrestre;
9. procedimentos de campo para solucionar esses problemas (trabalhos geodésicos fundamentais);
10. através dos sistemas de projeção: estabelecer referenciais para projetos de engenharia, notadamente para as obras de grande porte.

## 1.2 Forma da Terra, Geóide, Elipsóide

A superfície e a forma da Terra são elementos indetermináveis matematicamente, pela sua complexidade e irregularidade locais. No entanto, é necessário trabalhar com aproximações para poder construir mapas e plantas. Como se sabe, a hipótese da Terra esférica é suficiente para os trabalhos topográficos. Em Geodésia costumam-se utilizar duas outras superfícies: o geóide e o elipsóide.

O geóide é definido como a superfície de nível que coincide com a superfície dos oceanos livre de perturbações, estendida idealmente sob os continentes, de modo que as linhas verticais cruzem perpendicularmente esta superfície em todos os pontos. Depende portanto do campo gravitacional da Terra e da distribuição de massas no seu interior modifica-se sensivelmente nas proximidades de montanhas e depressões; pode-se falar então em ondulações do geóide. O tratamento matemático do geóide é um problema complexo. Para trabalhar com uma representação matematicamente tratável recorre-se ao elipsóide.

O elipsóide é uma figura geométrica determinada através de parâmetros e que se utiliza como uma aproximação do geóide, mediante as seguintes condições:

- a) a coincidência do centro do elipsóide com o centro de massa da terra;
- b) a coincidência do plano equatorial do elipsóide com o plano do equador terrestre (ambos perpendiculares à linha dos pólos);
- c) procurar minimizar os desvios com relação ao geóide.

Para conseguir a condição indicada em c), efetuam-se ligações entre o geóide e o elipsóide, que se verificam em pontos em que se efetuam medições. Em cada um deles deve-se determinar a distância entre as duas superfícies (em geral em torno de 30 m, com um máximo de 150 m) e o desvio da vertical, que é o ângulo entre a vertical (normal ao geóide) e a normal ao elipsóide (ver Figura 1.1). Ajusta-se o elipsóide, tomando-se os parâmetros (a) e ( $\alpha$ ) como incógnitas a determinar através do processo dos mínimos quadrados com relação ao afastamento vertical. Surgem diferentes figuras de referência,

e é por isso que se constata a existência de diversos elipsóides, com diferentes parâmetros. Atualmente trabalha-se na unificação dos elipsóides, visando determinar um só para todo o mundo, através da utilização de satélites e técnicas apropriadas (por exemplo, VLBI, GPS).

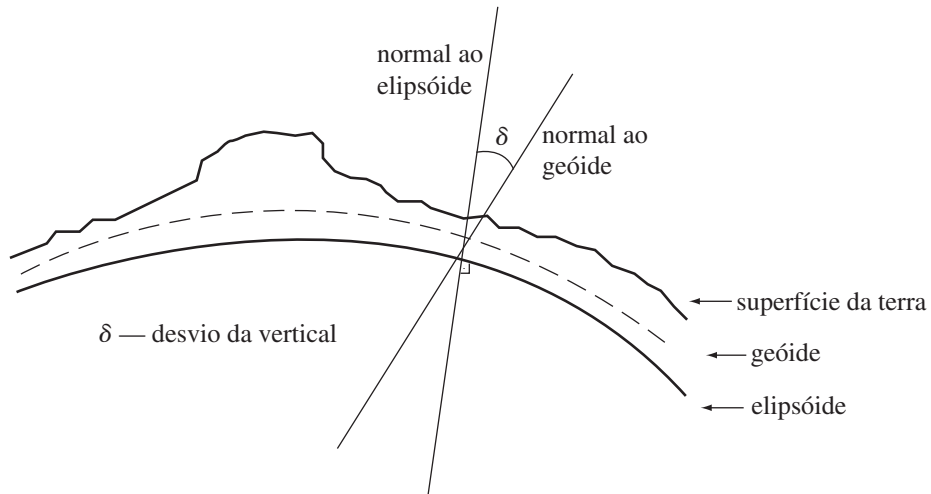


Figura 1.1 Superfícies de referência.

### 1.3 Elipsóide de Referência

A terra pode então ser aproximada por um elipsóide de revolução originado por uma elipse que gira em torno do eixo dos pólos (Figura 1.2).

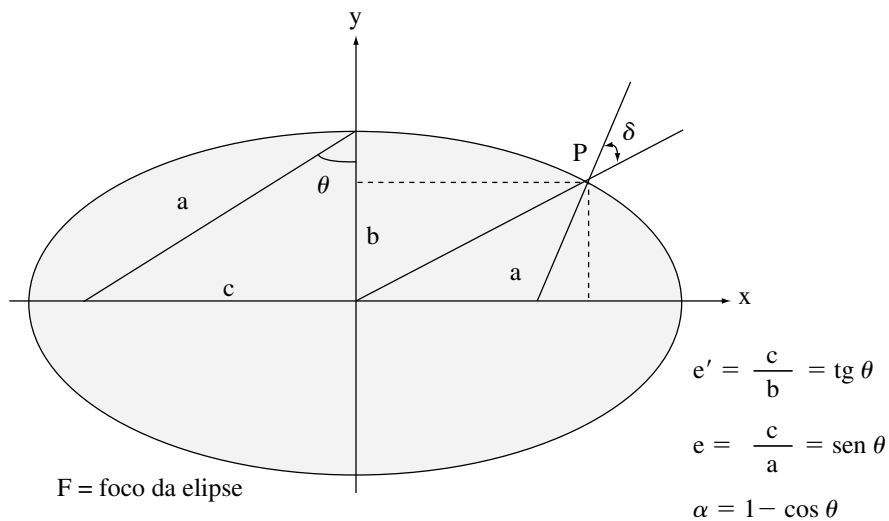


Figura 1.2 Representação do elipsóide terrestre com seus parâmetros.

Pode-se então definir os seguintes parâmetros:

1. semi-eixo maior (equatorial):  $a$
2. semi-eixo menor (polar) :  $b$

$$3. \text{ achatamento: } \alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\text{ou } 1^{\text{a}} \text{ excentricidade } e = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\text{ou } 2^{\text{a}} \text{ excentricidade } e' = \frac{c}{b} \quad (3)$$

$$\text{sendo } c^2 = a^2 - b^2 \quad (4)$$

A partir dessas relações fundamentais podem ser obtidas outras, que costumam ser úteis nos cálculos deduções matemáticas:

$$(5) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$(6) \quad e'^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1$$

$$(7) \quad (1 - e^2) \cdot (1 + e'^2) = 1$$

$$(8) \quad (1 - \alpha)^2 = (1 - e^2) = \frac{1}{(1 + e'^2)}$$

$$(9) \quad e^2 = 2 \cdot \alpha - \alpha^2$$

$$(10) \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \text{ ou } e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$(11) \quad a = \frac{b}{1 - \alpha} = b \cdot \sqrt{1 + e'^2}$$

$$(12) \quad b = a \cdot (1 - \alpha) = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Através de medições sobre a superfície da terra, foram estabelecidos valores para os parâmetros de referência, sendo que para caracterizar o elipsóide basta escolher dois valores, em geral o semi-eixo maior  $a$  e o achatamento, que pode ser definido pelo seu inverso  $f = 1/\alpha$ .

Newton, através de deduções teóricas, concluiu que a terra deveria ser um elipsóide achatado nos pólos. No século seguinte, os irmãos Cassini, através de medições incorretas, pensaram que o achatamento se dava ao longo do equador.

O procedimento para verificar o achatamento consiste em medir um arco de meridiano correspondente a uma certa diferença de latitude (um grau, por exemplo) e por simples regra de três obter o raio da Terra na região de medição. Para dirimir a questão,

que acabou confirmando as predições de Newton, organizaram-se duas expedições que mediram arcos do meridiano próximo ao equador (Quito) e próximo ao pólo (Lapônia). O raio menor obtido no equador provou que a Terra é achatada nos pólos. Muitas outras expedições científicas mediram arcos de meridiano para determinar os parâmetros do elipsóide.

A seguir, no Quadro 1.1, apresentam-se alguns dos valores mais importantes desses parâmetros.

ano	designação	semi-eixo maior (a)	achatamento $f = 1/\alpha$
(1) 1910	Hayford (Internacional)	6.378.388,00	1/297,00
(2) 1967	Associação Geodésia Internacional SAD-69	6.378.160,00	1/298,25
(3) 1984	WGS 84 World Geodetic System	6.378.137,00	1/298,257223563
(4) 2000	SIRGAS 2000	6.378.137,00	1/298,27722101

**Quadro 1.1** Alguns elipsóides usados no Brasil.

## 1.4 Elipsóides no Brasil

O elipsóide de Hayford (1) foi adotado em muitas ocasiões no Brasil, por exemplo na representação que se denomina “Córrego Alegre”.

Na verdade, essa designação se refere ao ponto geodésico fundamental da rede, que é o vértice CÓRREGO ALEGRE (Minas Gerais) da antiga cadeia de triangulação do paralelo de 20° S. Toda a rede brasileira foi referida a esse *datum*, e os parâmetros utilizados foram os do elipsóide internacional de Hayford.

Em tempos posteriores, procurou-se a adaptação de um elipsóide para toda a América do Sul, e os estudos levaram à adoção do PSAD — 56 (Provisional South American Datum of 1956), com origem no vértice “LA CANOA”, na Venezuela, e os parâmetros continuaram sendo os do elipsóide de Hayford.

Essa adaptação não ficou muito boa e se passou a um novo vértice, o ASTRO-CHUÁ, correspondente ao vértice CHUÁ, na mesma cadeia do CÓRREGO ALEGRE, e cujas coordenadas foram determinados astronômica. Por convenção adotou-se para esse vértice uma distância nula entre o geóide e o elipsóide (ondulação geoidal), bem como um desvio da vertical nulo. Forçou-se assim a condição de tangência entre o geóide e o elipsóide, que continuou sendo o de Hayford.

A seguir, foi feito um detalhado estudo gravimétrico na região do vértice CHUÁ e determinaram-se também as novas coordenadas desse mesmo ponto físico, agora denominado simplesmente CHUÁ, e adotou-se o elipsóide da Associação Geodésica Internacional. O ajuste mostrou-se uma boa adaptação, não só para o Brasil mas para toda a América do Sul, que em 1969 já havia adotado esse elipsóide, que recebeu o nome de SAD-69 (South American Datum of 1969).

Concluindo o ajustamento, em 1978, o SAD-69 com origem em CHUÁ, passou a ser adotado oficialmente no Brasil como novo *datum* (Quadro 1.2). No entanto, são muitos os vértices de triangulação, de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordem, muitas as coordenadas e inclusive mapas que continuam sendo referenciados ao CÓRREGO ALEGRE (Hayford). Em decorrência disso, um dos problemas que se encontra com frequência é o da mudança de *datum* ou de elipsóide, isto é, passar todas as coordenadas de um sistema para outro.

$$\begin{aligned}\varphi_G &= 19^\circ 41' 41,6527'' \text{ S} \\ \lambda_G &= 48^\circ 06' 04,0639'' \text{ W} \\ A_G &= 271^\circ 30' 04,05'' - \text{azimute para o vértice Uberaba} \\ N &= 0 \\ a &= 6.378.160 \text{ m} \\ f &= 1 : 298,25\end{aligned}$$

**Quadro 1.2** Parâmetros do Sistema SAD — 69, Vértice CHUÁ.

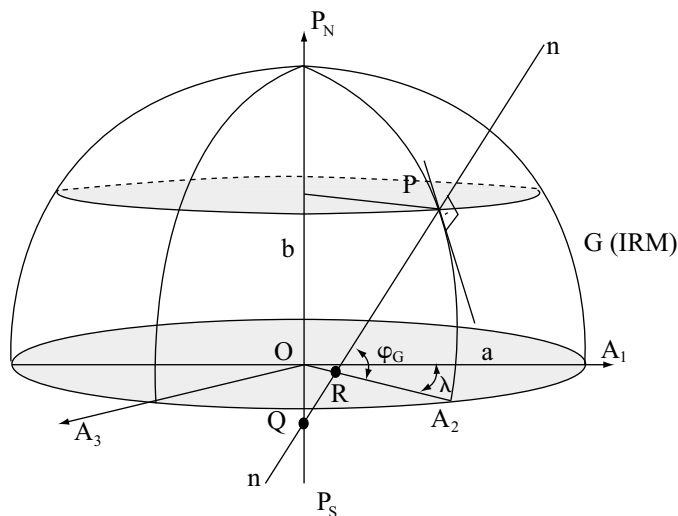
Atualmente, com o advento de satélites projetados para isso, definiu-se um novo elipsóide para todo o mundo, o World Geodetic System, conhecido como WGS-84. Todas as coordenadas obtidas através de satélites ficam referidas a esse novo elipsóide.

Em 2005 o IBGE adotou oficialmente como sistema geodésico de referência o SIRGAS 2000, com o elipsóide indicado no Quadro 1.1.

## 1.5 Elementos do Elipsóide

### 1.5.1 Sistema de coordenadas

De acordo com a Figura 1.3 podem ser definidas as seguintes linhas e ângulos.



**Figura 1.3** Referências para as coordenadas.

- a) **seção normal** — é qualquer seção que contenha a normal  $nn$  ao elipsóide no ponto  $P$ . Em outras palavras, é a linha de intersecção entre o elipsóide e qualquer plano que contenha a normal  $nn$  (esse plano pode girar em torno de  $(nn)$ ).
- b) **seção meridiana** — é uma particular seção normal, aquela que contém o eixo menor  $b$ , ou seja, o eixo dos pólos  $PN PS$ .
- c) **grande normal  $N$**  — é o segmento  $PQ$  da normal, que vai do ponto  $P$  na superfície da Terra até o encontro  $Q$  da normal com o eixo dos pólos.
- d) **pequena normal  $N'$**  — é o segmento  $PR$  da normal, que vai do ponto  $P$  ao plano do equador.
- e) **meridianos geodésicos** — correspondem aos meridianos da Terra, definindo-se como as seções perpendiculares ao equador que contém o eixo dos pólos; são seções meridianas (elipses) em diversos pontos, por exemplo, na Figura 1.3: PNA1, PNA2, PNA3.
- f) **paralelos geodésicos** — são círculos definidos por planos paralelos ao equador que cortam o elipsóide.
- g) **longitude** — é o ângulo com aresta  $PNPS$ , entre o meridiano local e o meridiano de origem ( $IRM$  — antigo Greenwich) PNA1 na Figura 1.3 e representado pela letra  $\lambda$ .
- h) **latitude geodésica ou elipsoidal** — é o ângulo da normal ao elipsóide no ponto, com o plano do equador. Em geral é calculado através da equação do elipsóide e se representa por  $G$ .
- i) **latitude geográfica ou astronômica** — é o ângulo da vertical (normal ao geóide) com o equador. Em geral é determinada por visada a astros e referenciada por instrumentos que se orientam pelo fio de prumo (vertical gravimétrica). Não está representada nesta figura mas sim na 1.1.
- j) **desvio da vertical** — é o ângulo ( $\Delta$ ) entre a vertical (ou normal ao geóide) e a normal ao elipsóide, como mostrado na Figura 1.1.

## 1.5.2 Raios de curvatura sobre o elipsóide

De acordo com a Figura 1.4 podem ser apresentadas as seguintes grandezas:

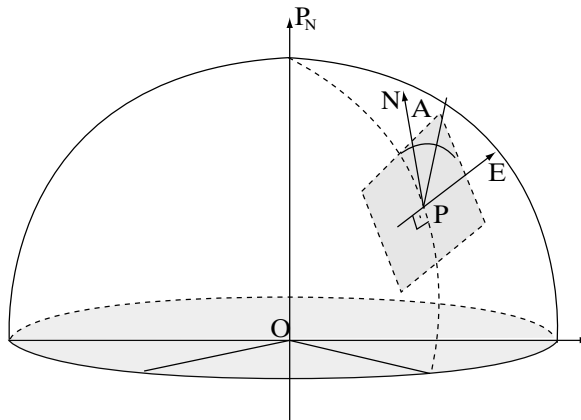


Figura 1.4 Raios de curvatura no elipsóide.

a) **Raio de curvatura na seção meridiana — M**

Como se viu, a seção meridiana que contém um ponto P qualquer, denominada também meridiano geodésico, é uma linha sobre o elipsóide que contém a normal ao elipsóide no ponto e passa pelos pólos. Contém a linha NS. É uma elipse cujo raio de curvatura pode ser definido em cada ponto pela equação:

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2\varphi)^{3/2}}$$

onde:

a = semi-eixo maior

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2 \cdot \alpha - \alpha^2 \text{ (primeira excentricidade ao quadrado)}$$

$\varphi$  = latitude do local; para efeitos práticos, pode-se confundir as latitudes elipsóidicas com as astronômicas

b) **Raio de curvatura na seção transversa — N**

A seção transversa é aquela que contém a normal no ponto P e é perpendicular à linha NS; contém portanto a linha EW. É uma linha que possui em cada ponto um raio de curvatura que pode ser definido pela equação.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2\varphi}}$$

c) **Relação entre M e N ( $N \geq M$ )**

Dividindo-se N por M chega-se à seguinte relação:

$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cdot \cos^2\varphi = 1 + m^2$$

com:  $v^2 = e'^2 \cos^2\varphi$

\*como  $\eta^2 \geq 0$ , tem-se sempre  $N \geq M$ .

\*no equador  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\cos\varphi = 1$ ,  $N = a$

$$\text{sen}\varphi = 0 \quad M = a(1 - e^2)$$

\* no pólo  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\cos\varphi = 0$ ,  $N = M = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$

$\text{sen}\varphi = 1$



d) **Raio de uma seção qualquer, de azimuth A**

Para uma seção normal qualquer, que faça um azimuth A, com a linha NS, o raio de curvatura pode ser calculado pelo Teorema de Euler:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\text{sen}^2 A}{N} + \frac{\text{cos}^2 A}{M}$$

ou

$$R_A = \frac{M \cdot N}{N \cdot \text{cos}^2 A + M \cdot \text{sen}^2 A}$$

O que fornece um resultado intermediário entre o raio máximo (N) e o raio mínimo (M).

e) **Raio médio de curvatura**  $R_m = \sqrt{M \cdot N}$

Tem o sentido físico de uma média geométrica dos raios em todas as direções (0 a 360°) e pode ser entendido como o raio de uma esfera que tangencia o elipsóide no ponto.

Pode ser deduzido utilizando a fórmula do raio de uma seção qualquer e realizando uma adequada integração (0 a  $2\pi$ ) com um incremento de ângulo  $\delta A$ , parte-se da fórmula:

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M \cdot N dA}{N \cdot \text{cos}^2 A + M \cdot \text{sen}^2 A}$$

e chega-se ao resultado :

$$R_m = \sqrt{M \cdot N}$$

ou

$$R_m = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}$$

f) **Raio de um paralelo**  $R_p = N \cdot \text{cos} \varphi$

Pode ser deduzido facilmente da Figura 1.5, calculando :

$$\text{cos} \varphi = \frac{R_p}{N}, \text{ donde } R_p = N \cdot \text{cos} \varphi$$

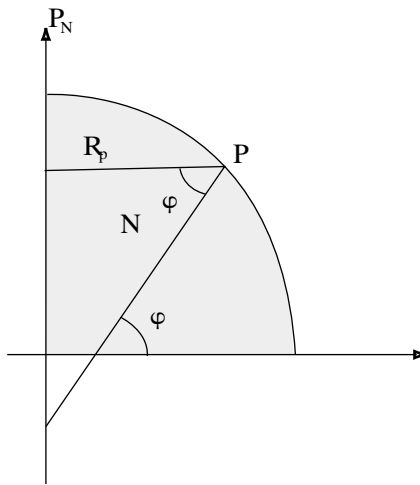


Figura 1.5 Raio de um paralelo.

Obs.: Como observação final destaca-se que os elementos definidos acima dependem do elipsóide escolhido ( $a$ ,  $e^2$  ou  $\alpha$ ), e da latitude do ponto ( $\varphi$ ), que por sua vez pode estar em função da determinação astronômica da latitude no *datum* de origem (Chuaú, Córrego Alegre, WGS84, etc)

## 1.6 Exercícios Propostos

### Exercícios sobre a Geometria do elipsóide

Dados	elipsóide			
Parâmetros	Córrego Alegre	SAD-69	WGS-84	SIRGAS 2000
$a =$	6378388,00	6378160,00	6378137,00	6378137,00
$f =$	297,00000	298,25000	298,57223563	298,25722101
$\alpha = 1/f$				

#### 1) Calcular os seguintes parâmetros auxiliares para esses elipsóides

$$b =$$

$$c =$$

$$e^2 =$$

$$e'^2 =$$

#### 2) Calcular, para o SAD-69, os raios M, N, Rm e Rp, nas latitudes indicadas

caso	latitude	local
a)	0° 00'	Equador

<b>b)</b>	23°27'	São Paulo
<b>c)</b>	66°33'	Círculo polar
<b>d)</b>	90°00'	Polo sul

**Cálculos auxiliares**

**a)** 0° 00'      **b)** 23°27'      **c)** 66°33'      **d)** 90°00'

$$\varphi \text{ (grau e fração)} =$$

$$\text{sen}^2(\varphi) =$$

$$v^2 = e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi) =$$

$$1 - v^2 =$$

$$\text{Raiz } (1 - v^2) =$$

**Cálculos**

$$\mathbf{M} =$$

$$\mathbf{N} =$$

$$\mathbf{Rm} =$$

$$\mathbf{Rp} =$$

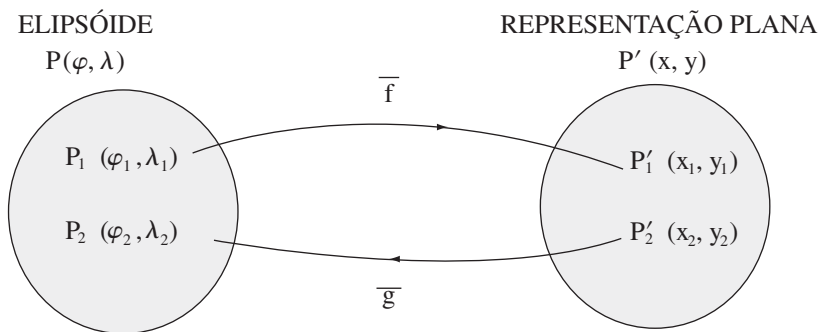


# Sistema de Projeção Cartográfica

## 2.1 Sistema de Projeção

Nem a esfera nem o elipsóide são planificáveis. No entanto, para os projetos de engenharia, necessita-se de uma representação plana de figuras existentes sobre a superfície da Terra. Trata-se pois de estabelecer uma lei de correspondência entre elementos do elipsóide e suas representações planas, e que minimize, de acordo com algumas regras, as distorções, inevitáveis pela própria natureza do problema.

Sistema de projeção é então, neste contexto, o modo como se correlacionam os pontos da superfície da terra com suas representações planas. Deve-se chegar a uma equação matemática, com ou sem uma representação geométrica, que estabeleça uma forma de calcular  $x$  e  $y$  (N, E) em função de  $\varphi$ , e vice-versa, conforme apontamos esquematicamente na Figura 2.1.



**Figura 2.1** Sistema de projeção e leis de correspondência.

$\bar{f}(f, f')$  e  $\bar{g}(g, g')$  = leis matemáticas

**transformação direta:**      **transformação inversa:**

$$x = f(\varphi, \lambda)$$

$$\varphi = g(x, y)$$

$$y = f'(\varphi, \lambda)$$

$$\lambda = g'(x, y)$$

Queremos obter, em resumo, as funções,  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  e  $g'$ .

## 2.2 Classificação das Projeções

Existem diversas maneiras de classificar as projeções, cada uma de acordo com um critério adotado. Serão vistas algumas delas, na medida em que são úteis para o objetivo de entender melhor o assunto e as propriedades da UTM.

### 2.2.1 Classificação quanto à propriedade que conservam

Pelo próprio processo, não é possível conservar todas as propriedades ao mesmo tempo. Assim tem-se;

- a) **projeções equidistantes** — não apresentam deformações lineares em uma ou algumas direções. Podem ser meridianas, transversais ou azimutais caso a equidistância seja do longo dos meridianos, paralelos ou ao longo de círculos máximos, respectivamente.
- b) **projeções equivalentes** (ou equiáreas) — não deformam as áreas, dentro de certos limites de extensão.
- c) **projeções conformes** (ou ortomórficas) — não deformam ângulos e portanto mantém a forma, também dentro de certos limites de extensão.
- d) **projeções afláticas** — não conservam nenhuma propriedade, mas minimizam as deformações em conjunto (ângulos, áreas, distâncias).

### 2.2.2 Classificação quanto ao método construtivo

- a) **geométricas** — são as que se baseiam em princípios geométricos projetivos e existe um significado físico para a projeção. Podem ser *perspectivas* quando adotam um ponto de vista (PV) e traçam raios visuais pelos pontos da superfície da terra, que determinam as projeções sobre o plano; ou *pseudo-perspectivas*, quando utilizam o recurso de um artifício, por exemplo, adotar um PV móvel.

As perspectivas por sua vez dividem-se em *gnômica* ou central (quando o PV é o centro da terra), *estereográfica* (PV diametralmente oposto ao ponto a ser projetado); *ortográfica* (PV diametralmente oposto ao ponto a ser projetado) e *cenográfica* (PV é um ponto qualquer, a uma distância finita). Esses casos são representados na Figura 2.2.

Um exemplo de projeção pseudo-perspectiva é a cilíndrica equatorial estereográfica, em que o PV se movimenta ao longo do equador, situando-se sempre no anti-meridiano do ponto a projetar.

- b) **analíticas** — são as que se baseiam em leis de correspondência matemática, e não possuem um significado geométrico. Podem ser simples (regulares) ou modificadas (irregulares).

As simples baseiam-se em leis matemáticas provenientes de condições previamente estabelecidas. Por exemplo, a cilíndrica equatorial conforme, impõe as condições geométricas para manter a forma dos elementos e a equidistante azimutal impõe as relações necessárias para que não haja deformação nas distâncias.

As modificadas surgem por transformações a partir das simples. Por exemplo, a equivalente de Bonne é derivada da cônica equidistante meridiana.

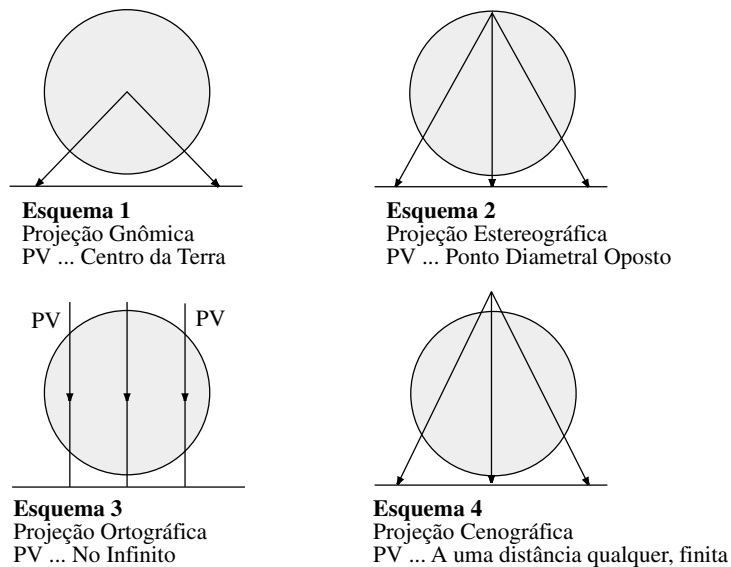


Figura 2.2 Projeções perspectivas.

- c) **convencionais** — são as que se baseiam em princípios projetivos arbitrários, por convenção, para deduzir uma expressão matemática.

Por exemplo, a de Mollweide impõe que os paralelos sejam retas, os meridianos, elipses e a quadrícula apresente equivalência.

### 2.2.3 Classificação quanto ao tipo de superfície de projeção adotada

- a) **planas** ou **azimutais** (zenitais) — são aquelas em que a superfície de projeção é um plano, tangente ou secante à superfície. O nome azimutal deriva-se do fato de que os azimutes se mantêm (conforme).
- b) **por desenvolvimento** — são as que adotam uma superfície de projeção desenvolvível, e de acordo com esta dividem-se em:
- cônicas (ou policônicas)
  - cilíndricas
  - poliédricas

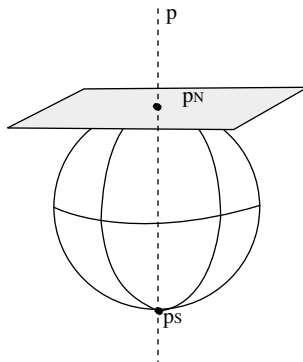
Uma superfície desenvolvível é aquela que cortada por uma aresta pode ser planificada sem deformação.

## 2.2.4 A classificação quanto à posição relativa da superfície de projeção ou à orientação do eixo dessa superfície

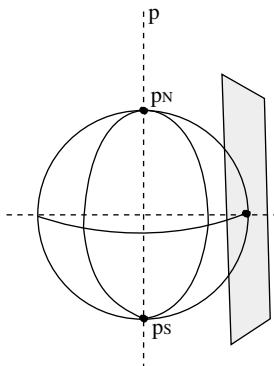
As figuras a seguir (2.3a, 2.3b e 2.3c) esclarecem as classificações quanto à posição relativa da superfície de projeção ou à orientação do eixo dessa superfície.

### Planas

#### Polar — Plano tangente no pólo



#### Equatorial — Plano tangente no equador



#### Horizontal — Plano tangente em um ponto qualquer

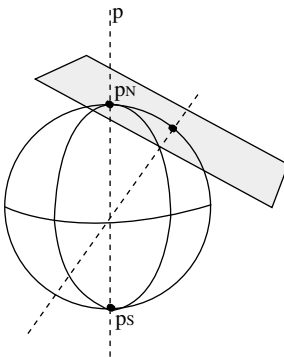
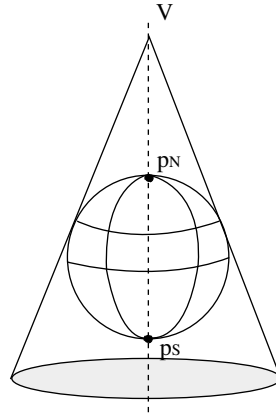


Figura 2.3a Projeções planas.

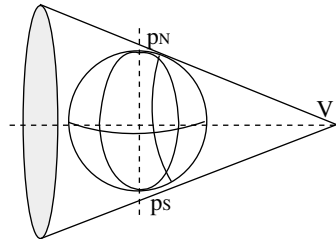


## Cônicas

### Normal — Eixo do cone paralelo ao eixo da Terra



### Transversa — Eixo do cone perpendicular ao eixo da Terra



### Horizontal — Eixo do cone em relação ao eixo da Terra

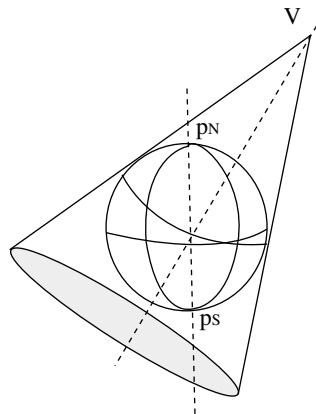
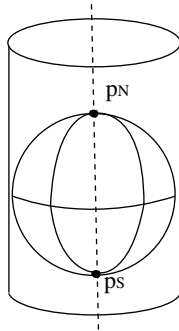


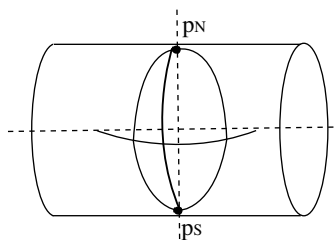
Figura 2.3b Projeções cônicas.

## Cilíndricas

### Equatorial — Eixo do cilindro paralelo ao eixo da Terra



### Transversa — Eixo do cilindro perpendicular ao eixo da Terra



### Obliqua — Eixo do cilindro inclinado em relação ao eixo da Terra

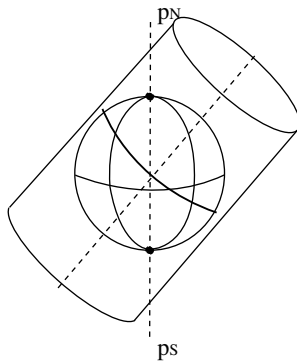


Figura 2.3c Projeções cilíndricas.

Nas superfícies planas a posição do ponto de tangência pode originar as seguintes denominações, *polares* (tangência no pólo), *equatoriais ou meridianas* (no equador) e *horizontais ou oblíquas* (num ponto qualquer).

Nas superfícies por desenvolvimento, o eixo vertical, coincidente com a linha dos pólos, dará origem à designação *normal* para as cônicas e *equatorial* para as cilíndricas. O eixo horizontal dará origem às designações *transversa* (ou meridiana) tanto para as cônicas como para as cilíndricas. O eixo situado numa posição qualquer dará origem aos nomes *horizontal*, para as cônicas e *oblíqua* para as cilíndricas.

## 2.3 Designação

Para dar nomes as projeções deve-se seguir, em princípio, as seguintes regras:

- 1) enunciar em primeiro lugar a natureza da superfície de projeção (plana, cônica, cilíndrica).
- 2) a seguir a posição do eixo (ponto) com relação à linha dos pólos (polar, normal, transversa).
- 3) finalmente, acrescentar a propriedade que conservam, se for analítica (conforme, equidistante, equiárea) ou a posição do ponto de vista, se for geométrica (gnômica, esteográfica, ortográfica).

Por exemplo tem-se: cilíndrica equatorial conforme ou ainda cônica azimutal equivalente, e assim por diante.

No entanto, por simplificação e por força do uso, muitas vezes a projeção é mais conhecida pelo nome do autor do que pela designação científica. Assim, a cilíndrica equatorial conforme é conhecida como de Mercator e a cônica azimutal equivalente leva o nome de Lambert.

A isso acrescenta-se o fato de que as irregulares sempre recebem o nome de seu criador.

## 2.4 Seleção do Sistema de Projeção

A escolha de uma ou outra forma de projeção dependerá fundamentalmente da finalidade de que se pretende, da região a representar (incluindo sua forma), e dos erros aceitáveis.

Assim os planisférios (mapas mundi) para estudo de países e seus limites, visualização geral do relevo, representação de climas, correntes marítimas, vegetação, cidades, etc., não necessitam de uma exatidão muito grande, o que possibilita um amplo leque de escolha.

Países alongados numa direção podem escolher superfícies de tangência ao longo dessa linha, para minimizar as deformações.

Cartas para navegação (marinha, aeronáutica) exigem maior precisão e fundamentalmente a manutenção de ângulos para o estabelecimento dos planos de vôo/rumo e por isso podem adotar uma projeção conforme.

Os atlas celestes devem conservar as formas, para que se reconheçam as constelações com facilidades; daí surgem projeções conformes, geralmente estereográficas.



Os projetos e ante-projetos de engenharia, em que se necessita conhecer a escala, e onde a precisão é algo importante, adotam sistemas conformes, principalmente o UTM (Universal Transverso de Mercator) e o LTM (Local Transverso de Mercator) que é uma variante do primeiro.

Concluindo, o sistema UTM é Universal já que é aplicável em toda a extensão do globo terrestre; é Transverso porque o eixo do cilindro é perpendicular à linha dos pólos, e recebe o nome de Mercator em honra ao primeiro idealizador desse tipo de projeção, Gerhard Kremer (1512 — 1594), cujo nome latinizado é Gerardus Mercator.

Trata-se pois de uma projeção cilíndrica de eixo equatorial (transversa), que mantém a forma das figuras (conforme), sendo que a tangência do cilindro se dá ao longo dos meridianos. Isso numa primeira aproximação já que, para minimizar os erros, adota-se um cilindro secante, como se verá mais adiante.



# Representações Conformes

Como se viu, recebe o nome de projeção conforme toda aquela que mantém a forma de pequenas figuras, isto é, dado um elemento geométrico (um círculo, um quadrado) sobre a superfície da Terra, sua representação na carta conservará a mesma forma sem alterar, portanto, os ângulos. Pode haver, no entanto, uma alteração de escala.

## 3.1 Indicatriz de Tissot (sentido físico)

A existência de deformações era conhecida desde os inícios da cartografia, já que não se pode planificar uma esfera sem deformar a superfície. No entanto, a determinação matemática envolve o cálculo diferencial que só foi desenvolvido por Newton e Leibniz em fins do século XVII.

Tissot, cientista francês de século XIX, foi o primeiro que classificou as deformações de maneira racional. Examinou, para isso, as variações de um pequeno círculo desenhado sobre a superfície da Terra e sua transformada em um sistema de projeção. O resultado dessa transformação será genericamente uma elipse.

De acordo com a propriedade que cada tipo de projeção apresenta, a elipse assumirá uma determinada forma, de acordo com a Figura 3.1.

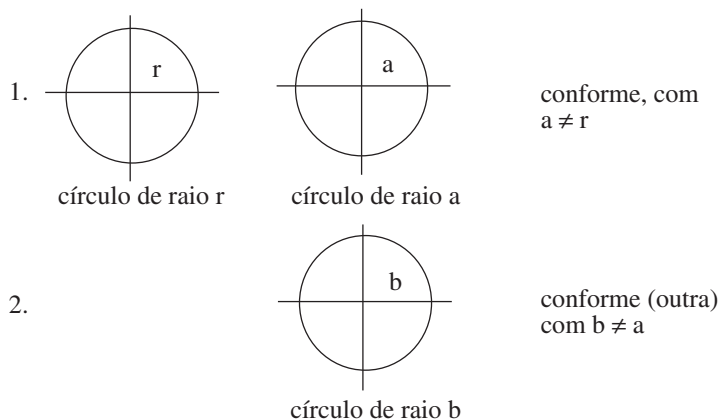
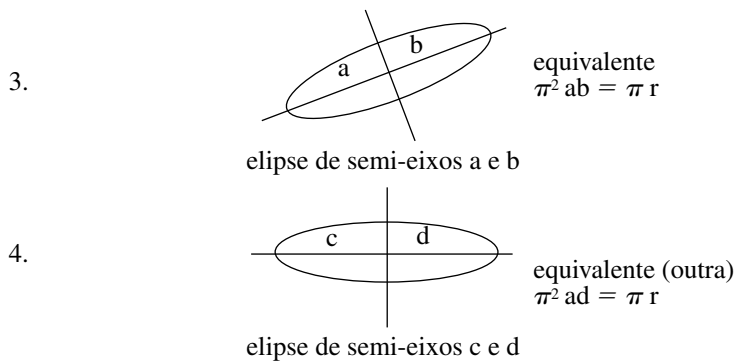
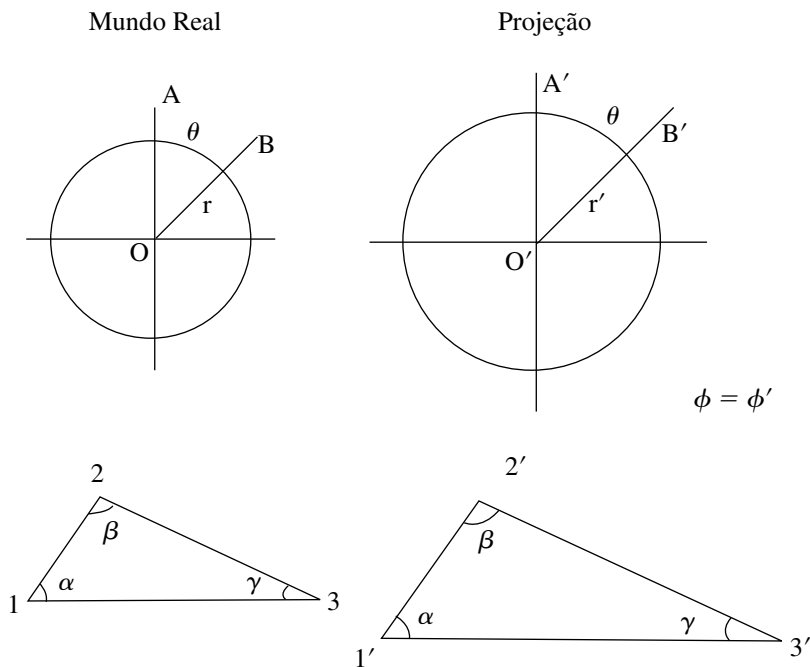


Figura 3.1 Representação gráfica da elipse de Tissot.



**Figura 3.1** Representação gráfica da elipse de Tissot. (Continuação)

Na projeção conforme, para a manutenção das formas, os ângulos devem-se conservar, como se vê na Figura 3.2



**Figura 3.2** Projeção conforme.

Essa projeção recebeu também outros nomes de acordo com quem as estudou: ortomórficas (Germain), autogonais (Tissot) e isogônicas (Fiorini). Ao longo de linhas privilegiadas as distâncias podem ser mantidas, sendo que nas outras direções surgem deformações que podem ser conhecidas e controladas. Conhecendo-se o fator de escala pode-se introduzir as correções apropriadas para o comprimento de cada distância.

Os meridianos e paralelos transformados cruzam-se ortogonalmente, como se pode deduzir da manutenção das formas.

As vantagens desse tipo de representação sobre os demais sistemas para muitas aplicações é tão nítida que seu uso vem sendo cada vez mais generalizado.

## 3.2 Equações de Representação Conforme

Uma vez visto o sentido físico da transformação de um círculo numa elipse, pode-se passar ao estudo de sua expressão matemática. Para isso recorre-se ao cálculo diferencial, da maneira que se esboçará a seguir.

Tomam-se figuras e curvas elementares sobre o elipsóide e suas correspondentes na representação plana (Figura 3.3) e procura-se correlacionar umas com as outras, através de equações matemáticas. A lei de correlação inicialmente é geral, e a seguir impõem-se as condições de conformidade.

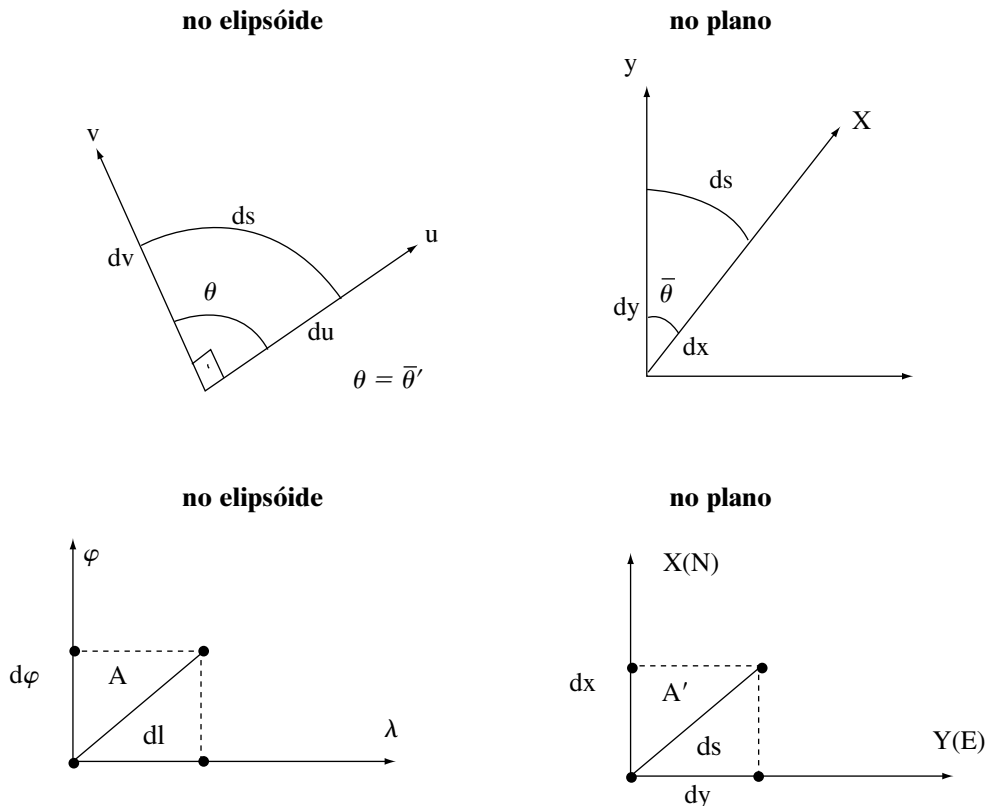


Figura 3.3 Relações de conformidade.

$$dl^2 = d\varphi^2 + d\lambda^2 \quad (1)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2)$$



Como se sabe, o que se quer encontrar são funções que permitam calcular  $x$  e  $y$  ( $N$  e  $E$ ) a partir de  $\lambda$  e  $\varphi$ . genericamente :

$$x = f(\lambda, \varphi) \quad y = f'(\lambda, \varphi)$$

O relacionamento entre essas variáveis pode ser obtido como na seqüência, inicia-se calculando as diferenciais totais de  $x$  e  $y$  com relação a  $\lambda$  e  $\varphi$ .

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \quad (3)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \quad (4)$$

Substituindo-se (3) e (4) em (2) e rearranjando os termos tem-se:

$$ds^2 = ad\varphi^2 + 2bd\varphi d\lambda + cd\lambda^2 \quad (5)$$

$$\text{com } a = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$b = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$c = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

A seguir calcula-se o fator escala  $k$  ( ou seu quadrado ), tendo em conta (1), e (5) :

$$k^2 = \frac{\partial s^2}{\partial \ell^2} = \frac{ad\varphi^2 + 2bd\varphi d\lambda + cd\lambda^2}{d\varphi^2 + d\lambda^2} \quad (6)$$

Para a projeção conforme  $k^2 = \text{constante}$ , qualquer que seja o azimute  $\lambda$ , com  $\text{tg}A = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}$ . Dividindo o numerador e denominador de (6) por  $d\varphi^2$  e substituindo essa  $\text{tg}A$ , tem-se :

$$k^2 = \frac{a + a\text{tg}^2A}{1 + \text{tg}^2A} = a$$

De maneira semelhante podem ser deduzidas outras relações, como se verá. Será necessário impor outras condições, como por exemplo que a coordenada  $x$  seja igual ao comprimento do arco de meridiano, da origem até o ponto.

O que foi apresentado teve a intenção de mostrar o caminho de como são deduzidas as fórmulas complexas que serão apresentadas na seqüência.





# IV Sistema UTM

## 4.1 Breve Histórico e Especificações

O Sistema Universal Transverso de Mercator em sua forma moderna foi apresentado por J. H. Lambert, mas já havia sido utilizado por Gauss em 1866 para calcular a triangulação de Hanover (Alemanha). As aproximações sobre a esfera, feitas na época, tem uma expressão matemática simples, mas as expressões são mais complexas quando se utiliza o elipsóide, já que este deve ser resolvido por aproximações e desenvolvimentos em série.



Gerardus Mercator

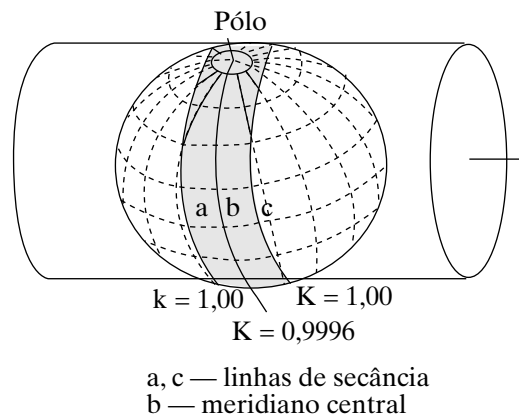


J. H. Lambert

Em 1912 surge um aperfeiçoamento através do sistema Gauss-Kruger, em que os cálculos são logarítmicos, mas ainda necessitam de outros termos obtidos através de tabelas incômodas. Entre as duas grandes guerras mundiais diversos países da Europa e a ex-URSS adotaram essa projeção para a confecção de seus mapas militares.

Em 1950, os EUA propuseram uma combinação para abranger a totalidade das longitudes, e o sistema recebeu a denominação atual: Projeção Universal Transversa de Mercator (U.T.M.).

As especificações desse sistema, válido universalmente, hoje em dia, podem ser acompanhadas na Figura 4.1 e são as seguintes:



**Figura 4.1** Esquema da projeção UTM — esfera e cilindro secante.

- 1) Projeção cilíndrica, conforme, de acordo com os princípios de Mercator-Gauss, com uma rotação de  $90^\circ$  do eixo do cilindro, de maneira a ficar contido no plano do equador (transversa). Essa configuração resultaria numa tangência entre o cilindro e a esfera ao longo de um meridiano. Mas a seguir, adotam-se hipóteses suplementares que alteram ligeiramente essa imagem geométrica.
- 2) A adoção de um elipsóide de referência (em vez da Terra esférica), que inicialmente foi um para cada país ou grupo de países, mas que agora se vem procurando unificar através de um elipsóide internacional cujos parâmetros vêm sendo determinados com maior precisão (SAD-69, NWL-90, WGS-84, etc.).
- 3) Um fator de redução de escala  $K_0 = 1 - \frac{1}{2500} = 0,9996$  que corresponde a tomar um cilindro reduzido desse valor, de forma a tornar-se secante ao esferóide terrestre. Isso diminui o valor absoluto das deformações, e em lugar de termos uma só linha de verdadeira grandeza ( $K = 1$ ) e deformações sempre positivas (ampliações) passa-se a ter duas linhas de deformação nula ( $k = 1$ ) com redução no interior ( $k < 1$ ) e ampliação no exterior ( $k > 1$ ).
- 4) A adoção de 60 cilindros de eixo transversal, obtidos através da rotação do mesmo no plano do equador de maneira que cada um cubra a longitude de  $6^\circ$  ( $3^\circ$  para cada lado do meridiano central), mantendo as deformações dentro de limites aceitáveis. Essa largura já havia sido calculada pelo francês Tardi, em torno de 1930. Os fusos são numerados de 1 a 60, a partir do antimeridiano de

Greenwich, sendo que os correspondentes ao território brasileiro estão representados na Figura 4.2. Pela simetria do elipsóide de revolução, os cálculos são idênticos para todos os cilindros/fusos e os resultados são válidos para toda a terra. Como observação pertinente, o sistema LTM (Local Transversa de Mercator) segue todas essas especificações de 1) a 4), alterando somente o campo de aplicação para 1° em longitude em vez de 6° e adotando portanto, 360 cilindros.

- 5) Em latitude os fusos são limitados ao paralelo de 80°N e S pois acima desse valor as deformações se acentuam muito. As regiões polares são representados então por outro tipo de projeção, a Estereográfica Polar Universal.

**OBS.:**

1. Para calcular a longitude do meridiano central (MC) em função do fuso (F), pode-se utilizar a fórmula  $MC = 183 - 6 \cdot F$ . Para encontrar os limites do fuso, basta somar e subtrair 3°.
2. Para calcular o meridiano central (MC) em função da longitude ( $\lambda$ ) de um ponto, pode-se utilizar a fórmula  $MC = 6 \cdot \text{INT}(\lambda/6 + 0,5)$  ou, o que é a mesma coisa,  $MC = 6 \cdot \text{INT}((\lambda + 3)/6)$ .
- 6) Na representação plana, que se obterá pela abertura e planificação do cilindro, a origem das coordenadas (cruzamento do equador com o meridiano central) será acrescida em cada fuso das constantes 10.000.000 metros (só para o hemisfério sul) no eixo das ordenadas (NS) e de + 500.000 metros no eixo das abcissas (EW). Isto se faz para evitar coordenadas negativas que surgiriam na vertical no hemisfério sul e na horizontal à esquerda de qualquer meridiano central.

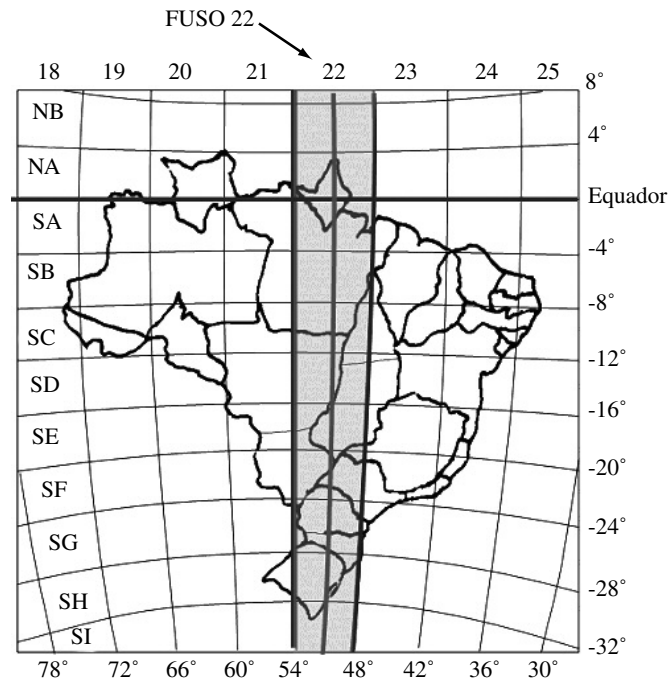


Figura 4.2 Fusos da projeção UTM no Brasil.

## 4.2 Relações Fundamentais

Para resolver as equações práticas de transformação de coordenadas, de  $\varphi$  e para  $x, y$  (N, E) e a inversa, necessitamos primeiro estabelecer algumas relações fundamentais, que simplesmente indicaremos, sem entrar em detalhes de dedução.

### a) No elipsóide

1. comprimento de um arco elementar de meridiano:

$$dB = dm = M \cdot d\varphi \text{ (obtido a partir da relação } s = \varphi \cdot R)$$

2. comprimento de um arco elementar de paralelo:

$$dp = r \cdot d = N \cdot \cos \varphi \cdot d$$

3. comprimento de um arco qualquer:

$$ds^2 = dm^2 + dp^2, \text{ donde:}$$

$$ds = N \cdot \cos \varphi \sqrt{\left(\frac{M d\varphi}{N \cdot \cos \varphi}\right)^2 + d\lambda^2}$$

### b) Na representação plana

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

### c) Escala de ampliação

$$k^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot (dL^2 + d\lambda^2)}, \text{ onde}$$

$$dL = \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos \varphi} \text{ foi obtida através da latitude isométrica } L \text{ que vale:}$$

$$L = \frac{M}{N \cdot \cos \varphi}$$

## 4.3 Dedução das Equações de Transformação

Indicaremos, somente a grande rasgos, os passos fundamentais dessa dedução, para que se tenha uma noção de sua origem.

### a) Desenvolvimento em série

O primeiro artifício a que se recorre é à teoria das variáveis complexas. ( $i = \sqrt{-1}$ , etc.) e se reescreve a escala de ampliação:

$$k^2 = \frac{(dx + i dy) \cdot (dx - i dy)}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot (dL + i d\lambda) \cdot (dL - i d\lambda)} =$$

$$= \frac{d(x + iy) \cdot d(x - iy)}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d(L + i\lambda) \cdot (L - i\lambda)}$$

Como se trata de uma projeção conforme, essa escala  $k$  deve independer do azimute  $A$ , de uma direção qualquer, e para isso devemos ter:

$$x + iy = f(L + i\lambda) \quad (f = \text{função de})$$

Desenvolvendo essa função em séries de Taylor, teremos:

$$x + iy = f(L) + i\delta\lambda$$

$$x + iy = f(L) + i\Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial L} + \frac{i^2}{2!} \Delta\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} + \frac{i^3}{3!} \Delta\lambda^3 \frac{\partial^3 f}{\partial L^3} + \frac{i^4}{4!} \Delta\lambda^4 \frac{\partial^4 f}{\partial L^4} + \frac{i^5}{5!} \Delta\lambda^5 \frac{\partial^5 f}{\partial L^5} + \dots$$

Tendo em conta o valor das diferentes potências de  $i$  e igualando separadamente as partes reais e imaginárias chega-se a:

$$(1) \quad x = f(L) - \frac{\Delta\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} + \frac{\Delta\lambda^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial L^4} - \frac{\Delta\lambda^6}{6!} \frac{\partial^6 f}{\partial L^6} + \dots$$

$$(2) \quad y = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\Delta\lambda^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial L^3} + \frac{\Delta\lambda^5}{5!} \frac{\partial^5 f}{\partial L^5} - \frac{\Delta\lambda^7}{7!} \frac{\partial^7 f}{\partial L^7} + \dots$$

#### b) Cálculo da função $L$ e suas derivadas

Essas expressões ficam resolvidas se conseguirmos uma expressão analítica para  $f(L)$  pois então podemos calcular as sucessivas derivadas de  $f(L)$  com relação a  $L$ :  $\frac{\partial f}{\partial L}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}$ , etc.

Isso pode ser feito impondo as demais condições do Sistema: que  $x$  seja contado a partir do equador, para o norte ou para o sul e que  $y$  seja contado a partir do meridiano central, e então vemos que:

- para  $\varphi = 0$  e  $\Delta\lambda = 0$  devemos ter  $x = 0$  e  $y = 0$  (origem)
- para  $\varphi \neq 0$  e  $\Delta\lambda = 0$  devemos ter  $x = B$  (arco de meridiano, contado a partir do equador) e  $y = 0$

Que levadas a (1) e (2) fornecem que  $f(L) = B$ , o que em princípio soluciona nosso problema, já que o arco de meridiano se calcula pela fórmula

$$B = \int_0^\varphi dm$$

Por outro lado, sabemos que  $dB = dm = M d\varphi$  ou  $\frac{dm}{d\varphi} = M$  e  $\frac{d\varphi}{dL} = \frac{N \cos \varphi}{M}$ , relações que permitem calcular as sucessivas derivadas  $f(L)$ . Por exemplo, a primeira derivada se calcula:

$$\frac{\partial f(L)}{\partial L} = \frac{\partial B}{\partial L} = \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial L} = \frac{\partial m}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial L} = M \frac{N \cos \varphi}{M} = N \cos \varphi$$

Calculando as sucessivas derivadas podemos introduzi-las nas expressões (1) e (2), sendo que antes fazemos as seguintes simplificações de notação:

Resulta então:

$$\begin{aligned} \frac{N}{M} &= 1 + v = 1 + n, \text{ com } n = e' \cos \varphi \text{ (} n = v \text{)} \\ \text{tg} &= t \end{aligned}$$

$$(N) \frac{x}{k_0} = B - N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\Delta \lambda^2}{2} + \frac{\Delta \lambda^4}{4} N \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) - \dots$$

$$(E) \frac{y}{k_0} = \Delta \lambda N \cos \varphi + \frac{\Delta \lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 + n^2 - t^2) + \frac{\Delta \lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4) + \\ + 14n^2 - 58t^2n^2 + 13n^4 + 2t^4n^2$$

### c) Cálculo do arco de meridiano B

Para calcular B utilizamos a integral elíptica  $B = \int_0^\varphi dm$  onde

$$dm = M d\varphi = \frac{a(1 - e^2)d\varphi}{(1 - e \cdot \operatorname{sen} \varphi)^{3/2}}$$

Essa integral não possui primitiva e do seu desenvolvimento em serie resulta a seguinte expressão:

$$B = a(A_0 \varphi - A_2 \operatorname{sen} 2\varphi + A_4 \operatorname{sen} 4\varphi - A_6 \operatorname{sen} 6\varphi)$$

com:

a — semi-eixo maior do elipsóide

$\varphi$  — latitude em radianos

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6$$

$$A_2 = \frac{3}{8} \left( e^2 + \frac{1}{4}e^4 - \frac{15}{256}e^6 \right)$$

$$A_4 = \frac{15}{256} \left( e^4 + \frac{3}{4}e^6 \right)$$

$$A_6 = \frac{35}{3072} e^6$$

Essa fórmula, desenvolvida por Bomford, despreza os termos de ordem igual e superior 8 ( $A_8$  e  $e^8$ ) e fornece a precisão de mm, que é mais do que suficiente. Os coeficientes  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  e  $A_6$  dependem exclusivamente do valor de e, ou de  $e^2 = (2 - \alpha)$  e portanto são constantes para um determinado elipsóide.

Para determinar as equações finais, devemos lembrar que além de limitar o número de termos das séries, deve-se utilizar o cilindro secante e não tangente (multiplicar por  $K_0 = 0,9996$ ) e que se somam as constantes

$$500.000 \text{ em } y \text{ e } 10.000.000 \text{ em } x \text{ (para } \varphi < 0 \text{)}.$$

Então:

$$E = 500.000 + 0,9996 \cdot y$$

$$N = 0,9996 \times (+ 10.000.000)$$

## 4.4 Fórmulas de Transformação de Coordenadas Geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ) em Plano Retangulares UTM (N,E) — Problema Direto

As fórmulas desenvolvidas anteriormente funcionam perfeitamente, mas para a programação em calculadoras é preferível utilizar outras que simplificam a notação e facilitam o cálculo em cadeia. Por exemplo as fórmulas utilizadas por manuais americanos, compiladas por T. Vincenty (TM 5.241-18).

$$* N = S_0 + S \text{ (para } \varphi < 0 \text{)}$$

$$* E = E_0 + 500.000$$

onde  $S_0 = B \cdot K_0$  (primeiro termo da série, arco de meridiano reduzido)

$S$  = outros termos da série

$$S_0 = A \frac{a}{1 - \alpha} K_0 \{ \varphi - B \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi [1 + C \cos^2 \varphi (D \cos^2 \varphi - 1)] \}$$

### Valores para o SAD-69

com:

$a$  — semi-eixo maior do elipsóide: 6.378.160,00m

$\alpha = 1 - b/a$  achatamento  $f = 298,25$  ;  $\alpha = 1/f$

$K_0$  = fator escala no meridiano central  $1 - \frac{1}{2500} = 0,999$

$\varphi$  — latitude em radianos

$$A = 1 - \frac{q}{4}(12 + q \cdot (31 \cdot q - 21)) = 0,994976 \ 985$$

$$B = \frac{q}{4}(12 + q(15 + 13q)) = 0,005048373$$



$$C = \frac{5}{72}q(36 - 67q) = 0,004211273265$$

$$D = \frac{28q}{9} = 0,0052243679$$

$$q = (2f + 1)^{-1} = 0,001679261125$$

$$N = S_0 + \Delta S \text{ (+10.000.000 para } \varphi < 0)$$

$$E = E_0 + 500.000$$

com:  $a$ ,  $\alpha$ ,  $k_0$  e  $\varphi$  — já definidos anteriormente

$$t = \operatorname{tg}\varphi$$

$$q = \Delta\lambda \cos \varphi$$

com  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  em radianos

$\lambda_0$  = meridiano central do fuso

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$

com

$$e'^2 = \frac{2f - 1}{f^2 - 2f + 1}$$

$$v = \sqrt{1 + n^2}$$

#### 4.4.1 Exemplo: Marco municipal do IGG (Cidade Universitária — SP)

Dados (SAD-69):

$$\varphi = -23^\circ 33' 40,202077'' \text{ (Sul)}$$

$$\lambda = -46^\circ 44' 02,0460'' \text{ (WGr — a oeste de Greenwich)}$$

$$\lambda_0 = -45^\circ \text{ (WGr) (fuso 23)}$$

Resultados:

$$N = 7.393.277,200 \text{ m}$$

$$E = 323.030,998 \text{ m}$$

#### 4.4.2 Exemplo: Marco geodésico

Dados (SAD-69):

$$\varphi = -10^\circ 04' 38,748''$$

$$\lambda = -65^\circ 18' 57,219''$$

$$\lambda_0 = -63^\circ$$

Resultados:

$$N = 8.885.124,771 \text{ m}$$

$$E = 246.182,478 \text{ m}$$





### 4.4.3 Exemplo: Outro marco (exemplo fornecido pelo IBGE)

Dados (SAD-69):

$$\varphi = -16^{\circ} 23' 30,7554''$$

$$\lambda = 54^{\circ} 51' 22,1918''$$

$$\lambda_0 = 57^{\circ}$$

Resultados:

$$N = 8.186.501, 118 \text{ m}$$

$$E = 728.965, 993 \text{ m}$$

## 4.5 Fórmula de Transformação de Coordenadas — UTM (planos retangulares, N, E) para Geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ) — Problema Inverso

Seguindo uma dedução bastante análoga à anterior, chega-se a fórmula final, apropriada para os cálculos computacionais, e também elas derivadas dos manuais do U.S Army.

Deve-se proceder da seguinte maneira:

### a) Cálculo preliminar (latitude auxiliar f)

$$\varphi_f = W + F \cos^2 W (1 + g \cos^2 W (1 + H \cos^2 W))$$

onde:  $W = \frac{(N - N_0)(1 - \alpha)}{K_0 A a}$ , em radianos

N — coordenada norte, fornecida

$N_0 = 10.000.000$  (p/ o hemisfério sul)

0 (p/ o hemisfério norte)	valores no SAD-69
$K_0 =$ fator escala	0,9996
$\alpha =$ achatamento = 1/f	1 / 298,25
a = semi-eixo maior	6.378.160,00
$A = 1 - q/4.(12 + q \cdot (31 \cdot q - 21))$	0,994976985
$F = 1 - A + 0,14 \times 10^{-9}$	0,0050230134
$G = 3,5 \cdot q \cdot (1 - q/0,3269)$ ou $7q/2 (1 - 51q/156)$	0,005847222098
H = 1,388.G	0,008115944272

$$q = (2f - 1)^{-1} \text{ ou } \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)^{-1} \quad 0,001679261125$$

### b) Fórmulas

Chamando ainda  $t = \operatorname{tg} \varphi$  e

$$Q = \frac{v(1 - \alpha)}{a k_0} (E - E_0)$$

$$v = \sqrt{1 + n^2}$$

com:  $n^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_f'$  No SAD-69  $n^2 = 0,0067396608$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 + e^2}$$

$E$  — coordenada Este, fornecida

$E_0 = 500.000 \text{ m}$

$a, K_0, \alpha$  já definidos anteriormente

Temos finalmente, em radianos:

$$\varphi = \varphi_f + \frac{tQ^2}{2} \left( -1 - n^2 + \frac{Q^2}{12} (5 + 3(t^2(1 - n^2(2 + 3n^2)) + n^2(2 - n^2))) - \frac{Q^2}{2} (4 + 3t^2(2 + t^2)) \right)$$

$$\Delta\lambda = \frac{Q}{\cos \varphi_f} \left( 1 - \frac{Q^2}{6} \left( 1 + 2t^2 + n^2 - \frac{Q^2}{20} (5,05 + 4t^2(7 + 6t^2)) \right) \right)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

## 4.5.1 Exemplos para testes

Marco 1 (SAD-69)

Dados

$N = 7.469.610,04 \text{ m}$  (hemisfério Sul)

$E = 691.653,17 \text{ m}$

$\lambda_0 = 45^\circ$  (WGr)

Resultados

$\varphi = -22^\circ 52' 13,227''$

$\lambda = -43^\circ 07' 54,822''$

Marco 2

Dados (SAD-69)

$N = 464.281,61 \text{ m}$  (hemisfério Norte)

$$E = 745.159,24 \text{ m}$$

$$\lambda_0 = -63^\circ$$

Resultados

$$\varphi = 4^\circ 11' 50,214''$$

$$\lambda = -60^\circ 47' 29',340''$$

## 4.6 Observação sobre Fórmula e Precisão

As fórmulas são genéricas, mas as constantes devem ser determinadas para cada elipsóide em função de seus parâmetros ( $a$  e  $\alpha$ ). Alguns programas apresentados ao final pressupõem que se adota o SAD-69 e assim, caso se pretenda utilizar outro, é preciso tomar o cuidado de recalculas as constantes.

As fórmulas costumam variar bastante — também as que apresentaremos a seguir em função dos desenvolvimentos em série e do número de termos levados em consideração e também em função de algumas simplificações que se fazem em determinadas passagens, por exemplo.

A precisão depende do número de termos adotado e em geral é fortemente condicionada pelo cálculo do primeiro coeficiente, que é o mais significativo. Por exemplo, o comprimento de arco de meridiano.

Faltando em termos gerais, e sem considerar as determinações por satélite e VLBI, as coordenadas geográficas ( $\varphi, \lambda$ ) são determinadas astronomicamente e estão sujeitas a desvios médios da ordem de 0,01 a 0,02", sem falar no acúmulo de erros devido ao transporte na rede geodésica. De maneira que esse valor equivale a um erro linear de aproximadamente 50 centímetros na superfície da Terra, o que significa que as coordenadas plano-retangulares (N, E) tem um significado convencional no que diz respeito às frações de metro.

De tudo isso segue-se que o milímetro é absolutamente ilusório nos cálculos. Podem e devem ser levados em conta para evitar propagações de erros e com meio de verificar a exatidão das fórmulas, mas nunca como um índice de precisão.

A correspondência entre a precisão de ( $\varphi, \lambda$ ) e (N, E) pode ser avaliada sabendo que um arco de 1" corresponde a aproximadamente 30 m (30,86) sobre a superfície da Terra. Então, para obter 0,0001" precisamos a precisão de 3 mm (e vice-versa). Mas afinal das contas, como dizia alguém, "pode-se concluir que as coordenadas de vértices com precisão de milímetros, então erradas nos decímetros.

Finalmente, vale a pena dizer que foi publicada recentemente pelo IBGE uma tabela para o cálculo dessas coordenadas.

É um trabalho muito útil para a verificação e ajuste de fórmulas — como o foram as tabelas do passado — mas acreditamos que já estamos entrando em outra era, e as 280 páginas de números poderiam ter sido substituídas por 6 (seis) de um programa computacional adequado, que além disso não cairá em desuso pela adoção futura de outro elipsóide.



# V Convergência de Meridianos

## 5.1 Sentido Físico

Na projeção UTM, o meridiano central de cada fuso e o equador são retas, ao passo que os meridianos e os paralelos são curvas, como se pode concluir examinando as equações de transformação.

$$x = N = B(\varphi) + \frac{\Delta\lambda^2}{2!} N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{\Delta\lambda^4}{4!} N \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi (\dots) \quad (5.1)$$

$$y = E = \Delta\lambda N \cos \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3!} N \cos^3 \varphi (\dots) \quad (5.2)$$

Fazendo  $\varphi$  constante na primeira,  $N$  torna-se função de  $\Delta\lambda$ , sendo uma função parabólica com termos em potências pares, e assim os paralelos transformados ( $\varphi$  constante) apresentam-se simétricos com relação ao equador. Basta ver que:

$$N(\Delta\lambda) = N(-\Delta\lambda) \text{ pois } (\Delta\lambda)^{2n} = (-\Delta\lambda)^{2n}$$

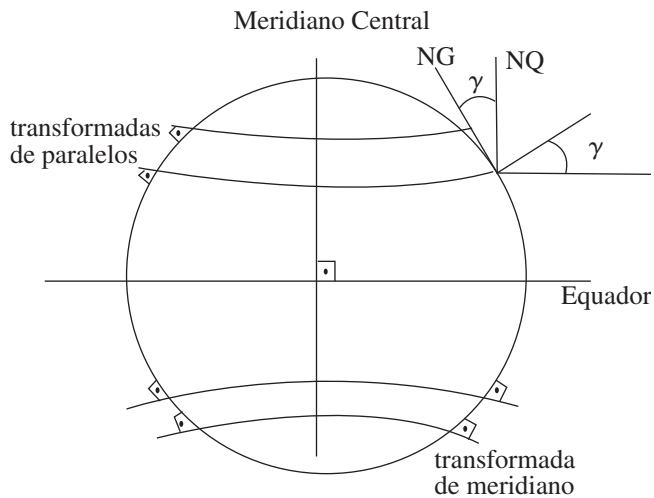
Fazendo  $\Delta\lambda$  constante na segunda,  $E$  torna-se função de  $\varphi$ , em potências ímpares, e os meridianos transformados são simétricos com relação ao meridiano central, pois  $E(\varphi) = -E(-\varphi)$ .

A representação esquemática é a que se vê na Figura 5.1.

Como a projeção é conforme, os ângulos se mantêm e então as transformadas de meridianos e de paralelos cruzam-se ortogonalmente.

A concavidade de cada curva é função do quadrante em que se encontra e se pode enunciar a regra de que a transformada geodésica do meridiano apresenta concavidade voltada para o meridiano central e que a transformada do paralelo apresenta concavidade voltada para o pólo do hemisfério em que se encontra.

Chama-se então convergência de meridiano o ângulo que a tangente a um meridiano, num determinado ponto, faz com uma paralela ao meridiano central. Pode-se dizer que é também o ângulo que o norte geográfico (tangente à transformada de meridiano) faz com o norte da quadrícula (paralelo ao meridiano central, vertical da folha).

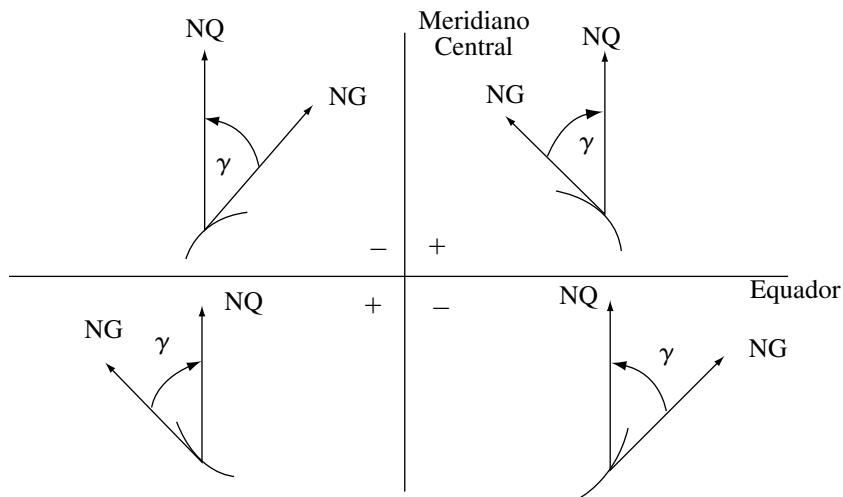


**Figura 5.1** Convergência de meridiano ( $\gamma$ ) e rede transformada de meridianos e paralelos.

Por decorrência o ângulo é também o ângulo que a tangente ao paralelo transformado faz com uma paralela ao equador.

## 5.2 Análise do Sinal da Convergência Meridiana ( $\gamma$ )

Pode-se analisá-lo facilmente tomando um vértice em cada quadrante e traçando o norte da quadrícula (NQ — vertical) e o norte geográfico (NG — tangente à transformada de meridiano). Veja a Figura 5.2.



**Figura 5.2** Sinal de  $\gamma$ .

Tomando como base o NG (Norte Geográfico ou Verdadeiro) e sendo o sentido positivo, tem-se o sinal de  $\gamma$ , que é o mesmo da tangente trigonométrica.

Quando NQ estiver à direita de NG (voltado para E, no sentido horário) será positivo e quando NG estiver à esquerda (voltado para W, sentido anti-horário) será negativo. Com relação aos quadrantes o sinal é contrário ao da tangente trigonométrica; é o que se pode ver na Figura 5.2.

Há uma distinção teórica e também uma diferença de valor numérico entre a convergência de meridiano sobre o elipsóide e esta que se está analisando, que a rigor se denomina convergência plana de meridianos. No entanto, dentro dos limites usuais de projeção, as duas quantidades podem ser consideradas idênticas.

### 5.3 Equações da Convergência de Meridiano

Como anteriormente, só serão indicados os principais passos da dedução, que se inicia pela consideração da Figura 3.3.

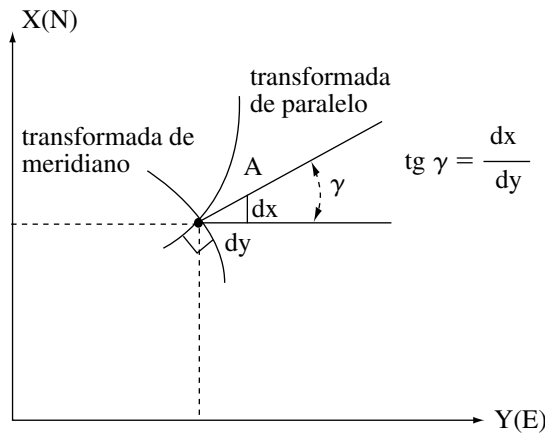


Figura 5.3 Convergência de meridiano.

$$\text{Assim, tem-se: } tg \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{dx/d\lambda}{dy/d\lambda} \quad (5.3)$$

Para calcular o numerador e o denominador basta derivar as equações de  $x$  e  $y$  (5.1 e 5.2) com relação a  $\lambda$ ; donde se tem:

$$tg \gamma = \frac{\Delta \lambda N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \Delta \lambda^3 / 6 \cdot N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + (\dots)}{N \cos \varphi + \frac{\Delta \lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi + (\dots)} \quad (5.4)$$

Expressão

essa que pode ser simplificada, dividindo tudo por  $N \cos$ , reduzindo o número de termos nas séries, etc.

Além disso, desenvolvendo em série tem-se:

$$\gamma = \text{tg}\gamma - \frac{1}{3}\text{tg}^3\gamma + \frac{1}{5}\text{tg}^5\gamma \dots \quad (5.5)$$

Combinando e rabalhando (5.4) e (5.5) vem finalmente a fórmula prática de cálculos, com  $\gamma$  expresso em radianos e em função de  $e$  e  $\lambda$ :

$$\gamma = \Delta\lambda \text{sen } \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \text{sen}\varphi \cos^2\varphi(1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15} \text{sen}\varphi \cos^4\varphi(2 - t^2)$$

com  $t = \text{tg}\varphi$

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} e'^2 = 0,0067396608 \quad (\text{para o SAD-69})$$

Por outro lado, para o cálculo de  $\gamma$  em função das coordenadas planas ( $N_1 E_1$ ), recorre-se a outros artifícios como exprimir  $\Delta\lambda$  em função das coordenadas planas desse ponto e substituir  $\text{sen}$  por  $\text{sen}(\varphi_1 - \varphi)$  ( $\varphi_1 - \varphi$ ), e desenvolvê-lo em série.

Trabalhando matematicamente as expressões chega-se a:

$$\gamma = \frac{E'}{N_1} t_1 \left[ 1 - \frac{E_1^2}{3N_1^2} (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2n_1^4) + \frac{E_1^4 (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4)}{N_1^4 \cdot 15} \right]$$

com  $t = \text{tg}\varphi$

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_1$$

$$E'_1 = E_1 - 500,000$$

$$N_1 = a(1 - e'^2 \text{sen}^2 \varphi_1)^{-1/2}$$

SAD-69:

$$e'^2 = 0,0067396608$$

$$a = 6.378.160,00$$

$$e^2 = 0,00669451491$$

## 5.4 Exemplo

Encontra-se abaixo a fórmula vista anteriormente, reagrupada para facilitar o cálculo e conferir uma eventual implantação computacional



$$\gamma^{rd} = \Delta\lambda^{rd} \operatorname{sen} \varphi \left[ 1 + 1/3(\Delta\lambda \cos \varphi)^2 \left( 1 + 3n^2 + 2n^4 + \frac{1}{5}(\Delta\lambda \cos \varphi)^2(2 - t^2) \right) \right]$$

Dados:  $\varphi = -16^\circ 23' 30,7554''$   
 $\lambda = 54^\circ 51' 22,1918''$  (W)  
 $\lambda_0 = 57^\circ$  (W)

Resultado:  $\gamma = 0^\circ 36' 18,962''$

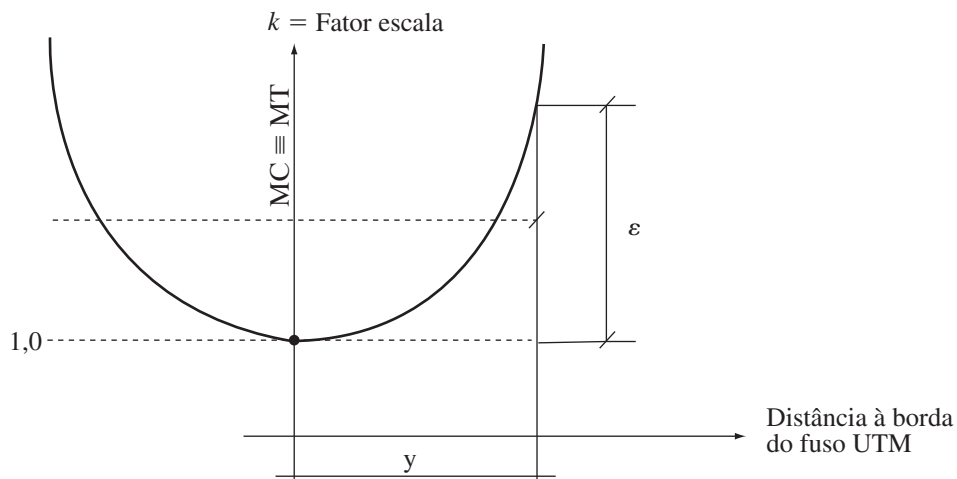


# VI Fator Escala

## 6.1 Sentido Físico

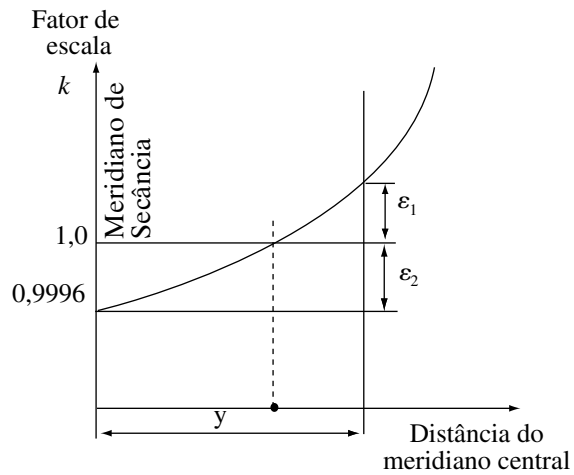
Sendo a projeção conforme, a escala de representação ou fator escala  $k$ , independe da direção, mas varia de ponto a ponto, já que não é possível manter diversas propriedades ao mesmo tempo.

No esquema de um cilindro transversal tangente à esfera, no meridiano central (MC), o fator de escala é igual à unidade ao longo do meridiano de tangência (MT) e cresce simetricamente para ambos os lados. É o que se esquetiza na Figura 6.1.



**Figura 6.1** Variação do fator de escala  $k$  — cilindro tangente.

No esquema de um cilindro secante existem duas linhas de verdadeira grandeza, sendo que o fator de escala é menor do que 1,0 na região interna (redução) e maior do que a unidade no exterior (ampliação), conforme se esquetiza na Figura 6.2.



**Figura 6.2** Variação do fator de escala  $k$  — cilindro secante.

Como se pode notar, o segundo esquema minimiza as distorções em valor absoluto. Um erro  $\varepsilon$  que ocorre a uma distância  $y$  do meridiano central na primeira hipótese, transforma-se em  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$ .

O fator escala  $k$  pode ser definido como sendo um número (dado por uma expressão calculada num ponto) que multiplicado pela distância sobre o elipsóide, ( $d$ )  $d_p = k \cdot d$  fornece a distância em planta ( $d_p$ ).

$$k = k_0 \left( 1 + \frac{E_1^2}{2MN} \right)_{\text{ou}}$$

$$k = k_0 \left( 1 + \frac{y^2}{2R_m^2} \right)$$

com  $K_0 = 0,9996$  (SAD-69)

$y = E_1$  afastamento do meridiano central

$$R_m = \sqrt{M \cdot N} = 6.371 \text{ km}$$

Essa equação, uma parábola do 2º grau, permite uma boa aproximação do fator escala. Para que se tenha uma sensibilidade física para a fórmula, apresenta-se a seguinte tabela com valores calculados:

y (km)	(km)	aumento/redução por km
0	1 - 0,000400	- 0,400 m
100	1 - 0,000275	- 0,275 m
180	1,000000	0,000 m
200	1 + 0,000100	+0,100 m
300	1 + 0,000720	+0,720 m
400	1 + 0,001600	+1,600 m

## 6.2 Fórmulas a Serem Utilizadas em um Programa Computacional

A seguir, são apresentadas fórmulas mais precisas que podem ser utilizadas para desenvolver um programa de cálculo para o fator de escala:

$$K = K_0 \cdot f \quad K_0 = 0,9996$$

$$f = 1 + \frac{\Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 + n^2) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - 4t^2 + 14n^2 + 13n^4 - 28t^2n^2 + 4n^6 - 48t^2n^4 - 24t^2n^6) + \frac{\Delta\lambda^6 \cos^6 \varphi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4)$$

ou em função das coordenadas plano retangulares:

$$k = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E'_1}{N'_1} \right) (1 + n_1^2) + \frac{1}{24} \left( \frac{E'_1}{N'_1} \right)^4 (1 + 6n_1^2)$$

$$k = 0,9996 \times f$$

onde:

$E'$  = coordenada ESTE do Ponto 1

$N'$  = grande normal no Ponto 1

$n'$  = já definida anteriormente ou simplificadamente

$$k = 0,9996 \left( 1 + \frac{y^2}{2R_{m^2}} \right)$$

onde:

$$y_2 = (E - 500,000)^2$$

$$R_{m^2} = M \cdot N \cong (6.371.000)^2$$



# VII Problemas Típicos

## 7.1 Introdução

Para que se tenha uma idéia de alguns problemas mais comuns, apresentam-se a seguir casos típicos, sem ter a pretensão de esgotá-los e, na maior parte dos casos, sem dar a solução matemática, mas somente o sentido físico dos problemas.

São omitidas também, os levantamentos de campo, que também exigiriam mais de um capítulo, para uma explicação razoável.

## 7.2 Monografia de Pontos

São os problemas já tratados e bem descritos:

- a) **Transformação de coordenadas**
  - problema direto: geodésicas ( $\varphi$  e  $\lambda$ ) para UTM (N, E)
  - problema inverso: UTM (N, E) para geodésicas ( $\varphi$  e  $\lambda$ )
- b) **Cálculo da convergência meridiana**
  - através das coordenadas geodésicas ( $\varphi$  e  $\lambda$ )
  - através das coordenadas UTM (N, E)
- c) **Cálculo do fator escala**
  - através das coordenadas geodésicas ( $\varphi$  e  $\lambda$ )
  - através das coordenadas UTM (N,E)

Obs.: Existe, a rigor um fator escala para cada ponto. Em pequenas distâncias pode-se tomar um fator uniforme, o do centro da região. Mas para bases longas, pode ser necessário utilizar uma “média” de maior precisão para determinar k:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{4}{k_3} + \frac{1}{k_2} \right)$$

onde os  $k_i$ , calculados pelas fórmulas apresentadas, são os fatores de escala nos pontos:

$k_1$  — num dos extremos da base

$k_2$  — no outro extremo

$k_3$  — no ponto médio

## 7.3 Mudança de Elipsóide de Referência

### a) mudança de figura geométrica

Para a mesma rede de vértices, com coordenadas calculadas e ajustadas a partir de um *datum* origem, pode-se substituir a figura geométrica primitiva ( $a_1, \alpha_1$ ) por uma outra ( $a_2, \alpha_2$ ).

### b) Mudança de datum vertical

Corresponde a alterar o marégrafo de referência, por exemplo, passar da referência Torres (RS) para Imbituba (SC). Alteram-se portanto os valores das cotas ortométricas/dinâmicas da rede geodésica.

Essa alteração costuma refletir-se indiretamente nos parâmetros de transformação de elipsóide.

### c) mudança da datum horizontal

Dada uma rede de vértices com coordenadas calculadas a partir de um vértice origem, uma série de medições e um elipsóide determinado, trata-se de referir esse conjunto de coordenadas ao novo sistema, com outro elipsóide, outro ponto de origem, etc. É necessário determinar previamente os parâmetros de transformação..

O resultado final são novas coordenadas geodésicas, ( $\varphi$  e  $\lambda$ ) para os marcos da rede.

Como podem conviver ao longo do tempo diversos *data* como: Chuá, Astro-Chuá, Córrego Alegre, La Canoa, (SIRGAS 2000), é necessário contar com parâmetros de transformação de cada par.

Nas mudanças de elipsóide em que só ocorrem translações, costumam-se utilizar as equações deduzidas por Molodensky, onde os parâmetro de transformação  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem ser determinados por um estudo especial que utiliza o método dos mínimos quadrados aplicados a uma série de vértices em que se conhecem as coordenadas nos dois sistemas.

## 7.4 Reduções nas Distâncias

Tendo sido medida uma distância  $s$ , em campo, através de trena, ou distanciômetro eletrônico, são necessárias as seguintes transformações para utilização na projeção UTM:

- correção de fatores meteorológicos** — para os distanciômetros. Alguns possuem botões para a introdução automática da correção.
- redução ao horizonte** — para as distâncias medidas na inclinada. Corresponde ao valor horizontal da distância, considerando-se como tendo sido medida na altitude média da base. Denomina-se também redução ao plano topográfico. Caso se tenha medido o ângulo zenital ( $z$ ) e a distância inclinada ( $di$ ), a distância horizontal ( $dh$ ) se calcula:

$$dh = di \cos z$$

\* O mais normal é que o equipamento já dê a distância horizontal.



- c) **redução ao nível médio dos mares** — Dada uma distância medida sobre a terra (arco curvo) na altitude  $h_m$ , corresponde a encontrar a distância equivalente na altitude  $h = 0$  (nível médio dos mares), que contém as mesmas verticais nos extremos da base, (Figura 7.1a). O cálculo se faz pela fórmula:

$$s = s_0 \cdot \frac{R + h_m}{R}$$

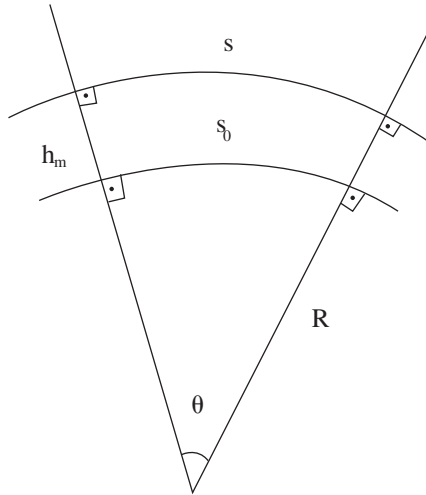


Figura 7.1a Reduções nas distâncias.

- d) **redução ao geóide e ao elipsóide** — São reduções semelhantes à anterior, em que se passa de uma distância sobre a superfície real para outras duas superfícies (geóide e elipsóide) situadas abaixo.

Implicam no conhecimento dessas duas outras superfícies de referência, sua forma geométrica e amarração com a superfície da terra, na região de medição.

O geóide, pode ser referido ao elipsóide através de cartas contendo as curvas de isoalturas do geóide sobre um elipsóide de referência, também conhecidas como ondulações do geóide ou ondulações geoidais.

Diferentes aproximações avaliam de forma diferenciada o raio da terra, por exemplo, calcula-se um raio médio do elipsóide ( $\sqrt{M \cdot N}$ ) e toma-se a esfera média local com esse raio.

Outra forma seria calcular o raio de curvatura na direção em que a base foi medida, conforme visto no Capítulo 1.

- e) **redução corda — arco**

Corresponde a passar da distância medida (um arco  $s$  sobre uma superfície) à corda  $c$  que une os dois extremos em linha reta (Figura 7.1b).

$$s = \varphi R c = 2R \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cong 2R \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{48} \right) s - c \cong \frac{s^3}{24.R^2}$$

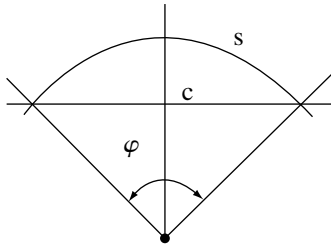


Figura 7.1b Redução arco corda.

#### f) redução à planta UTM

Corresponde a multiplicar a distância ( $d$ ) pelo fator de escala ( $k$ ) para poder lançá-la na projeção plana UTM ( $d_p$ ).

$$d_p = k \cdot d$$

## 7.5 Reduções Angulares

Tendo sido determinado o azimute  $A$  de uma direção, por processo astronômico ou por transporte de direções, pode ser necessária alguma das seguintes reduções, conforme o que se deseja:

#### a) azimute magnético

Relaciona-se com o azimute elipsóidico através da declinação magnética. Um tem como referência o norte verdadeiro e outro o magnético (variável com o local e com o tempo). Em geral, no uso mais comum, parte-se do magnético e soma-se a declinação magnética para obter uma aproximação do norte verdadeiro. É um processo utilizado somente em levantamentos de pouca responsabilidade (Figura 7.2).

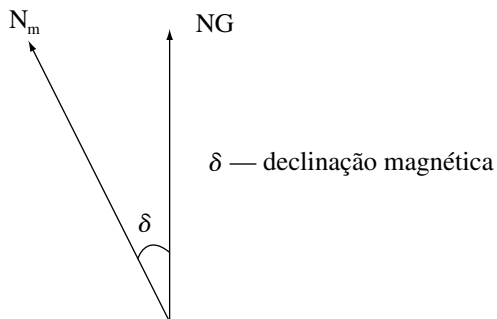


Figura 7.2 Indicação da declinação magnética.

### b) azimute da quadrícula

Relaciona-se com o azimute elipsóidico através da convergência de meridiano ( $\gamma$ ). Basta somar ou subtrair para passar de um a outro. O sinal de  $\gamma$  deve ser estudado caso a caso em função do quadrante (Item s.2), e o valor pode ser calculado por uma das fórmulas apresentadas ou programa. Um esquema da situação ajuda muito (Figura 7.3).

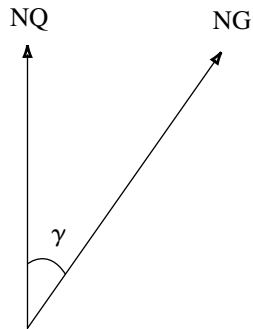


Figura 7.3 Indicação da convergência meridiana.

### c) azimute projetado ou da carta (t)

É o azimute que uma linha qualquer ab (projetada de AB) faz com o meridiano central ou com o norte da quadrícula, conforme a Figura 7.4 em que  $\alpha$  é o ângulo medido em campo e  $\lambda$  a convergência meridiana.

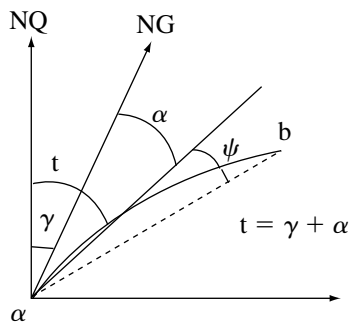


Figura 7.4 Reduções angulares.

### d) redução angular ( $\Psi$ ) arco-corda

Em alguns casos de maior precisão, é preciso levar em conta também a redução (vide a figura anterior), que se calcula pela fórmula:

$$\psi = \left( \frac{N}{M} - 1 \right) \frac{s^2 \text{sen} 2A}{8N^2}$$

em que N e M são os raios principais do elipsóide, A o azimute verdadeiro da direção e s o comprimento ou distância em questão.



ou

$$\psi = \frac{3,44'' \times 10^4 \times \Delta N(2E'_1 + E'_2)}{MN}$$

onde M e N são os raios do elipsóide,  $\Delta N$  a diferença entre as coordenadas na direção Norte  $E_1$  e  $E_2$  as coordenadas Este, subtraídas da constante 500.000m.

## 7.6 Transporte de Coordenadas Elipsóidicas

### a) Problema direto

Dados  $\varphi_1, \lambda_1, A_{12}$  e  $S_{12}$  (azimute e distância elipsoidal), calcular as coordenadas  $\varphi_2, \lambda_2$  do ponto 2 (latitude e longitude) e  $A_{21}$ .

**Solução:** a partir de  $\varphi_1$  e  $\lambda_1$  calcula-se  $N_1$  e  $E_1$  de acordo com 7.2; a partir de  $S_{12}$  calcula-se a distância na planta  $d$  através do fator escala e  $\alpha$

### b) Problema inverso

Dados  $(\varphi_1, \lambda_1)$  e  $(\varphi_2, \lambda_2)$  calcular  $s_{12}, A_{12}, A_{21}$  e  $\gamma$ .

**Solução:** a maneira mais simples é calcular inicialmente  $\beta$

## 7.7 Transporte de Coordenadas UTM

### a) Problema direto

Dadas as coordenadas  $(N_1, E_1)$ ,  $s_{12}$ ,  $A_{12}$ , calcular as coordenadas  $N_2, E_2$  do ponto 2.

### b) Problema inverso

Dadas as coordenadas  $(N_1, E_1)$  e  $(N_2, E_2)$ , calcular  $s_{12}, A_{12}, A_{21}$  e  $\gamma$ .

A solução dos dois casos já foi apontada no item anterior.

\* Estes problemas podem ser aplicados em pontos isolados ou, o que é mais comum, em poligonais, realizando-se os cálculos em seqüência. Para poligonais fechadas, volta-se ao ponto de partida. Planilhas especiais facilitam o cálculo.

## 7.8 Roteiro Simplificado para Instalação de Marcos de Referência para Obras de Engenharia

- levantamento de plantas, mapas e marcos existentes junto aos órgãos responsáveis (EMPLASA, IGC, IBGE,...);
- reconhecimento “in loco” dos marcos (de 1ª, 2ª ou 3ª ordem) mais próximos da obra em questão e obtenção de suas coordenadas;



- planejamento da instalação de marcos nas proximidades da obra e do transporte de coordenadas. Esquema (triangulação, poligonização, GPS);
- implantação dos marcos, visadas, medições de ângulos e distâncias; ou rastreamento conjunto;
- tratamento dos dados de campo e transporte de coordenadas;
- de posse de marcos conhecidos na obra (pelo menos dois para se ter azimute e coordenadas), dispõe-se de um sistema de coordenadas gerais ou locais para locação de pontos e projetos.

 $\alpha$ 

calculam-se as coordenadas a partir de  $A_{12}$ , calcula-se o azimute projetado (descontando  $\lambda$  e  $\alpha$  do ponto 1). a seguir trabalhando na projeção UTM (plano-retangular) calculam-se as diferenças de coordenadas  $\Delta N = d$ , seu  $A$  e  $\Delta E = d$ ,  $\cos A$ , chegando-se as coordenadas  $N_2, E_2$ . Com o azimute  $A$ , calcula-se o contra-azimute (somar ou subtrair  $180^\circ$ ) e a seguir, com  $\lambda$  e  $\alpha$  no ponto 2, calcula-se o azimute  $A_{21}$ .

 $\beta$ 

as coordenadas  $N_1, E_1$  e  $N_2, E_2$ , bem como  $\lambda$  e  $\alpha$  em cada ponto. Com isso calculam-se as azimutes projetados e os elipsóidicos.



# Parte 4

---

## Sistema Topográfico Local

---

Msc. Fátima Alves Tostes  
Msc. Ivan Valeije Idoeta

---





# Sistema Topográfico Local

## 1.1 Introdução

Esta monografia tem por objetivo esclarecer aspectos pouco conhecidos do Sistema Topográfico Local. O conhecimento destes aspectos podem ajudar a desfazer os seguintes equívocos:

- Caracterização dos pontos geodésicos por coordenadas planoretangulares UTM (N, E) no lugar de suas coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ), embora haja uma correspondência biunívoca entre as mesmas. O IBGE, quando ao lado das coordenadas geodésicas dos pontos do Sistema Geodésico Brasileiro — SGB, fornece suas correspondentes coordenadas UTM, assim procede porque o Sistema Cartográfico Brasileira adota o Sistema UTM para a representação cartográfica nas séries de cartas nas escalas 1:250.000, 1:100.000, 1:50.000 e 1:25.000. Este procedimento visa tão somente a localização dos pontos geodésicos nas folhas de carta do Sistema Cartográfico Brasileiro, nestas escalas.
- Emprego generalizado do Sistema UTM, incluindo escalas maiores que 1:10.000, que deveria ficar restrito às escalas pequenas e médias e nunca como base cartográfica para projetos e locação de obras de engenharia, principalmente, em áreas urbanas.
- Os sistemas RTM (regional Transverso de Mercator) e LTM (Local Transverso de Mercator), embora com módulos de deformação linear ( $K_0$ ) muito próximo de 1 (um), representam, cartograficamente, os pontos na superfície do elipsóide de referência (figura geométrica da Terra), ou seja, o nível do mar não perturbado prolongado através dos continentes. Na ocasião do emprego destes sistemas em projetos e locação de obras de engenharia, há que se considerar o fator de elevação que transporta os pontos representados, em planta, para as suas efetivas localizações no terreno, o que altera as suas coordenadas plano retangulares e, conseqüentemente, as distâncias pelos mesmos determinadas. Se esse procedimento não for realizado, desagradáveis surpresas poderão ocorrer, principalmente, em se tratando de projetos e locação de obras ferroviárias e metroviárias. Como exemplo: distâncias corrigidas do fator de deformação linear ( $K$ ) obtidas, em planta, com valores de 100 m, 500 m e 1000 m, se estiverem na altitude de 500 m, terão, ao serem locadas no terreno, correções, respec-



tivamente, de + 0,008 m, + 0,039 e + 0,079. Na altitude de 1000 m, as correções seriam respectivamente, de + 0,016 m, + 0,079 e + 0,157. O equívoco consiste no argumento de que esses sistemas têm módulos de deformação linear ( $K_0$ ) muito próximos da unidade, omitindo a necessidade de correção do fator de elevação, que é o mesmo para todos os Sistemas Transversos de Mercator (UTM, RTM e LTM).

- Transformação de coordenadas UTM em Topográficas Locais, somente com aplicações, nas coordenadas UTM, das correções relativas ao fator de deformação linear ( $K$ ) e ao fator de elevação, sem o estabelecimento de uma origem. Dependendo do tamanho e da conformação da área do terreno ou da extensão de uma faixa do terreno, a abstração da curvatura terrestre decorrente deste procedimento pode conduzir à erros além do limite de precisão requerido pelo levantamento topográfico, ou seja, os erros decorrentes dessa abstração podem superar os erros inerentes às operações topográficas, em campo.

## 1.2 Definição do Plano Topográfico Local

É o sistema de representação, em planta, das posições dos pontos de um levantamento topográfico em relação a uma origem de coordenadas geodésicas conhecidas. Neste sistema, todos os ângulos e distâncias das operações topográficas da determinação dos pontos do levantamento topográfico, são pressupostos como projetados em verdadeira grandeza sobre o plano tangente à superfície de referência (elipsóide de referência) do sistema geodésico adotado, na origem, cujas coordenadas geodésicas são conhecidas.

Isto significa haver a coincidência da superfície de referência com a do plano tangente à mesma na origem do sistema, ou seja a desconsideração da curvatura terrestre. Esta abstração só é válida para levantamentos topográficos realizados em áreas relativamente pequenas da superfície terrestre, desde que os erros decorrentes da desconsideração da curvatura terrestre não ultrapassem os erros inerentes às operações topográficas de determinação das posições dos pontos levantados.

## 1.3 Área de Abrangência do Sistema

A área de abrangência do sistema topográfico local será função da precisão requerida para a determinação das posições dos pontos levantados pelo levantamento topográfico e do erro decorrente da desconsideração da curvatura terrestre, que por sua vez, é função da distância do ponto mais afastado do levantamento em relação a origem do sistema.

- os valores ideais para as dimensões radiais à origem, determinantes da área de abrangência do sistema são de um modo geral: 80 km para um erro relativo máximo de 1:15.000;
- para cartografia de âmbito municipal: 70 km para em erro relativo máximo de 1:20.000;

- para cartografia, em áreas urbanas e especiais: 35 km para um erro relativo máximo de 1:100.000;

Estes valores podem ser reduzidos em função do relevo do terreno. As altitudes da maioria dos pontos do terreno, na dependência da sua configuração e da finalidade do levantamento topográfico, não devem afastar-se de  $\pm 150$  m da altitude média do terreno. Tanto no caso dos valores ideais para a determinação da área de abrangência do sistema como no de suas reduções em função do relevo do terreno, novos planos tangentes devem ser estabelecidos, caracterizando sistemas topográficos locais com origens distintas, interligados entre si por pontos comuns com coordenadas geodésicas conhecidas.

## 1.4 Coordenadas Plano Retangulares

O posicionamento dos pontos do levantamento topográfico é dado por intermédio de um sistema cartesiano ortogonal (ver figura 1.1), em duas dimensões, onde:

- Os eixos X e Y jacentes no plano do horizonte local (plano tangente ao elipsóide de referência) e portanto definidores deste plano, têm origem na origem do sistema topográfico local.
- O eixo Y coincide com a linha meridiana (norte-sul geográfica) orientado, positivamente, para o norte geográfico.
- O eixo X é orientado, positivamente, para leste.

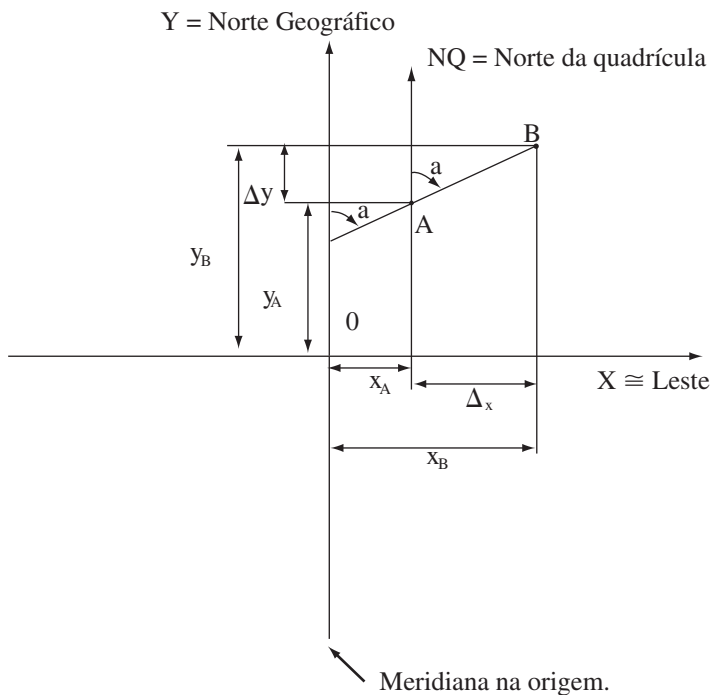


Figura 1.1 Coordenadas plano retangulares.

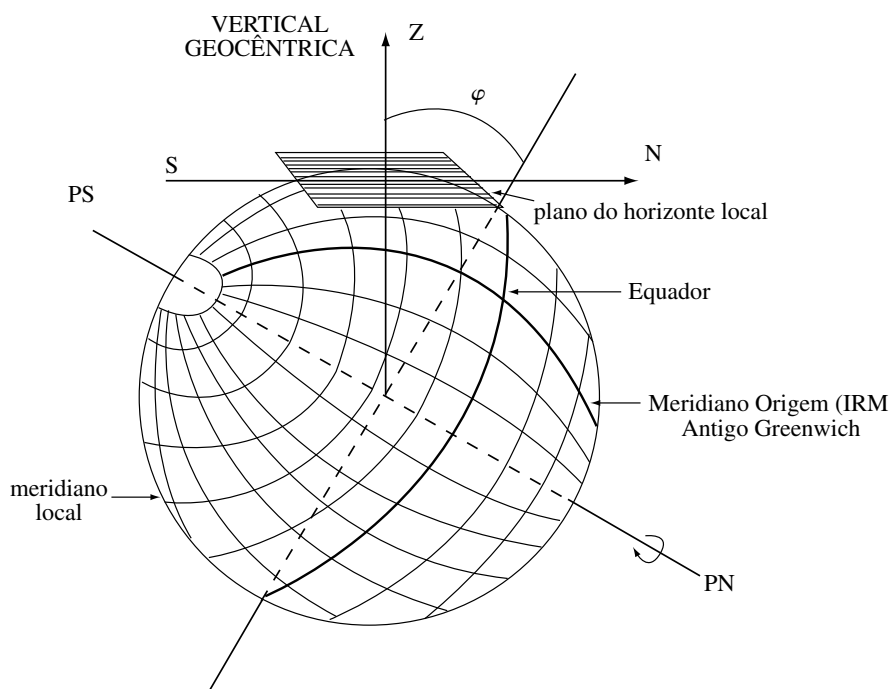


Figura 1.2 Indicação do plano topográfico local.

## 1.5 Concepção do Sistema

A concepção do sistema topográfico local, inicialmente, pode ser ilustrada na Figura 1.2, onde, por se tratar de uma pequena porção da superfície terrestre, a imagem geométrica da terra deixa de ser um elipsóide e passa a ser uma esfera (esfera de adaptação de Gauss), cujo raio é o raio médio do elipsóide de referência no ponto de tangência do plano do horizonte local (origem do sistema).

### 1.5.1 Distâncias Projetadas

A fim de que as distâncias medidas no terreno sejam projetadas em verdadeira grandeza no plano do horizonte local (plano tangente), este plano deve ser elevado à altitude média do terreno na área do levantamento topográfico, transformando-se no plano topográfico local.

Para que isto aconteça, as coordenadas plano retangulares dos pontos de apoio geodésico, utilizados no levantamento topográfico, devem ser afetadas por um fator de elevação, dado pela seguinte expressão:

- $c = (R_m + H_t)/R_m$  ou aproximadamente
- $c = 1 + 1,57 \times 10^{-7} \times H_t$

onde:  $c$  é o fator de elevação,  $H_t$  é a altitude média do terreno e  $R_m$  é o Raio médio.

A Figura 1.3 mostra, esquematicamente, os conceitos de plano do horizonte local (ou plano tangente, ou plano topográfico), altitude média do terreno, plano topográfico local



e projeção em verdadeira grandeza de uma distância medida no terreno sobre o plano topográfico local.

## 1.5.2 Origem das Coordenadas

A fim de serem evitados valores negativos para as coordenadas plano retangulares nos pontos do levantamento topográfico, na área de abrangência do sistema, devem ser adicionados às coordenadas plano retangulares da origem do sistema  $O$  ( $X = 0$  e  $Y = 0$ ), termos constantes adequadas para a sua translação para fora da área de abrangência do sistema. Assim, as coordenadas plano retangulares da origem  $O$  do sistema passam a ser:

$$X = 0 + K_x = K_x$$

$$Y = 0 + K_y = K_y$$

onde,  $K_x$  e  $K_y$  são termos constantes acima mencionados.

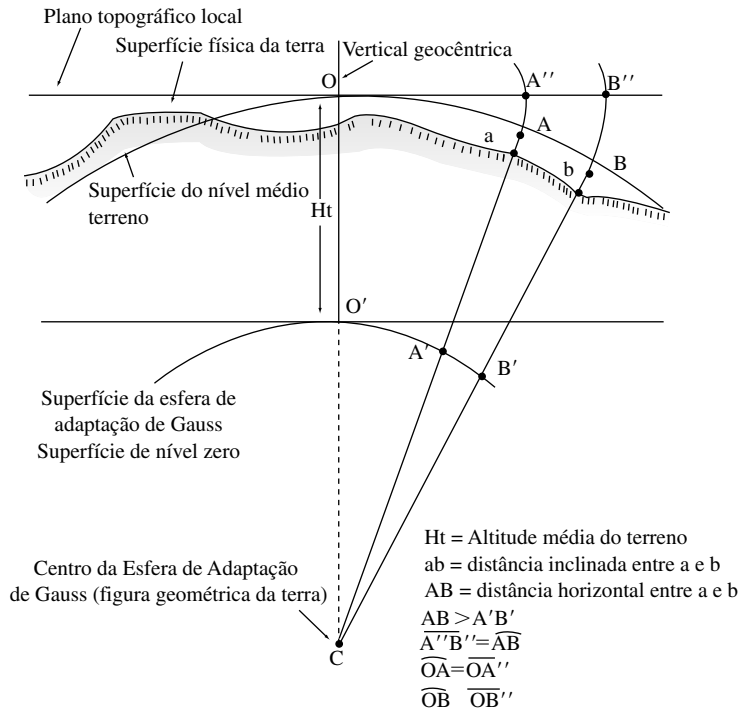


Figura 1.3 Distâncias projetadas nos diferentes planos.

## 1.5.3 Orientação

A orientação, em planta, das distâncias é dada pelo azimuth plano de suas direções, que é o ângulo formado por uma direção considerada com o norte da quadrícula (NQ), com vértice no ponto inicial dessa distância. As linhas do quadriculado das plantas dos levantamentos topográficos correspondem às projeções de linhas (na esfera) paralelas ao meridiano da origem ( $O$ ) do sistema topográfico local. Isto significa que os azimuths planos das direções das distâncias apresentadas em planta (plano topográfico local) estão afetadas pela convergência meridiana ( $\gamma$ ), que é o ângulo, com vértice no ponto inicial da distância considerada, formado pela projeção da linha paralela ao meridiano da ori-

gem (O) sobre o plano topográfico local, nesse vértice, com a tangente ao meridiano desse vértice, também projetada neste plano. Convém salientar que a convergência meridiana ( $\gamma$ ) só deve ser levada em consideração no caso dos elementos serem colhidos das plantas para serem transportados ao terreno com a finalidade de aviventação de rumos ou para elaboração de memoriais descritivos de perímetros de propriedades em registros públicos ou em ações judiciais. No emprego das plantas em projetos e obras de engenharia, a consideração da convergência meridiana é irrelevante.

A Figura 1.4, exemplifica esquematicamente no hemisfério sul, os conceitos acima expostos, onde os meridianos, nela mencionados, são, na realidade, as projeções destes meridianos sobre o plano tangente (plano topográfico). As direções NQ são as projeções de linhas na esfera paralelas, ao meridiano da origem (O) sobre o plano tangente e as direções NG são projeções, sobre o plano tangente, das tangentes aos meridianos dos pontos, nestes pontos.

Na Figura 1.4, os azimutes planos ( $a$ ) e seus correspondentes azimutes geodésicos ( $\alpha$ ) das direções AB, CD, EF, GH e IH, com as indicações da convergência meridiana nos seus pontos iniciais, estão num sistema topográfico local, situado no hemisfério sul.

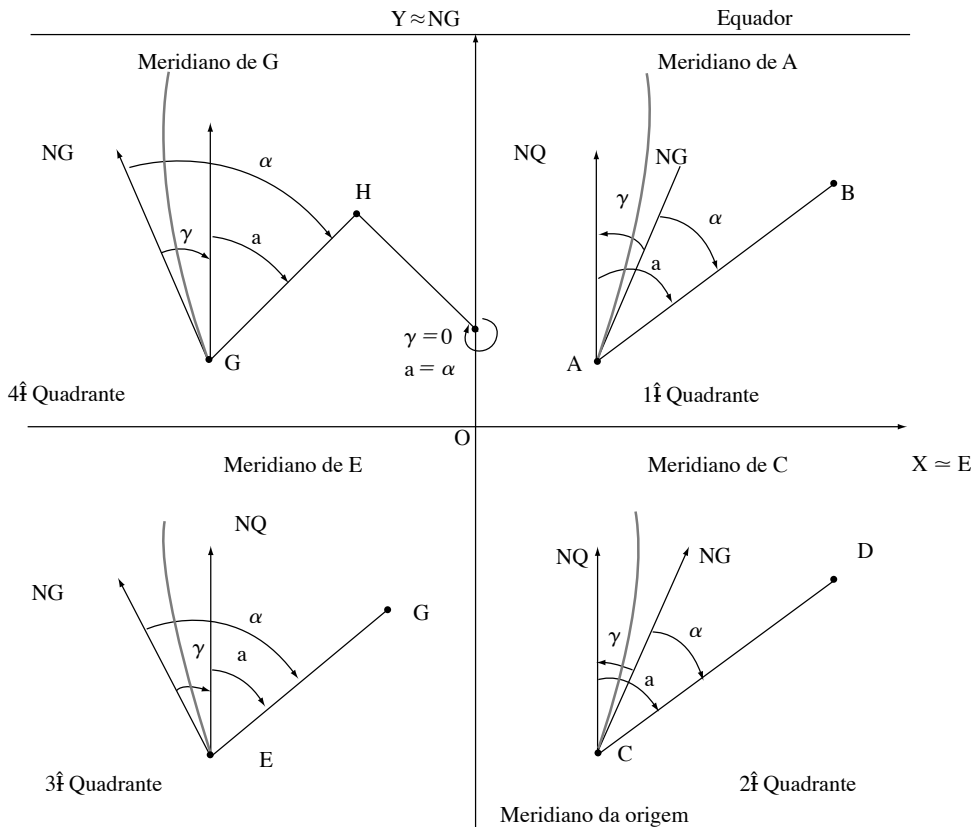


Figura 1.4 Reduções angulares — Hemisfério sul.

Observa-se que as convergências meridianas nos pontos A e C, situados à leste do meridiano da origem do sistema (O), têm valores negativos e nos pontos E e G, situados à oeste desse meridiano, tem valores positivos.

Nas direções AB e CD,  $\alpha = a - \gamma$ ; nas direções EF e GH,  $\alpha = a + \gamma$  e na direção IH,  $\alpha = a$ , porque  $\gamma = 0$ .

Num esquema semelhante para o hemisfério norte, os pontos A e C teriam valores de  $\gamma$  positivos e os pontos E e G teriam valores negativos para  $\gamma$ . Se a origem (O) do sistema estivesse no equador, os pontos situados no eixo dos X (linha do equador) teriam  $\gamma = 0$ ; os pontos situados no primeiro quadrante teriam valores positivos para  $\gamma$ ; os pontos situados no segundo quadrante teriam valores negativos para  $\gamma$ ; no terceiro quadrante os pontos teriam para  $\gamma$  valores positivos e no quarto quadrante os pontos teriam para  $\gamma$  valores negativos.

Nos dois hemisférios, os pontos situados no meridiano da origem do sistema tem valores nulos para  $\gamma$ .

A Figura 1.5 exemplifica, esquematicamente **no hemisfério norte** e no caso da origem situar-se no equador, a orientação da convergência Meridiana ( $\lambda$ ) em pontos situados nos primeiros, segundo, terceiro e quarto quadrantes topográficos.

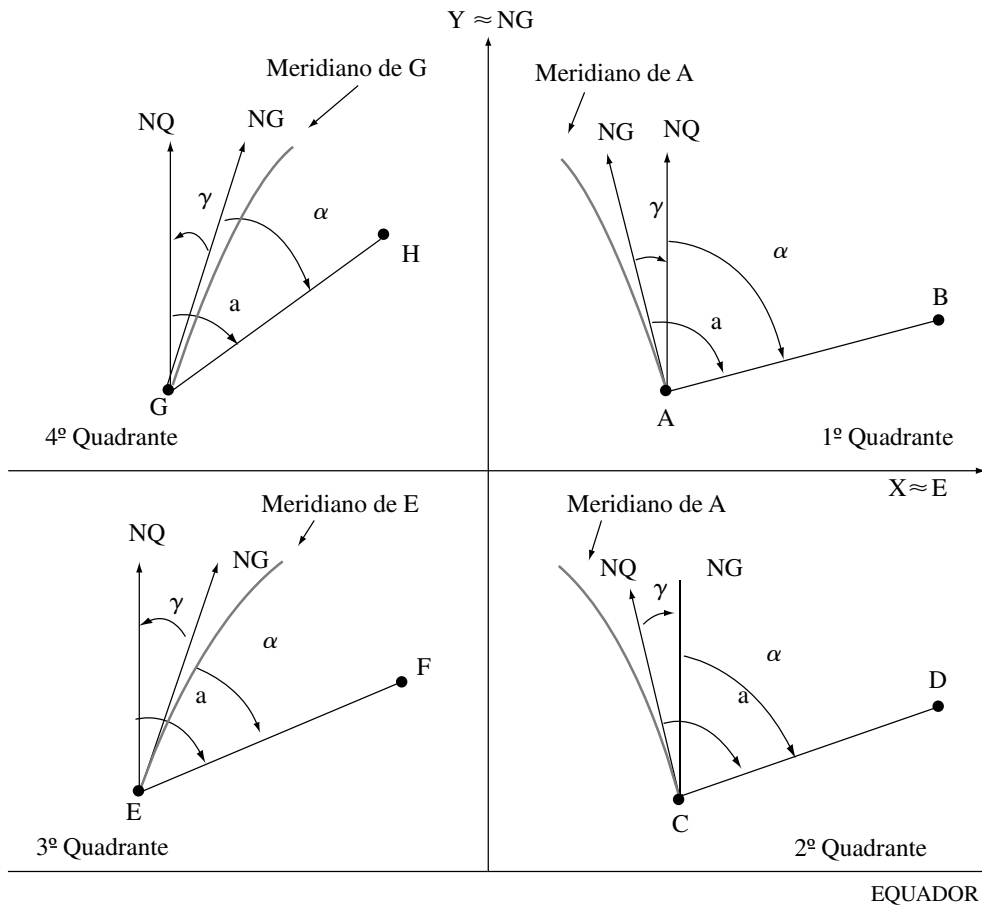
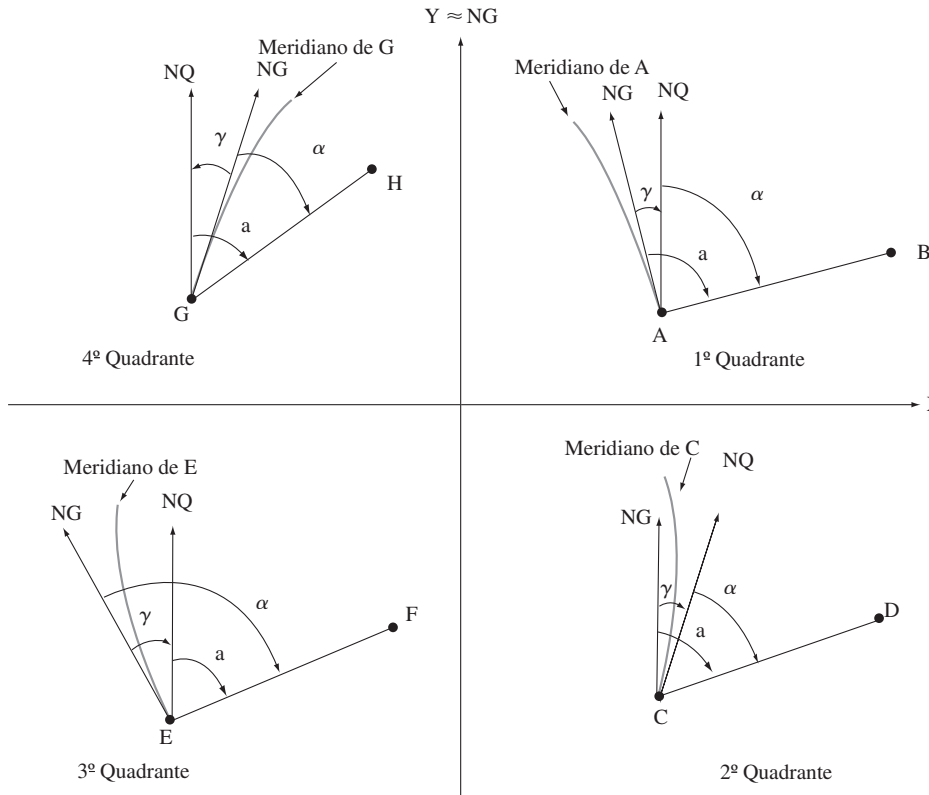


Figura 1.5 Reduções angulares — Hemisfério norte.

A Figuras 1.6 apresenta, esquematicamente, a **direção do norte** de quadrícula e do Norte Verdadeiro (Geodésico) para o Hemisfério Norte e Sul.



**Figura 1.6** Indicação da direção do norte geográfico ou verdadeiro (NG).

## 1.6 Estabelecimento do Sistema

O Estabelecimento do sistema começa com o cálculo das coordenadas plano retangulares dos pontos geodésicos utilizados como apoio geodésico ao levantamento topográfico considerado. Estas coordenadas são obtidas a partir das coordenadas geodésicas destes pontos ( $\varphi, \lambda$ ) e das coordenadas geodésicas da origem (O) do sistema ( $\varphi_o, \lambda_o$ ), por intermédio das fórmulas da solução inversa do problema geodésico de transporte de coordenadas geodésicas, ou seja, aquelas fórmulas aplicadas no cálculo de azimutes e lados geodésicos, sendo um dos pontos a origem do sistema, o ( $\varphi_o, \lambda_o$ ), e, o outro, o ponto geodésico P( $\varphi, \lambda$ ) cujas coordenadas plano retangulares são objetos de determinação.

A origem do sistema (O) pode ser, ou não, um ponto do apoio geodésico. Sendo um ponto geodésico, é importante que o mesmo se localize nas proximidades do centro da área do levantamento.



Não sendo um ponto geodésico, pode ser escolhido um ponto qualquer, não necessariamente identificado e materializado no terreno, sendo as suas coordenadas geodésicas impostas, convenientemente, a fim de que o ponto mais afastado da área de abrangência do sistema não proporcione um erro devido à desconsideração da curvatura da terrestre maior que o erro possível de ser cometido pela operação topográfica da determinação deste ponto.

A partir dos pontos geodésicos com coordenadas plano retangulares no sistema topográfico local, são obtidas as coordenadas plano retangulares dos demais pontos levantados topograficamente.

## 1.7 Vantagens do Sistema

O que difere o **sistema topográfico local** dos sistemas de projeção de Gauss e seus derivados TM (UTM, RTM e LTM) é a vantagem dos valores das distâncias representadas serem relativos às medições diretas no terreno. A utilização de plantas de levantamentos topográficos realizados no **sistema topográfico local** não envolve a preocupação da elevação das distâncias da superfície do elipsóide de referência (nível médio do mar não perturbado) para as suas efetivas posições no terreno, como também, das suas correções quanto ao fator de deformação de escala ( $K$ ). O mesmo acontece com as listagens de coordenadas plano retangulares de **pontos notáveis** para elaboração de **projetos de engenharia e de sua locação**, quando obtidas de levantamento topográfico realizados neste sistema, não havendo a necessidade dos técnicos envolvidos nestes trabalhos terem conhecimento específico das técnicas empregadas no sistema de representação, em planta, dos detalhes levantados, ou seja, das correções da deformação da escala e do fator de elevação ao nível do terreno, característicos dos sistemas de projeção de Gauss e de seus derivados TM (UTM, RTM e LTM).

Pouco conhecido no Brasil, o Sistema Topográfico Local, no entanto, foi implantado nas cidades New York, Boston, Baltimore, Cincinnati, Rochester, Atlanta, Springfield, entre outras, nos Estados Unidos e em Tóquio, no Japão.

## 1.8 Fórmulas para Transformação de Coordenadas Geodésicas em Topográficas Locais e Vice-versa

### 1.8.1 Transformação de coordenadas geodésicas em planoretangulares — Sistema topográfico local

#### 1.8.1.1 Problema

Consiste no cálculo das coordenadas planoretangulares ( $x, y$ ) de um ponto  $P$  de coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda$ ), a partir das coordenadas geodésicas da origem do sistema topográfico local ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) cujas coordenadas planoretangulares são  $X_0, Y_0$  (arbitrárias).



### 1.8.1.2 Fórmulas

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + k_x \\ Y_0 &= y_0 + k_y \\ x_0 &= y_0 = 0 \end{aligned}$$

$k_x, k_y$  = constantes arbitrárias

$$\begin{aligned} X &= x + k_x \\ Y &= y + k_y \\ x &= -\Delta\lambda_1 \cdot \cos\varphi_0 \cdot N_p \cdot \text{arc1}'' \times c \\ y &= \frac{1}{B} \cdot [\Delta\varphi_1 + C \cdot x^2 + D \cdot (\Delta\varphi_1)^2 + E \cdot (\Delta\varphi_1)x^2 + E \cdot C \cdot x^4] \cdot c \end{aligned}$$

$$A = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$$

$$\Delta x = x - x_0 = x$$

$$\Delta y = y - y_0 = y$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$$

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda'' \cdot \text{correção arco-seno} = \Delta\lambda'' \cdot \left[1 - \frac{(\text{sen}1'')^2}{6} \cdot (\Delta\lambda'')^2\right]$$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi'' \cdot \text{correção arco-seno} =$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1'' &= \Delta\varphi'' \cdot \left[1 - \frac{(\text{sen}1'')^2}{6} \cdot (\Delta\varphi'')^2\right] = \\ &= \Delta\varphi'' \cdot [1 - 3,9173 \cdot 10^{-12} \cdot (\Delta\varphi'')^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= -\left[\Delta\lambda'' \cdot \text{sen}\varphi_m \cdot \sec\frac{\Delta\varphi}{2} + F \cdot (\Delta\lambda'')^3\right] \\ A' &= A + \Delta A \pm 180^\circ \end{aligned}$$

$$N_0 \cdot \text{sen}A \cdot \cos\varphi_0 = -N_p \cdot \text{sen}A' \cdot \cos\varphi \text{ (prova)}$$

$$B = \frac{1}{M_0 \cdot \text{arc1}''}$$



$$C = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2 \cdot M_0 \cdot N_0 \cdot \operatorname{arcl}''}$$

$$D = \frac{3 \times e^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \operatorname{arcl}''}{2 \cdot \sqrt{(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_0)^3}}$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{6 \cdot N_0^2}$$

$$F = \frac{\operatorname{sen} \varphi_m \cdot \cos \varphi_m \cdot \operatorname{sen}^2 1''}{12}$$

$$c = \frac{\sqrt{M_0 \cdot N_0} + H_t}{\sqrt{M_0 \cdot N_0}}$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

$$M_0 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_0)^3}}$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_0}}$$

$$N_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{f \cdot (2 - f)}$$

$$f = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

onde:

$N_0$  — raio de curvatura da seção normal ao plano meridiano do elipsóide em O (origem);

$N_p$  — raio de curvatura da seção normal ao plano meridiano do elipsóide em P;

$M_0$  — raio de curvatura das seção meridiana do elipsóide em O (origem);

a — semi-eixo maior do elipsóide de referência;

b — semi-eixo menor do elipsóide de referência;

e — primeira excentricidade do elipsóide de referência;

f — achatamento do elipsóide de referência;

- A — azimute topográfico e geodésico da direção OP;
- A' — azimute geodésico recíproco de A (somente para utilização na PROVA);
- g — convergência meridiana em P;
- c — fator de elevação;
- H<sub>t</sub> — altitude ortométrica do plano topográfico.

### 1.8.1.3

Na aplicação das fórmulas considerar j negativo no hemisfério sul, l crescendo positivamente para oeste.

### 1.8.1.4

Os coeficientes C, D e F são negativos no hemisfério sul.

### 1.8.1.5

O eixo das ordenadas é o eixo dos Y e o das abscissas é X.

### 1.8.1.6

O azimute A é topográfico e também geodésico pois em O a convergência meridiana é nula e A' é elipsóidico, estes azimutes servem para a prova (detecção de erros grosseiros nos cálculos).

O azimute recíproco no sistema topográfico local é igual a  $A \pm 180^\circ$ , não levando em conta a convergência meridiana.

## 1.9 Transformação de Coordenadas Planoretangulares — Sistema Topográfico Local em Coordenadas Geodésicas

### 1.9.1 Problema

Consiste no cálculo das coordenadas geodésicas  $\varphi$  e  $\lambda$  de um ponto P dado por suas coordenadas planoretangulares X e Y, a partir destas e das coordenadas geodésicas  $\varphi_0$  e  $\lambda_0$  e planoretangulares X<sub>0</sub> e Y<sub>0</sub> da origem O do sistema topográfico local.

### 1.9.2 Fórmulas

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + k_x \\ Y_0 &= y_0 + k_y \\ x_0 &= y_0 = 0 \end{aligned}$$

$k_x, k_y$  = constantes arbitrárias

$$x = X - k_x$$

$$y = Y - k_y$$

$$x' = \frac{x}{c}$$

$$y' = \frac{y}{c}$$

$$c = \frac{\sqrt{M_0 \cdot N_0 + H_t}}{\sqrt{M_0 \cdot N_0}}$$

$H_t$  = altitude ortométrica do plano topográfico

$$M_0 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^3}}$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0}}$$

$$N_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}}$$

$$s = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad s = \text{distância topográfica OP}$$

$$A = \text{azimute topográfico da direção OP} = \text{tg}^{-1} \frac{x'}{y'}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

$$\text{Correção de } \delta\varphi'' = \Delta\bar{\varphi}_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\bar{\varphi}_1 = \delta\varphi''_1 \cdot \text{correção arco seno}$$

$$- \Delta\varphi'' = \Delta\varphi_1'' \cdot \left( 1 + \frac{(\text{arc}1'')^2}{6} \cdot (\Delta\varphi_1'')^2 \right)$$

$$\delta\varphi_1'' = -\delta\varphi'' - D \times (\delta\varphi'')^2 \text{ (em segundos)}$$

$$\delta\varphi_1'' = B \cdot s \cdot \cos A + C \cdot s^2 \cdot \text{sen}^2 A - B \cdot E \cdot s^3 \cdot \text{sen}^2 A \cdot \cos A$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda'' = \Delta\lambda_1'' \cdot \text{correção arco-seno } \Delta\lambda_1'' \cdot \left( 1 + \frac{(\text{arc}1'')^2}{6} \cdot (\Delta\lambda_1'')^2 \right)$$



$$\Delta\lambda'' = \frac{1}{N_p \cdot \text{arc}1''} \cdot s \cdot \text{sen}A \cdot \text{sec}\varphi$$

$$-\Delta A = \Delta\lambda'' \cdot \text{sen} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \cdot \text{sec} \frac{\Delta\varphi}{2} + F \cdot (\Delta\lambda'')^3$$

$$A' = A + \Delta A \pm 180^\circ = \text{azimute geodésico da direção PO}$$

PROVA:  $N_0 \cdot \text{sen}A \cdot \cos\varphi_0 = -N_p \cdot \text{sen}A' \cdot \cos\varphi$

onde  $N_0$ ,  $N_p$ ,  $M_0$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $c$  têm as mesmas definições apresentadas em 1.8.1.2. e os coeficientes  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  têm também as mesmas expressões.

**1.9.3** Na aplicação das fórmulas fazer as mesmas considerações contidas em 1.8.1.3, 1.8.1.4 e 1.8.1.5.

**1.9.4** A prova serve apenas para detectar erros grosseiros no cálculo dos valores de  $A$  e  $A'$  que são, neste caso, o azimute geodésico direto da direção  $OP$  e o seu azimute geodésico recíproco, respectivamente, cuja diferença é a convergência meridiana em  $P$ .

**1.9.5** A convergência meridiana no sistema de coordenadas planoretangulares topográficas, obviamente, só é nula ao longo do meridiano do ponto origem do sistema. Para os demais pontos, no hemisfério sul, é negativa para os pontos situados nos quadrantes à leste do meridiano de  $O$  (origem), ou seja, nos primeiro e segundo quadrantes e positiva para os pontos situados nos quadrantes à oeste de  $O$  (terceiro e quarto quadrantes). No hemisfério norte a situação se inverte. É importante não confundir os quadrantes do sistema topográfico local com os quadrantes do sistema UTM (estes têm origem no cruzamento do Equador com o meridiano central do fuso, enquanto aqueles têm sua origem coincidindo com o ponto origem do sistema (ponto de tangência do plano topográfico na superfície de referência)).

## **1.10** Determinação do Norte Geográfico a Partir das Coordenadas Planoretangulares no Sistema Topográfico Local de Pontos Definidores de Azimutes Planos (Topográficos)

### **1.10.1** Problema

Consiste primordialmente no cálculo da convergência meridiana no vértice do azimute plano (topográfico) de uma direção, dado por suas coordenadas planoretangulares no sistema topográfico local e a partir deste azimute determinar a direção do norte geográfico (verdadeiro) com a aplicação da convergência meridiana. O problema tem como dados: as coordenadas planoretangulares dos pontos definidores da direção conhecida ou seja  $P$  (vértice do azimute) e  $Q$  (ponto visado); as coordenadas planoretangulares e as



coordenadas geodésicas da origem do sistema topográfico local e a altitude do plano topográfico.

## 1.10.2 Fórmulas

$$P(x_p, y_p) \quad Q(x_q, y_q) \quad O(x_0, y_0) \quad O(\varphi_0, \lambda_0)$$

$$(PQ)_t = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_q - x_p}{y_q - y_p}$$

$$(PQ)_g = (PQ)_t + \gamma_p$$

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$X_0 = x_0 + k_x \quad \therefore k_x = X_0$$

$$Y_0 = y_0 + k_y \quad \therefore k_y = Y_0$$

$k_x, k_y =$  constantes arbitrárias

$$\begin{aligned} x_p &= X_p - k_x \\ y_p &= Y_p - k_y \end{aligned}$$

$$\gamma_p = - \left( \Delta\lambda_p'' \cdot \operatorname{sen}(\varphi_m) \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} + (F \cdot \Delta\lambda_p''^3) \right) \right)$$

onde

$(PQ)_t$  azimute topográfico da direção PQ;

$(PQ)_g$  azimute geodésico da direção PQ;

$\gamma_p$  convergência meridiana em P com valor dado em segundos

## 1.11 Exemplo de Transformação de Coordenadas Geodésicas em Planoretangulares no Sistema Topográfico Local

### 1.11.1 Dados

- Origem O

$$\varphi_0 = 22^\circ 48' 03.88906'' \text{ S}$$

$$\lambda_0 = 42^\circ 28' 03.25712'' \text{ W}$$



$$X_0 = 150.000,000 \text{ m}$$

$$Y_0 = 250.000,000 \text{ m}$$

— Altitude do plano topográfico  $H_t = 40,00 \text{ m}$

— Elementos do elipsóide de referência

$$a = 6378160.0$$

$$e = 0.081820180369054$$

$$1 - e^2 = 0.93305458$$

- Ponto P

$$\varphi = -22^\circ 49'06.31781''\text{S}$$

$$\lambda = 42^\circ 22'51.26834''\text{W}$$

### 1.11.2 Cálculos preliminares

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0}} = 6381368.7155 \text{ m}$$

$$N_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}} = 6381373.3408 \text{ m}$$

$$M_0 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^3}} = 6345027.6556$$

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0 = 2.0173413388888903^\circ$$

$$\Delta \varphi'' = \Delta \varphi \times 3600 = 2.62.42875''$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = 0.0866635499999973^\circ$$

$$\Delta \lambda'' = \Delta \lambda \times 3600 = 311.98878''$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_0}{2} = 22.80975095^\circ$$

$$\text{arc}1'' = 4,8481368111 \cdot 10^{-6}$$





$$B = \frac{1}{M_0 \cdot \text{arc}1''} = 0.0325081020040341$$

$$C = \frac{\text{tg } \varphi_0}{2 \cdot M_0 \cdot N_0 \cdot \text{arc}1''} = -1.07076315807046 \cdot 10^{-9}$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \text{sen} \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{arc}1''}{2 \cdot \sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^3}} = -1.74098695697278 \cdot 10^{-8}$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \text{tg}^2 \varphi_0}{6 \cdot N_0^2} = 6.26267463693786 \cdot 10^{-15}$$

$$F = \frac{\text{sen} \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \text{sen}^2 1''}{12} = -6.45214630294486 \cdot 10^{-13}$$

$$\Delta \lambda_1 = 311.9887752367''$$

$$\Delta \varphi_1 = -62.428749046848$$

$$c = \frac{\sqrt{M_0 \cdot N_0} + H_t}{\sqrt{M_0 \cdot N_0}} = 1.00000628617276$$

### 1.11.3 Cálculo de x

$$x = -\Delta \lambda_1 \cdot \cos \varphi \cdot N_p \cdot \text{arc}1'' \cdot c = \mathbf{8896,8947}$$

### 1.11.4 Cálculo de x

$$X = x + k_x = 158896,8947$$

### 1.11.5 Cálculo de y

$$y = \frac{1}{B} [\Delta \varphi_1 + c \cdot x^2 + D \cdot (\Delta \varphi_1)^2 + E \cdot (\Delta \varphi_1) \cdot x^2 + E \cdot C \cdot x^4] \cdot c$$

$$y = \mathbf{-1923,0282}$$

### 1.11.6 Cálculo de y

$$Y = y + k_y = \mathbf{248076,9718}$$



### 1.11.7 Cálculo de A (azimute topográfico da direção OP)

**OBS.:** Neste caso **A** é também o azimute geodésico da direção **OP**, porque a convergência meridiana ( $\gamma$ ) em **O** é nula.

$$A = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{8896.89148754904}{-1923.03031717311} = 102.1966425 \Rightarrow 102^{\circ}11'47.914'' \text{ 2}^{\circ} \text{ quadrante}$$

### 1.11.8 Cálculo de $\gamma$ (convergência meridiana em P)

$$\Delta A = -\left[\Delta\lambda'' \cdot \operatorname{sen}\varphi_m \cdot \sec\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + F \cdot (\Delta\lambda'')^3\right]$$

$$\Delta A = -0^{\circ}02'00.94948''$$

### 1.11.9 Cálculo de A' (somente para aplicação na PROVA)

**OBS.:** **A'** é o azimute geodésico da direção **PO**

$$A' = A + \Delta A \pm 180^{\circ} = 282^{\circ}09'46.964''$$

**OBS.:**  $\Delta A = \gamma_P$

### 1.11.10 Prova

$$N_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \operatorname{sen}A = -N_p \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen}A'$$

$$N_0 = 6381368.71554169$$

$$N_p = 6.381.373,34076133$$

$$\varphi_0 = -22^{\circ} 48' 03,88906''$$

$$\varphi = -22^{\circ} 49' 06',31781''$$

$$A = 102^{\circ} 11' 47,914''$$

$$A' = 282^{\circ} 09' 46,964''$$

$$N_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \operatorname{sen}A = 5.749.919,316$$

$$N_p \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen}A' = 5.749.919,323$$

A diferença 0.007 se deve às aproximações nos cálculos.

### 1.11.11 Resumo

- Coordenadas de P no sistema topográfico local

$$X = 158896,891$$



$$Y = 248076,972$$

- Azimute topográfico da direção OP

$$(OP) = 102^{\circ} 11' 47.914''$$

- Convergência meridiana em P

$$\gamma_p = 0^{\circ} 02' 00.94948''$$

- Azimute geográfico de qualquer direção a partir de P, por exemplo, PQ

$$(PQ)_g = (PQ)_t \pm \gamma \Rightarrow 102^{\circ} 11' 47.914'' - 0^{\circ} 02' 00.94948'' = 102^{\circ} 09' 46,964''$$

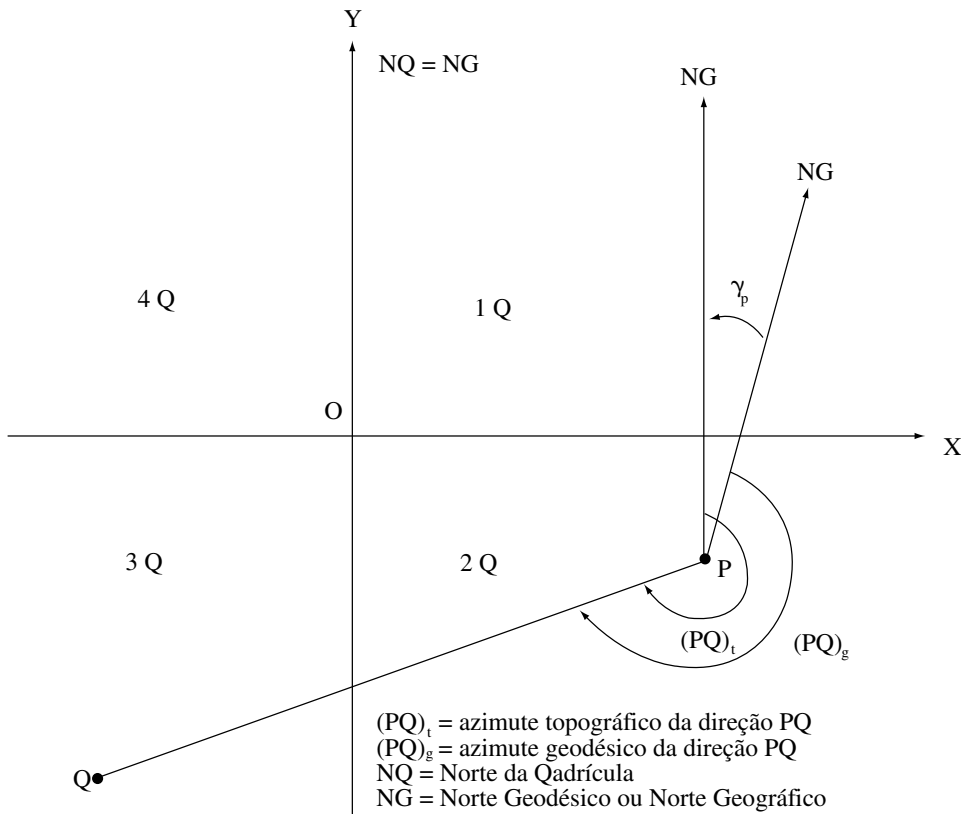


Figura 1.7

### 1.11.12 Conclusões

O ponto P está no 2º quadrante do sistema topográfico local, a leste do meridiano do ponto O (origem-datum) do sistema, o que acarreta para  $\gamma_p$  o sinal negativo.

## 1.12 Exemplo de Transformação de Coordenadas Planoretangulares — Sistema Topográfico Local em Coordenadas Geodésicas

### 1.12.1 Dados

- Origem O

$$\varphi_0 = 22^\circ 48' 03.88906''\text{S}$$

$$\lambda_0 = 42^\circ 28' 03,25712''$$

$$X_0 = 150.000,000\text{m}$$

$$Y_0 = 250.000,000\text{m}$$

- Altitude do plano topográfico

$$H_t = 40\text{m}$$

- Elementos do elipsóide de referência

$$a = 6378160,0$$

$$e = 0,081820180369054$$

- Ponto P

$$X = 158.896,891 \text{ m}$$

$$Y = 248076.972 \text{ m}$$

### 1.12.2 Cálculos Preliminares

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0}} = 6.381.368,71554169$$

$$M_0 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_0)^3}} = 6.345.027,6556135$$

$$\text{arc}1'' = 4,8481368 \cdot 10^{-6}$$

$$B = \frac{1}{M_0 \cdot \text{arc}1''} = 0,032508102004041$$

$$C = \frac{\text{tg} \varphi_0}{2 \cdot M_0 \cdot N_0 \cdot \text{arc}1''} = -1.07076315807046 \cdot 10^{-9}$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \operatorname{arcl}''}{2 \cdot \sqrt{(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi_0)^3}} = -1,74098695697278 \cdot 10^{-8}$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{6 \cdot N_0^2} = 6,26267463693786 \cdot 10^{-15}$$

$$c = \frac{\sqrt{M_0 \cdot N_0} + H_t}{\sqrt{M_0 \cdot N_0}} = 1.00000628617276$$

$$x = X - k_x = 8896,8556$$

$$y = Y - k_y = -1923,0280$$

$$x' = \frac{x}{c} = 8896,779636$$

$$y' = \frac{y}{c} = -1923,015912$$

$$s = \sqrt{x'^2 + y'^2} = 9102,28897100275$$

$$A = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x'}{y'} \right) = 102^\circ 11' 47.864'' \quad (2^\circ \text{ Quadrante topográfico})$$

(azimute topográfico da direção OP)

### 1.12.3 Cálculo de $\delta\varphi''$

$$\delta\varphi'' = B \cdot s \cdot \cos A + C \cdot s^2 \cdot \operatorname{sen} A - B \cdot E \cdot s^3 \cdot \operatorname{sen}^2 A \cdot \cos A$$

$$\Delta\varphi_1'' = -\delta\varphi'' - D \cdot (\delta\varphi'')^2 \quad (\text{em segundos})$$

$$\Delta\varphi_1 = -62,42873649$$

### 1.12.4 Correção de $\Delta\varphi$

$$- \Delta\varphi'' = \Delta\varphi_1'' \times \left[ \left( 1 + \frac{(\operatorname{arcl}'')^2}{6} \right) \times (\Delta\varphi'')^2 \right] = 62.4287446828721$$

$$\Delta\varphi = 0^\circ 01' 02.42874''$$

### 1.12.5 Cálculo de $\varphi$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

$$\varphi_0 = 22^\circ 48' 03,88906''$$

$$\varphi = 22^\circ 48' 03,88906'' + 0^\circ 01' 02,42874'' = 22^\circ 49' 06,31781''$$

$$\varphi = 22^\circ 49' 06,31781'' \text{ S}$$

### 1.12.6 Cálculo de $N_p$

$$N_p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2\varphi}} = 6.381.373,34075575$$

### 1.12.7 Cálculo de $\Delta\lambda_1''$

$$\Delta\lambda_1'' = \frac{1}{N_p \cdot \text{arc}1''} \cdot s \cdot \text{sen } A \cdot \text{sec } \varphi = -311,886389415''$$

### 1.12.8 Cálculo de $\Delta\lambda''$

$$\Delta\lambda'' = -311,98876285529''$$

### 1.12.9 Cálculo de $\lambda$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\lambda = 42^\circ 22' 51,268346'' \text{ W}$$

### 1.12.10 Cálculo de $F$

$$F = \frac{\text{sen}\varphi_m \cdot \cos\varphi_m \cdot \text{sen}^2 1''}{12} =$$

$$F = -6,451463011349 \cdot 10^{-13}$$

### 1.12.11 Cálculo de $\Delta A$

$$\Delta A = - \left[ \Delta\lambda'' \cdot \text{sen}\varphi_m \cdot \text{sec} \frac{\Delta\varphi}{2} + F \cdot (\Delta\lambda'')^3 \right] = -0^\circ 02' 00,9448''$$

### 1.12.12 Cálculo de $A'$

$$A' = A + \Delta A \pm 180^\circ$$

$$A' = 282^\circ 09' 46.915''$$

### 1.12.13

$$N_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{sen } A = -N_p \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } A'$$

$$N_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{sen } A = 5749919,617$$

$$N_p \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } A' = -5749919,617$$

### 1.12.14 Resumo

$$\varphi = 22^\circ 49' 06.31781'' \text{S}$$

Coordenadas geodésicas de P

$$\lambda = 42^\circ 22' 51.26834'' \text{W}$$

- Azimute geodésico da direção OP fi  $A_g = A + g$ , porem,  $g = 0$

$$A_g = 102^\circ 11' 47,864''$$

- Azimute geodésico recíproco (direção PO)  $\Rightarrow \mathbf{A'_g} = (\mathbf{A} + \boldsymbol{\gamma}) \pm \mathbf{180}$

$$\mathbf{A'_g} = (102^\circ 11' 47,864'' - 0^\circ 02' 00,94948'') + 180^\circ$$

$$A'_g = 282^\circ 09' 46,915''$$

- Convergência meridiana em P

$$\gamma_p = \Delta A = -0^\circ 02' 00,94948''$$

## 1.13 Conclusões

Estando o ponto **P** no hemisfério sul verifica-se que está no 2º quadrante do sistema topográfico com origem em **O**, a leste do meridiano deste ponto, o que acarreta para  $\gamma_p = \Delta A$  o sinal negativo.

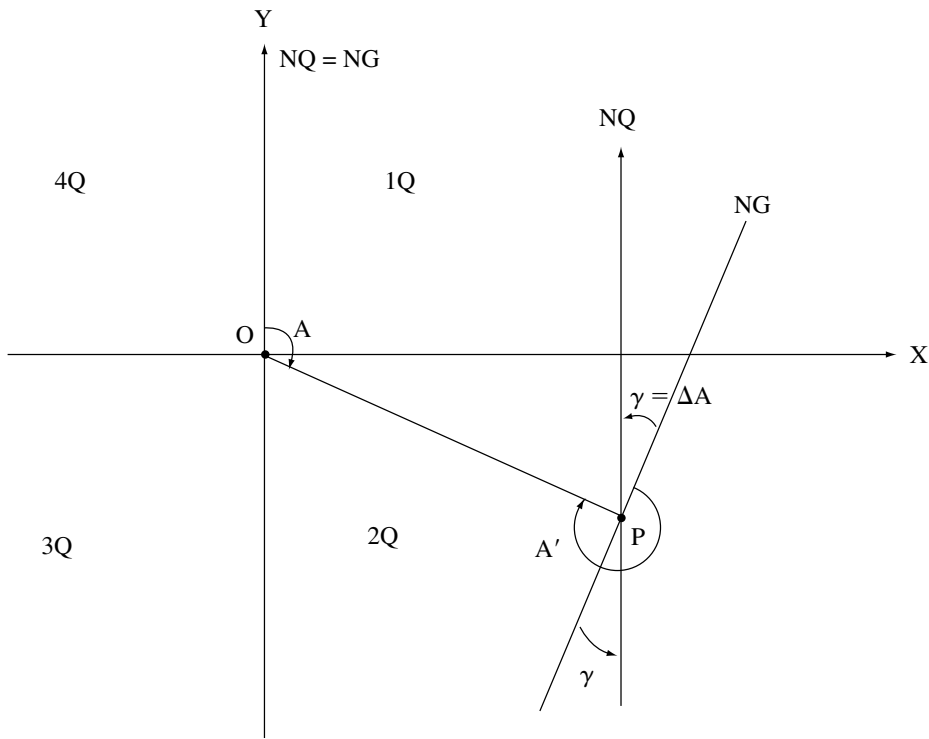


Figura 1.8

## 1.14 Referências

“*Geodesy including Astronomical Observations, gravity Measurements and Method of Least Squares*” by George L. Hosmer, Second Edition. New York. John Wiley & Sons, Inc.

LIMA, D G., **Sistema Topográfico Local**. São Paulo. 1995 em publicação.



# Parte 5

---

## Sistema de Posicionamento por Satélite GPS

Prof. Dr. Denizar Blitzkow  
Prof. Dr. Edvaldo Simões da Fonseca Jr.



# Introdução

## 1.1 Geodésia — Definição

A geodésia é definida classicamente como a ciência que estuda a forma e as dimensões da Terra. A palavra geodésia em si é de origem grega e significa “particionando a Terra” ( $\gamma\eta$  — Terra,  $\delta\alpha\iota\omega$  — divido).

A era dos satélites artificiais imediatamente seguida pela revolução da eletrônica, proporcionaram novos e atraentes rumos à geodésia. Primeiramente, os métodos de posicionamento ganharam muito em rapidez e precisão. Em seguida, a geodésia pode se lançar em outros campos, não de seu interesse específico, mas de valiosa utilidade, tais como: monitoramento das marés terrestres, controle do movimento de placas tectônicas, detecção de movimentos verticais da crosta, controle de grandes estruturas de engenharia, estudo do campo gravitacional, etc. Esta abrangência torna difícil definir exatamente geodésia e delimitar seus campos de aplicação, porém, mostra alguns de seus envolvimento atuais.

## 1.2 Evolução Histórica do Posicionamento

O ser humano sentiu necessidade de se posicionar quando de suas primeiras viagens. Daí a primazia do posicionamento cinemático sobre o estático.

Em palavras simples navegar significa saber onde se está e onde se vai — saber ir e voltar. Os recursos de que se necessita para navegar dependem das características da viagem como a distância e o meio (terrestre, aéreo, aquático, ...).

Sejam quais forem os recursos para a navegação, o conhecimento da forma da Terra e a adoção de um referencial adequado são imprescindíveis.

Pitágoras (6<sup>o</sup> sec. a. C.) deu um grande passo na evolução histórica da forma da terra ao atribuir ao planeta o modelo esférico alegando razões de caráter estético e filosófico. Coube ao grande filósofo Aristóteles (4<sup>o</sup> sec. a. C.) apresentar os primeiros argumentos científicos em prol daquela forma. As partículas têm uma tendência natural, assegurava ele, de cair para o centro do mundo (uma direção para baixo). Neste movimento todas as partes competem entre si para se colocarem na região inferior o que as leva a se comprimirem em forma de uma bola. Além deste argumento de caráter gravitacional,

Aristóteles lembrou dois outros fatores: a sombra circular da terra nos eclipses de lua e a variação no aspecto do céu estrelado com a latitude.

A concepção esférica atravessou incólume muitos séculos até esbarrar nas análises de caráter teórico do genial Isaac Newton (séc. XVII). Segundo ele, a forma esférica era incompatível com o movimento de rotação. Este, devido à força centrífuga, impõe um achatamento nos pólos. Estava aberta a fase elipsoidal que durou muito pouco se comparada com a esférica. O famoso matemático alemão, C. F. Gauss, concluiu, após aplicar o método dos mínimos quadrados numa série de medições geodésicas em Hannover, que os resíduos obtidos estavam muito acima dos erros aleatórios inerentes às observações.

Isto indicava que o modelo matemático adotado para a Terra, o elipsóide de revolução, não era adequado. Sugeriu então uma forma levemente irregular mais tarde denominada GEÓIDE. Entretanto, como referência para o estabelecimento de sistemas de coordenadas geodésicas continua-se utilizando o elipsóide.

Fixada e aceita a forma da terra, os métodos e técnicas de posicionar um ponto de sua superfície em relação a um referencial, ganharam cada vez mais importância e precisão. Assim é que as chamadas TRIANGULAÇÕES, em geral quadriláteros subdivididos em triângulos, iniciadas no século XVII na França, passaram a ter um grande desenvolvimento. Aliadas às observações astronômicas e eventualmente complementadas com algumas variantes, como poligonais eletrônicas, elas se constituíram, durante vários séculos, no único método de determinação “precisa” das coordenadas em pontos (vértices) da superfície.

A Era Espacial iniciada com o lançamento do primeiro satélite artificial, o SPUTNIK I (4 de outubro de 1957), marcou uma mudança radical em muitas ciências e em particular nos métodos de posicionamento. A primeira idéia de utilização do efeito Doppler-Fizeau na determinação de órbitas dos satélites artificiais remonta à mesma época e é devida a Guier e Weiffenbach. Posteriormente McClure sugeriu a operação inversa: utilizar a frequência Doppler de um satélite de órbita conhecida para posicionar o observador. Desenvolvido pela Universidade John Hopkins o sistema denominado Navy Navigation Satellite System (NNSS), também conhecido como TRANSIT, entrou em operação em 1967. Até recentemente prestou um eficiente apoio para o posicionamento geodésico e para a navegação marítima. Entretanto, razões relacionadas com a estrutura do sistema, não permitiam que o mesmo fosse usado para a navegação aérea e impunham restrições diversas aos posicionamentos acima referidos.

Isto levou o Departamento de Defesa dos Estados Unidos a investir na concepção de um novo sistema. Proveniente da fusão em 1973 de dois projetos, TIMATION (Time Navigation) da Marinha e 621B da Força Aérea, nasceu o que veio a ser denominado NAVSTAR/GPS.

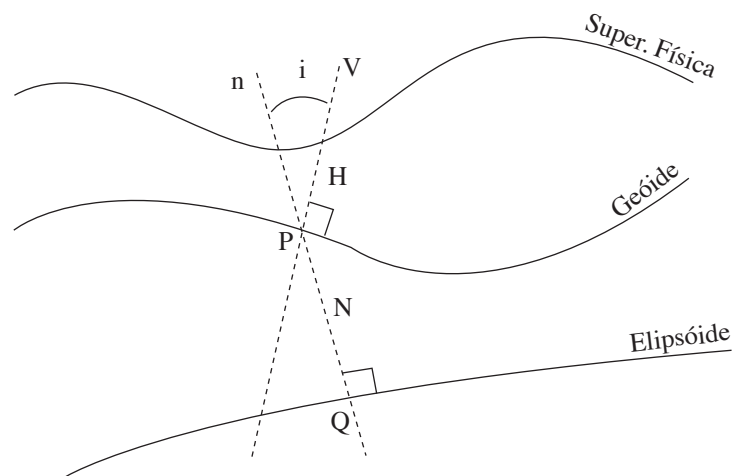
O Navigation Satellite with Time and Ranging (NAVSTAR) ou Global Positioning System (GPS), popularizado atualmente pela última sigla, foi projetado para fornecer a posição instantânea bem como a velocidade de um ponto sobre a superfície da Terra ou próximo a ela, num referencial tridimensional. O sistema atende plenamente a navegação em geral e vem oferecendo precisões e facilidades cada vez maiores nos posicionamentos estático e cinemático.

# Conceitos e Definições

Antes de entrar no sistema GPS propriamente dito, serão apresentados alguns conceitos fundamentais imprescindíveis para o entendimento das diversas aplicações do mesmo.

## 2.1 Superfícies de Referência

Existem três superfícies que rotineiramente envolvem o geodesta ou quem necessite de posicionamento. A primeira delas é a “superfície física” (SF) limitante do relevo topográfico. A segunda é chamada “superfície elipsoidal”, limitante de um elipsóide de revolução, figura matemática gerada pela rotação de uma elipse entorno do eixo menor. Finalmente, a terceira é a “superfície geoidal”, conceitualmente mais complicada e que limita uma forma geométrica chamada GEÓIDE. É definida como a superfície equipotencial do campo de gravidade que coincide com o nível médio não perturbado dos mares (Fig. 2.1).



**Figura 2.1** Conceito de vertical, de normal e das superfícies associadas.

Considere-se um ponto P sobre o geóide. A reta que passa por P perpendicular ao mesmo define a direção de uma linha de força chamada vertical ( $v$ ). A reta que passa por P perpendicular ao elipsóide define a direção de uma linha de força chamada normal ( $n$ ). A primeira é associada ao campo de gravidade da Terra real e a segunda da Terra normal. O ângulo que a vertical forma com o normal é chamado “deflexão da vertical” ou “ângulo de desvio da vertical” ( $i$ ). Normalmente considera-se as componentes deste ângulo segundo dois planos perpendiculares: a componente meridiana ( $\xi$ ) (plano da direção norte-sul) e a componente 1° vertical ( $\eta$ ) (plano de direção leste-oeste).

A separação entre a superfície física e a superfície geoidal tomada ao longo da vertical é chamada “altitude ortométrica” (H). É obtida através da operação de nivelamento geométrico associado à gravimetria.

A separação entre as superfícies geoidal e elipsoidal ao longo da normal é a “altura” ou “ondulação geoidal” (N) (Figura 2.1). Seu cálculo foi objeto tradicionalmente da geodésia física e hoje pode ser feito também a partir da observação de satélites artificiais.

## 2.2 Coordenadas Geodésicas ou Elipsoidais e Cartesianas

Em se tratando de posicionamento é fundamental o conceito de coordenada. Bastante familiar são as coordenadas geográficas: latitude e longitude. Denomina-se latitude astronômica  $\varphi_A$  ao ângulo formado pela vertical e sua projeção sobre o plano do equador. A latitude é medida de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  com origem no equador, positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul, por convenção. A longitude astronômica  $\lambda_A$  é o ângulo diedro formado pelo meridiano astronômico médio de referência e pelo meridiano astronômico do ponto. É contada positiva por leste de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

A latitude geodésica ou elipsóidica  $\varphi_G$  é definida como o ângulo que a normal forma com sua projeção sobre o plano do equador. O ângulo diedro formado pelos meridianos geodésicos de referência (IRM) e do ponto mede a longitude geodésica ou elipsóidica  $\lambda_G$ . Para definir sem ambigüidade a posição de um ponto P sobre a superfície da Terra necessita-se da distância, ao longo da normal, entre o elipsóide e o ponto, a altitude geométrica ( $h$ ) (Figura 2.2).

As coordenadas astronômicas são referidas à direção da vertical, enquanto as coordenadas geodésicas ou elipsóidicas são referidas à direção da normal. As relações entre elas são:

$$\varphi_A - \varphi_G = \xi$$

$$(\lambda_A - \lambda_G) \cos \varphi_G = \eta \quad (2.1)$$

O Sistema de Referência Terrestre do IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Services) é conhecido pela sigla ITRS (IERS Terrestrial Reference System) e definido conforme os critérios estabelecidos pelo IERS.

Trata-se de um sistema cartesiano geocêntrico, isto é, origem no centro de massa da Terra como um todo, o que inclui os oceanos e a atmosfera. A origem foi melhor

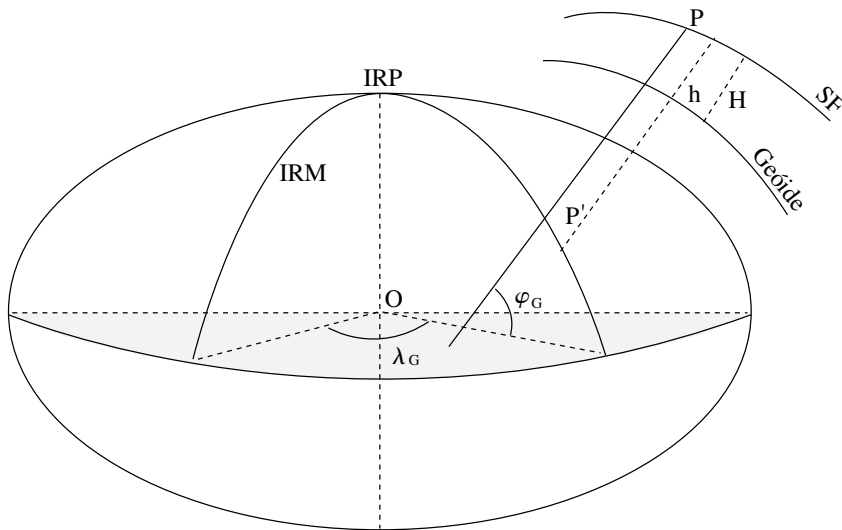


Figura 2.2 Coordenadas geodésicas ou elipsóidicas.

caracterizada recentemente através das técnicas SLR (Satellite Laser Ranging) e LLR (Lunar Laser Ranging). A orientação dos eixos foi aquela estabelecida em 1984 pelo BIH e é mantida pelo IERS nas realizações do ITRS dentro de  $\pm 3$  mas (miliarcosegundo) [Ma and Feissel, 1997, pg. II-3]. Durante muito tempo o eixo  $OX^3$  do Referencial Terrestre era orientado segundo a posição média do polo no período de 1900 — 1905, na época chamado CIO (Conventional International Origin). A partir de técnicas mais modernas de observação o BIH ajustou a posição do polo em 1984 e a partir daí manteve estável sob a sigla IRP (IERS Reference Pole). Trata-se de uma nova materialização do CIO, consistente com as técnicas modernas mais precisas. Ainda em consistência com o Sistema BIH 1984 o eixo  $OX^1$  do ITRS é orientado segundo o IRM (IERS Reference Meridian). O eixo  $OX^2$  a  $90^\circ$  de  $OX^1$  completa um sistema dextrógiro.

As coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  de um ponto da Terra rígida variam com o tempo neste sistema em função do “movimento do pólo”.

Em resumo, o ITRS tem as seguintes características:

- é geocêntrico;
- o eixo  $OX^1$  é orientado na direção do IRM;
- o eixo  $OX^3$  é orientado na direção do IRP;
- o eixo  $OX^2$  a  $90^\circ$  de  $OX^1$  completando um sistema dextrógiro (Figura. 2.3).

O posicionamento e a cartografia se valem sempre de coordenadas geodésicas ou elipsóidicas, ao invés de cartesianas, referidas a um elipsóide de revolução. Este fica definido através de dois parâmetros, por exemplo, os dois semi-eixos: maior “a” e menor “b”. Tem sido usual, entretanto, escolher o semi-eixo maior e o achatamento, este representado por “f” e definido como:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (2.2)$$

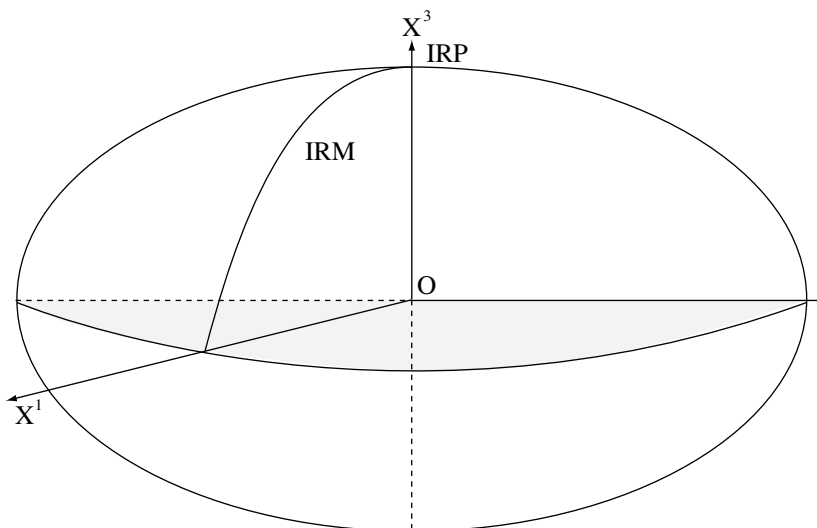


Figura 2.3 Sistema Terrestre Convencional.

## 2.3 Datum

Escolhida a superfície de referência para as coordenadas geodésicas têm-se o que é denominado “DATUM GEODÉSICO HORIZONTAL” (D.G.H.). Para que um sistema geodésico fique caracterizado é necessário fixar e orientar o elipsóide no espaço. A fixação foi realizada no passado mediante a escolha de um ponto origem e a atribuição, de alguma forma, de coordenadas geodésicas,  $\varphi_G$ ,  $\lambda_G$  ao mesmo, bem como, de um valor para a altura geoidal  $N$ . A orientação era definida pelo azimute de uma direção inicial. Esta caracterização de um DGH conduzia ao conceito denominado *sistema geodésico definido*. Os métodos geodésicos clássicos, triangulação e poligonação, ou as técnicas modernas, uso de satélites artificiais, permitem que se obtenham coordenadas em tantos pontos quantos necessários, devidamente materializados no terreno, vinculadas ao ponto origem.

O conjunto de marcos assim estabelecidos com as respectivas coordenadas leva ao conceito de *sistema geodésico materializado*. O que se desejou sempre foi uma perfeita coerência entre o sistema definido e o materializado; entretanto, os erros inerentes aos processos de medição não permitem geralmente uma completa identificação entre os mesmos.

A menos de alguns sistemas locais usados no passado em caráter emergencial, o Brasil adotou durante muitos anos o DATUM “Córrego Alegre”. Este nome provém de um vértice da triangulação, localizado nas imediações de Uberaba, e que constituía a sua origem. Os elementos característicos deste DGH eram:

$$\begin{aligned}
 \varphi_G &= \varphi_A = 19^\circ 50' 15,14'' \text{ S} \\
 \lambda_G &= \lambda_A = 48^\circ 57' 42,75'' \text{ W} \\
 N &= 0 \\
 A_G &= 128^\circ 21' 48,96''
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$



sendo adotado como elipsóide o de Hayford cujos parâmetros são:

$$\begin{aligned} a &= 6.378.388 \text{ m} \\ f &= 1:297,00 \end{aligned} \quad (2.4)$$

e  $A_G$  o azimute geodésico da direção Córrego Alegre — Chapada das Areias.

A partir de 1979, a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), através de seu Departamento de Geodésia, decidiu por uma mudança. Adotou o sistema conhecido como SAD-69 (SOUTH AMERICAN DATUM 1969), cuja origem é o vértice CHUÁ. Este DGH é caracterizado pelos seguintes elementos:

$$\begin{aligned} \varphi_G &= 19^\circ 45' 41,6527'' \text{ S} \\ \lambda_G &= 48^\circ 06' 04,0639'' \text{ W} \\ A_G &= 271^\circ 30' 04,05'' \\ N &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo  $\xi = 0,31''$  e  $\eta = -3,52''$ , isto para o vértice Chuá, tendo como elipsóide aquele do Sistema de Referência 1967 cujos parâmetros são:

$$\begin{aligned} a &= 6.378.160 \text{ m} \\ f &= 1:298,25 \end{aligned} \quad (2.6)$$

e sendo  $A_G$  o azimute da direção Chuá-Uberaba.

A partir da assinatura pelo Presidente do IBGE em 25 de fevereiro de 2005 da Resolução 1/2005, ficou estabelecido como Sistema Geodésico Brasileiro o SIRGAS 2000, época 2000,4.

Isto tem implicado na existência de cartas referidas ao antigo sistema Córrego Alegre e cartas referidas ao recente SAD-69, com a possibilidade, a curto prazo, de surgirem mapeamentos novos vinculados ao SIRGAS2000, exigindo a devida atenção do usuário.

A partir da definição da origem do sistema geodésico, e.g., Chuá ou Córrego Alegre, eram conduzidas as redes de triangulação que visavam fornecer coordenadas aos vértices materializados no terreno, os quais serviam de referência para os trabalhos de cartografia, de engenharia, etc.

Hoje o conceito de sistema geodésico mudou e não se estabelece mais uma origem. Através das técnicas espaciais implanta-se uma rede de referência. Neste aspecto existem redes de diferentes amplitudes: rede mundial (IGS), redes continentais (SIRGAS), redes nacionais (RBMC), redes estaduais (Rede GPS do Estado de São Paulo) e até regionais ou locais.

Por outro lado, vem se evoluindo para um referencial que constitua uma perfeita materialização do Sistema de Referência Terrestre. Nesta tentativa surgiram, entre outros, o WGS-72 (World Geodetic System 1972), o NSWC (Naval Surface Weapon Center) com algumas variantes. Estes ficam apenas citados a título de ilustração. É

importante mencionar com mais pormenores o chamado WGS-84 (World Geodetic System 1984) adotado como referencial nos satélites GPS. Na verdade, estes sistemas constituem mais do que um simples referencial; estabelecem valores para uma série de constantes, tais como: velocidade angular da Terra, velocidade da luz, constante universal da gravitação, etc. As principais constantes a salientar no sistema WGS-84 são:

$$\begin{aligned} a &= 6.378.137\text{m} \pm 0,5 \text{ m} \\ f &= 1:298,257223563 \\ c &= 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (velocidade da luz)} \\ J_2 &= 0,108263 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

É importante salientar que a materialização de um sistema cartesiano geocêntrico tem se beneficiado nos últimos anos das observações interferométricas levadas a efeito nas estações VLBI, bem como das observações “laser” tanto aos satélites artificiais quanto à lua. Em função da alta precisão das referidas observações e do cuidado no processamento das mesmas, hoje se admite que o referencial terrestre está satisfatoriamente materializado através do que é denominado ITRF. O WGS-84 por outro lado está devidamente compatibilizado com o ITRF, versão 2000.

O Departamento de Geodésia do IBGE determinou há alguns anos parâmetros de transformação do sistema WGS-84 para o sistema SAD 69 que consistiu nas seguintes translações:

$$TX = +66,87 \text{ m}$$

$$TY = -0 4,37 \text{ m}$$

$$TZ = +38,52 \text{ m}$$

Os sistemas até aqui mencionados são de extrema importância prática. Mas a última década deu um grande passo para estabelecer os conceitos mais adequados em relação a referenciais que atendessem às necessidades diversas das atividades humanas. Neste aspecto concluiu-se que há uma série de fenômenos que resultam em deslocamentos de pontos e/ou alterações de movimento cuja quantificação é importante determinar:

- deslocamentos/deformações de obras de engenharia
- movimentos de placas da litosfera: inter-placa e intra-placa
- marés oceânicas e terrestres
- efeitos de carga sobre a crosta
- movimento de rotação
- deslocamento do eixo de rotação
- comportamento dinâmico do sistema Terra-Lua
- movimento dos planetas e dos satélites, etc.

Para quantificar as grandezas vinculadas a estes fenômenos é usado o Sistema de Referência Terrestre Internacional (ITRS — International Terrestrial Reference

System) definido pelo IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service). O ITRS é fixo à Terra acompanhando-a em seus diferentes movimentos. Mas é essencial estabelecer um referencial fixo no espaço. O desenvolvimento da técnica VLBI (Very Long Baseline Interferometry), aplicação da interferometria na observação de corpos celestes, em particular, dos Quasares, permitiu estabelecer o chamado Referencial Celeste; sua origem é o baricentro do sistema solar e o plano primário é próximo ao equador médio em J2000 (ano Juliano 2000) [Arias et al., 1995] [McCarthy, 1996]. A origem da ascensão reta deve ser próxima do equinócio dinâmico J2000, consistente com o valor convencional do FK5 (12h 29m 6,6997s em J2000) [Arias et al., 1995]. Com isso fica definido o Sistema de Referência Celeste Internacional (ICRS — International Celestial Reference System).



# Características do Sistema GPS

## 3.1 Estrutura dos Satélites e dos Sinais

A estrutura final do sistema compreende constelação de 27 satélites (34 operacionais e mais 3 reservas) distribuídos em 6 planos orbitais distintos (Figura 3.1). O objetivo primordial da configuração era o dispor, em qualquer ponto sobre a superfície da Terra ou próximo a ela, de um mínimo de quatro satélites acima do horizonte 24 horas por dia. A altura dos satélites é aproximadamente de 20.000 km e uma inclinação do plano da órbita em relação ao plano do equador de  $55^\circ$ . Isto implica num período (duração de uma revolução ao redor da Terra) de 12 horas (siderais).

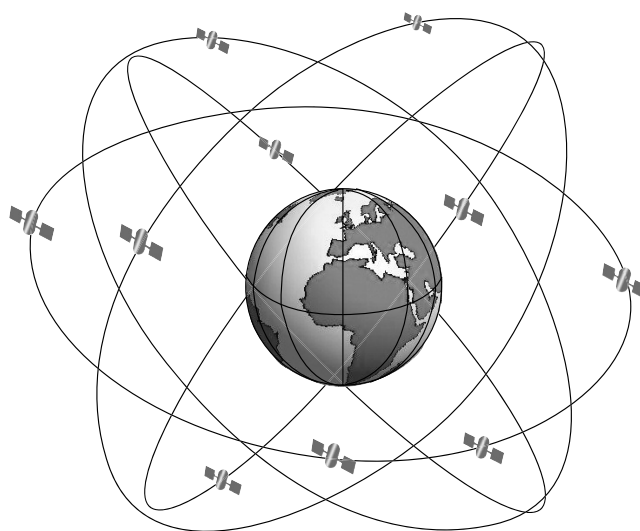


Figura 3.1 Estrutura da órbita dos satélites GPS.

Os sinais emitidos pelos veículos espaciais (VE) são caracterizados por um certo número de componentes todas baseadas numa frequência fundamental de 10,23 MHz controlada por osciladores atômicos de césio e de rubídio. Os satélites transmitem dois sinais  $L_1$  e  $L_2$  com frequências respectivas:

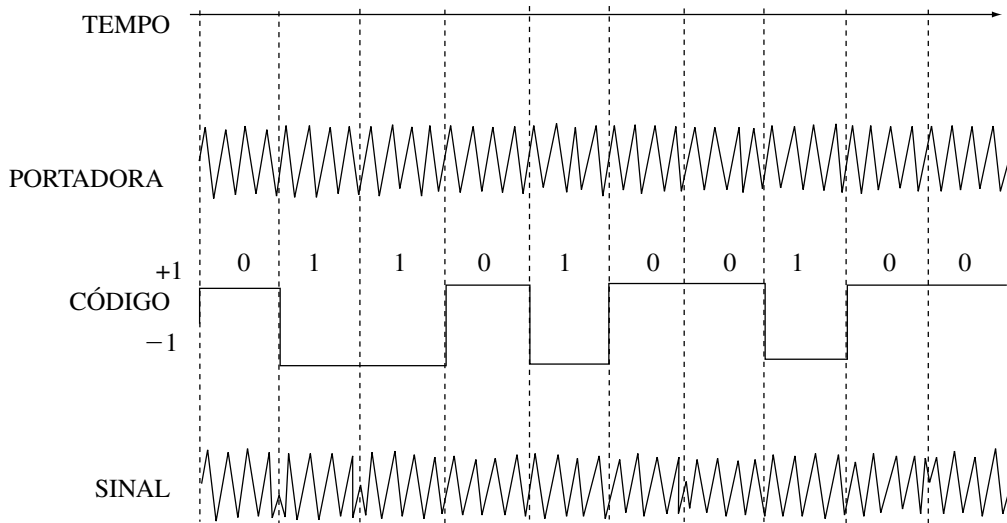


Figura 3.2 Concepção da modulação em fase.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 154 \times 10,23 = 1575,42 \text{ MHz} \\ \omega_2 &= 120 \times 10,23 = 1227,60 \text{ MHz}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Os comprimentos de onda destas portadoras são respectivamente 19,05 cm e 24,45 cm. Os diferentes tipos de modulações sobrepostas a estas portadoras podem ser traduzidos pelas equações:

$$L_1(t) = A_p P_i(t) D_i(t) \cos[\omega_1 + \varphi(t)] + A_g G_i(t) D_i(t) \sin[\omega_1 + \varphi(t)] \quad (3.2a)$$

$$L_2(t) = B_p P_i(t) D_i(t) \cos[\omega_2 + \varphi(t)] \quad (3.2b)$$

cujos termos serão explicados a seguir.

As duas portadoras são moduladas em fase, com distinção entre as fases cosenoidal e senoidal, por uma função degráu. A Figura 3.2 mostra a concepção da modulação em fase.

A fase cosenoidal de ambas as portadoras é modulada por uma seqüência de pulsos (da função degráu) conhecida como código P (preciso ou protegido) e representado em (3.2a) e (3.2b) por  $P_i(t)$ .

O código P é gerado por um algoritmo que se repete a cada 267 dias. Observado ao longo deste período a seqüência não apresenta nenhuma simetria, razão pela qual se denomina “pseudo aleatória”. Cada satélite, na prática, transmite um segmento específico de 7 dias do código P. Isto caracteriza cada VE permitindo que se selecione um satélite particular para rastrear entre os que estão acima do horizonte. Às 0h TU (Tempo Universal) da noite de sábado para domingo é reiniciada em cada satélite a geração de seu segmento do código P. A freqüência do código P é de 10,23 MHz.

É impossível a um receptor varrer rapidamente o comprimento de 7 dias do código P de modo a sintonizá-lo. Para tanto, o satélite transmite uma informação complementar, chamada código HOW (Hand-Over Word) que permite conhecer um intervalo específico do código transmitido naquele instante. Esta informação é modulada junto com o código C/A e é conhecida como contagem Z.

A fase senoidal da portadora  $L_1$  é modulada por uma seqüência de pulsos (função degráu) chamada código C/A (Clear Access) representada na equação (3.2a) por  $G_i(t)$ . O código C/A é gerado pelo algoritmo de Gold em cada satélite, se repete a cada 1 milissegundo e tem uma freqüência de 1,023 Mhz.

### 3.2 Formato e Conteúdo da Mensagem

Além dos dois códigos, ambas as fases da portadora  $L_1$  e uma das fases da portadora  $L_2$  são moduladas por uma seqüência de baixa freqüência (50 bps) de dados representada nas equações (3.2) por  $D_i(t)$ . Compreendem um conjunto de informações necessárias ao usuário, conhecido como “mensagem”, e que constitui o que é denominado “quadro”.

O conjunto de informações de um quadro está dividido em 5 subquadros, cada um composto de 300 bits, sendo que cada conjunto de 30 bits forma uma palavra. O quadro todo totaliza 1500 bits. Cada bit da mensagem tem a duração de 20 ms. Portanto, um subquadro é composto de 10 palavras e tem a duração de 6 segundos, sendo de 30 segundos a duração do quadro. A Figura 3.3 mostra, esquematicamente, o formato da mensagem GPS.

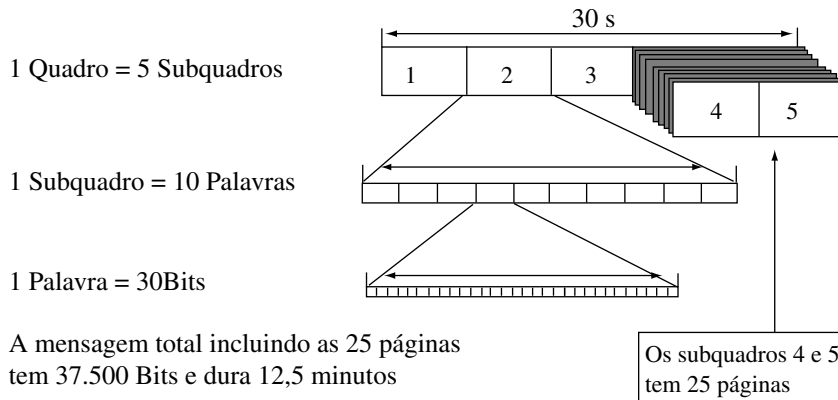


Figura 3.3 Formato da mensagem GPS.

“As duas primeiras palavras de cada subquadro contém a palavra de Telemetria TLM e a palavra HOW. A TLM contém um preâmbulo de 8 bits que funciona como padrão de sincronização, facilitando o acesso aos dados de navegação. HOW contém o contador Z e muda a cada 6 segundos. O contador Z representa o número inteiro de 1,5 segundos de tempo decorridos desde o início da semana (início do segmento de 7 dias

do código P). Deste modo, o contador Z varia de 0, no início da semana, a 403.199 imediatamente antes do final da semana ( $24\text{hs} \times 3.600 \times 7 \text{ dias}/1.5\text{s} = 403.200$ ). Através do contador Z, é possível saber a faixa do código P que deve ser varrida dentro da extensão de 7 dias, permitindo que o receptor sintonize este código. A palavra HOW contém um número, que multiplicado por quatro, fornece o contador Z do próximo subquadro” [Santos, 1990].

O conteúdo dos subquadros foi assim idealizado:

### Subquadro 1

- número da semana GPS;
- número do satélite;
- idade dos dados;
- “saúde” do satélite;
- coeficientes para correção do relógio do satélite.

### Subquadro 2 e 3

- parâmetros orbitais (efemérides transmitidas)

### Subquadro 4

- modelo para a correção da refração ionosférica;
- diferenças de tempo GPS-TUC;
- almanaque para os satélites 25 a 32, no caso de mais do que 24 satélites estarem em órbita;
- estado de funcionamento (saúde) destes satélites.

### Subquadro 5

- almanaque para os primeiros 24 satélites em órbita.
- estado de funcionamento (saúde) dos mesmos.

A saúde do satélite é uma expressão consagrada no GPS para informar as condições de funcionamento do mesmo, da transmissão das efemérides e das componentes do sinal.

A idade dos dados indica o intervalo de tempo decorrido desde a última atualização dos mesmos.

Os coeficientes para a correção do relógio permitem o modelamento da deriva do oscilador do satélite, a partir de um polinômio de segunda ordem.

Os parâmetros orbitais ou efemérides descrevem o movimento Kepleriano do satélite e são usados para o cálculo de sua posição.

Os almanaques dos satélites consistem nas efemérides dos mesmos, permitindo a obtenção menos precisa da posição para efeito de planejamento do rastreamento.

O modelo para correção da ionosfera é composto por um conjunto de 8 coeficientes, sendo essencial aos usuários com receptores de uma só frequência.



“Os subquadros 1 a 3 são repetidos em cada quadro, até que seus valores sejam renovados. Já os subquadros 4 e 5 fornecem dados distintos, através de 25 sequências consecutivas, após o que se repetem. Por isso, diz-se que estes dois últimos subquadros são divididos em 25 “páginas”. Cada página contém informações (mencionadas anteriormente) para um satélite. Como cada quadro tem a duração de 30 segundos, será necessário esperar 12,5 minutos ( $30s \times 25 = 750s$ ), para a obtenção do conteúdo completo dos subquadros 4 e 5, supondo 25 satélites” [Santos, 1990].

O conteúdo do subquadro 1, e dos subquadros 2 e 3, é detalhado a seguir, com o símbolo adotado, significado e unidade:

### Subquadro 1

SV-PRN	número do satélite (sem unidade)
WN	número da semana GPS (sem unidade)
URA	exatidão do satélite (sem unidade)
AODC	idade dos dados do relógio (segundos)
$t_o$	tempo de referência para os parâmetros do relógio (segundos)
$a_0, a_1, a_2$	coeficientes do polinômio para correção do relógio do satélite, representando, respectivamente, o estado, a marcha e a variação da marcha (s,s/s,s/s <sup>2</sup> )

### Subquadro 2 e 3 (efemérides transmitidas)

$M_o$	anomalia média no tempo de referência das efemérides (semi-círculo)
$e$	excentricidade (sem dimensão)
$\sqrt{a}$	raiz quadrada do semi-eixo maior (metros)
$\Omega_o$	ascensão reta do nodo ascendente no tempo de referência das efemérides (semi-círculo)
$i_o$	inclinação da órbita no tempo de referência das efemérides (semi-círculo)
$\omega$	argumento do perigeo
AODE	idade dos dados das efemérides (segundos)
$t_{oe}$	tempo de referência das efemérides (segundos)
$\Delta n$	correção do movimento médio (semi-círculo)
$C_{uc}, C_{us}$	amplitude dos termos harmônicos coseno e seno para correção do argumento da latitude (radianos)
$C_{ic}, C_{is}$	amplitude dos termos harmônicos coseno e seno para correção da inclinação da órbita (radianos)
$C_{rc}, C_{re}$	amplitude dos termos harmônicos coseno e seno para correção do raio vetor (metro)
$\dot{\Omega}$	variação temporal da ascensão reta (semi-círculo/segundo)
$\dot{i}$	variação temporal da inclinação (semi-círculo/segundo) (Santos, 1990).

Os seis primeiros parâmetros referentes aos subquadros 2 e 3 são chamados elementos Keplerianos. Definem o movimento orbital dos satélites quando sujeitos somente à parte central da atração gravitacional. Referem-se a uma dada época  $t_{OE}$ . A Figura 3.4 mostra os elementos Keplerianos, aparecendo na mesma a anomalia verdadeira ( $f$ ) em lugar da anomalia média ( $M$ ).

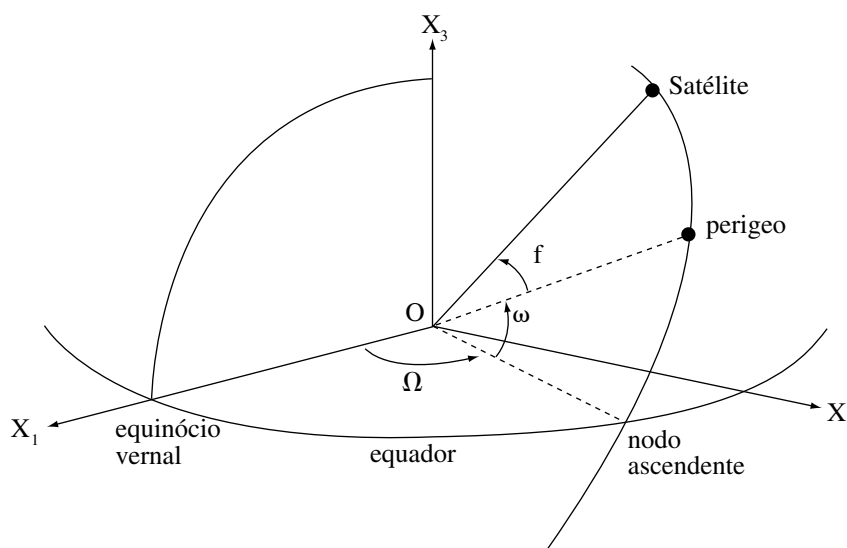


Figura 3.4 Elementos orbitais.

Os parâmetros restantes que aparecem neste subquadro (excluídos  $t_{OE}$  e AODE) descrevem as variações de determinados elementos da órbita dos satélites, como resultado da ação de forças perturbadoras que agem sobre eles, tais como: o campo gravitacional da Terra, a atração luni-solar, a pressão da radiação solar e o atrito com a atmosfera.

### 3.3 Sistema de Tempo GPS

O tempo GPS é um Sistema de Tempo Atômico, controlado por dois osciladores de césio e dois de rubídio a bordo dos satélites. Sua escala teve início às 0hs TUC, do dia 6 de janeiro de 1980 (meia noite do dia 5 para o dia 6). O tempo GPS não sofre a correção de segundo inteiro que periodicamente é aplicada ao TUC. Com isso, passou a existir uma diferença crescente entre eles a qual é informada pelos satélites no subquadro 4. Por exemplo, a partir de 01/01/1999 a diferença em questão passou a ser de 13 segundos (USNO), permanecendo até a seguinte correção ao TUC.

O tempo GPS é dado através do número da semana e do contador Z. O número de semanas GPS estava previsto para variar de 0 à 1.023, o que corresponderia a aproximadamente 20 anos. No dia 21 de agosto de 1999 à meia noite (0hs do dia 22) a contagem venceu e voltou a zero.

O tempo mantido pelos osciladores a bordo dos satélites sofre muito pouca oscilação em função da estabilidade daqueles osciladores. Entretanto, há também a dificuldade de

manter uma perfeita sincronização no tempo dos diferentes satélites, o que acarreta a necessidade de observar e prever o comportamento dos relógios. Isto é feito pelo Sistema de Controle. Este comportamento é modelado por um polinômio de 2º grau. Os coeficientes do polinômio estão contidos no subquadro 1 da mensagem transmitida pelo satélite. A correção do tempo do satélite para o tempo GPS é feita por:

$$t_{\text{GPS}} = t_s - \Delta t \quad (3.3)$$

sendo

$$\Delta t = a_0 + a_1(t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}}) + a_2(t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}})^2 \quad (3.4)$$

onde:

- $\Delta t$  representa a correção do relógio do satélite em relação ao tempo GPS;
- $t_{\text{GPS}}$  tempo do sistema GPS;
- $t_s$  tempo no satélite;
- $t_{\text{OC}}$  tempo de referência para os coeficientes  $a_0, a_1, a_2$ .

“No cálculo de (3.4),  $t_{\text{GPS}}$  pode ser substituído por  $t_s$  sem perda de precisão. No cálculo de  $t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}}$  deve-se atentar para o fato do tempo GPS ter extensão de uma semana. Assim, se  $t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}}$  for maior do que 302.400, subtrai-se 604.800 de  $t_{\text{GPS}}$ . Se  $t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}}$  for menor do que -302.400, soma-se 604.800 a  $t_{\text{GPS}}$ ” [Santos, 1990].

Diferenciando (3.4) obtém-se a deriva do relógio do satélite

$$\Delta t = a_1 + 2a_2(t_{\text{GPS}} - t_{\text{OC}}) \quad (3.5)$$

O parâmetro AODC (“Age of Data Clock”), idade dos dados do relógio, fornece o intervalo de tempo desde a última atualização da mensagem, possibilitando uma ponderação do relógio dentro de um algoritmo de ajustamento.



# IV Métodos e Modelos Matemáticos

A principal finalidade do sistema NAVSTAR/GPS é o de utilizar os sinais (códigos) recebidos do satélite para o posicionamento, ou seja, para obter as coordenadas do observador (antena do receptor) num determinado referencial. Alternativamente o sistema pode ser usado para determinar a velocidade (caso de um observador em movimento-veículo) ou obter informação precisa de tempo.

## 4.1 Observações do Código — Distância

No caso específico do posicionamento, a grandeza fundamental que teoricamente deriva das observações é a distância estação-satélite. Originalmente o sistema previa a obtenção desta distância através de um dos códigos P ou C/A. Para tanto, o receptor tendo o relógio perfeitamente sincronizado com o relógio do satélite, deve gerar uma réplica do sinal (código) transmitido pelo mesmo. O sinal gerado é deslocado (atrasado) no tempo e comparado com o sinal recebido até se obter uma correlação (alinhamento) máxima entre os mesmos. O intervalo de tempo necessário para atingir a correlação corresponde ao tempo de percurso do sinal transmitido entre o satélite e o receptor. O mesmo multiplicado pela velocidade da luz resulta na referida distância. Na prática, existem três fatores que afetam esta determinação. Primeiramente não é possível obter uma perfeita sincronização entre os relógios da estação e do satélite. Além disso, existem atrasos na propagação do sinal através da atmosfera. Por fim, há um erro de sincronização dos relógios nos diversos satélites. A relação entre a distância “observada”  $R$  e a distância real  $\rho$  é a seguinte:

$$R_i = \rho_i + c\Delta t_{A_i} + c(\Delta t_u - \Delta t_{s_i}) \quad (i = 1,2,3,4 \text{ satélites}) \quad (4.1)$$

sendo

$$\rho_i = [(X_{s_i} - X)^2 + (Y_{s_i} - Y)^2 + (Z_{s_i} - Z)^2]^{1/2} \quad (4.2)$$

a distância estação-satélite. (A grandeza observada  $R_i$  é com freqüência impropriamente denominada pseudo-distância).

Os dados transmitidos pelos satélites, como já foi descrito, permitem calcular as coordenadas cartesianas dos mesmos, bem como a correção do relógio  $\Delta t_s$ . O atraso  $\Delta t_A$  devido à atmosfera é calculado a partir dos modelos. Assim, as incógnitas são as coordenadas cartesianas da estação X, Y, Z e o erro de sincronização do relógio do receptor  $\Delta t_r$ . Elas podem ser determinadas a partir da observação de um mínimo de quatro satélites. As observações podem ser simultâneas ou seqüenciais; se o observador estiver em movimento há necessidade de que elas sejam simultâneas.

Esta aplicação básica do GPS pode utilizar o código P ou C/A. A escolha de um ou outro código tem características distintas. Devido à frequência mais alta, o código P fornece mais precisão na determinação da distância e em consequência das coordenadas. Por outro lado, o fato do código P ser transmitido nas duas frequências permite que se obtenha uma adequada correção para o efeito da refração na ionosfera. Existe, porém, uma dificuldade vinculada com a extensão deste código. É impossível a um receptor varrer rapidamente o comprimento de 7 dias do código de modo a identificá-lo. É necessário que o satélite transmita uma informação complementar que permita conhecer o intervalo específico do código transmitido num determinado instante. Isto é feito junto com o código C/A e é chamado código HOW. Deste modo, mesmo que se pretenda utilizar somente o código P, é sempre necessário discriminar inicialmente o código C/A. Este por sua vez, além da frequência mais baixa o que aumenta a indefinição do tempo de percurso satélite-estação, é transmitido somente numa portadora. Isto impede de corrigir adequadamente o retardo devido à refração ionosférica.

A intenção inicial do Departamento de Defesa (DoD) dos Estados Unidos foi restringir o código P para o uso civil codificando a informação HOW. A idéia evoluiu e o DoD decidiu encriptografar o código P sobrepondo ao mesmo uma nova modulação, o código Y. É o que se conhece por AS (Anti Spoofing). Isto faz com que o código P não possa ser utilizado nas aplicações civis em geral. Esta alternativa teve duas finalidades: primeiro, evitar que o código P seja usado; segundo, impedir que alguém, com intuito de perturbar o sistema, gere e transmita o código P de algum ponto na superfície da terra ou fora dela e que nada tenha a haver com a posição de um satélite. Isto resultaria numa posição espúria.

Baseado na disposição preliminar do DoD de limitar o uso do código P e considerando que o código C/A não atende às necessidades geodésicas, a comunidade científica estudou outras alternativas. Com a experiência do sistema Doppler e do VLBI não foi difícil imaginar uma técnica que fizesse uso da portadora.

## 4.2 Medidas da Fase

A alternativa de uso da portadora consiste em efetuar medidas de fase na frequência de batimento, no método conhecido por “fase de batimento da portadora”. Corresponde à diferença de fase entre o sinal de referência gerado pelo oscilador do receptor e o sinal por este recebido, transmitido pelo satélite, cuja expressão matemática é:

$$\varphi_j^i = \varphi^i(t) - \varphi_j(T) \quad (4.3)$$

onde  $\varphi_j^i$  é a fase da frequência de batimento da portadora obtida no  $j$ -ésimo receptor para o  $i$ -ésimo satélite,  $\varphi_j(T)$  é a fase do sinal gerado pelo  $j$ -ésimo receptor no instante 'T' em que o sinal transmitido pelo satélite chega ao receptor, e  $\varphi^i(t)$  é a fase do sinal recebido, transmitido pelo  $i$ -ésimo satélite no instante 't'.

Como a fase do sinal recebido  $\varphi^i(t)$  é idêntica à fase do sinal transmitido no instante da transmissão, este último pode ser modelado como:

$$t = T - \delta\tau \quad (4.4)$$

onde  $\delta\tau$  corresponde ao tempo de percurso do sinal entre o satélite e o receptor, sendo expresso por:

$$\delta\tau = (\rho_j^i / c) + (\delta A_j^i / c) \quad (4.5)$$

Na equação acima,  $\rho_j^i$  representa a distância entre as antenas do  $i$ -ésimo satélite e do  $j$ -ésimo receptor, e  $\delta A_j^i$  representa o efeito conjunto da refração ionosférica e troposférica ( $\delta A = -\Delta_{\text{ion}} + \Delta_{\text{trop}}$ ).

A partir da equação (4.4),  $\varphi^i(t)$  pode ser expresso por:

$$\varphi^i(t) = \varphi^i(T - \delta\tau) \quad (4.6)$$

Utilizando a linearização por Taylor, tem-se:

$$\varphi^i(t) = \varphi^i(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta\tau = \varphi^i(T) - f\delta\tau \quad (4.7)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.5) na (4.3), obtém-se uma nova expressão para  $\varphi_j^i$ :

$$\varphi_j^i = \varphi^i(T) - \varphi_j(T) - (f/c)\rho_j^i - (f/c)\delta A_j^i \quad (4.8)$$

A medida de fase  $\varphi_j^i$ , primeiro membro da equação acima, é feita de maneira contínua pelo receptor desde o instante inicial  $T_0$  da primeira medida  $\varphi_j^i(T_0)$ , sendo registrados valores em intervalos pré-fixados. Este monitoramento da fase é feito sem conhecer o número inteiro de ciclos entre o satélite e o receptor no referido instante. Visando dar um sentido geométrico à equação (4.8) deve ser adicionada a incógnita  $N_j^i$ , conhecida por ambigüidade, que representa o número inteiro de ciclos no instante inicial  $T_0$ :

$$\varphi_j^i = \varphi^i(T) - \varphi_j(T) - (f/c)\rho_j^i + N_j^i - (f/c)\delta A_j^i \quad (4.9)$$

A equação (4.9) é conhecida na literatura como modelo da "pura fase". A solução da mesma esbarra na dificuldade do número excessivo de incógnitas, composto das coordenadas cartesianas do receptor, das frações de ciclo no satélite  $\varphi^i(T)$  e no receptor  $\varphi_j(T)$  e na ambigüidade  $N_j^i$ .

É conveniente representar a (4.9) em unidades de comprimento o que se consegue multiplicando seus termos pelo comprimento de onda  $\lambda = c/f$ , obtendo-se:

$$\varphi = \rho + c(\Delta T - \Delta t) + \lambda N - \Delta_{\text{ion}} + \Delta_{\text{trop}} \quad (4.10)$$

onde  $\varphi = \lambda\varphi_j^i$  e os índices foram negligenciados. O sinal negativo do termo correspondente à refração ionosférica deve-se ao fato do sinal sofrer um retardo durante sua passagem por esta camada.

A equação (4.10) é comparável à equação de distância (4.10). A diferença fundamental entre as duas equações está na existência da incógnita  $N$ , razão pela qual se diz que a distância dada pela equação (4.10) é ambígua. A menos que alguma interrupção do sinal ocorra durante o rastreamento, a ambigüidade incógnita permanecerá invariável, isto é, existirá apenas uma ambigüidade para cada par receptor-satélite.

Os maiores desenvolvimentos na área do GPS nos últimos anos estão relacionados com as técnicas de resolução das ambigüidades. Inicialmente se constatou que uma boa geometria dos satélites facilitava a resolução, o que implica em efetuar observações por um período longo (horas). Mesmo assim, o sucesso do resultado é totalmente dependente da continuidade no monitoramento da fase, ou seja, na inexistência de eventuais perdas de ciclo ou perda da contagem dos ciclos inteiros durante o rastreamento.

Efeitos sistemáticos presentes nas observações exibem correlação entre sinais recebidos simultaneamente por diferentes receptores que observam os mesmos satélites, em diferentes instantes. O posicionamento relativo explora estas correlações, conseguindo um aumento da precisão, eliminando ou reduzindo efeitos sistemáticos e diminuindo o número de incógnitas.

A precisão possível com medidas de fase da portadora levou a comunidade geodésica ao desenvolvimento de modelos matemáticos baseados em combinações lineares de observações. Os modelos e combinações lineares são apresentados a seguir.

## 4.2.1 Diferença de pura fase com o tempo

O modelo da pura fase, representado pela equação (4.9), implica num número excessivo de incógnitas, somente contornável com um aumento grande das observações. Para sanar o problema, algumas alternativas são utilizadas. Uma primeira opção consiste em fazer a diferença da pura fase observada para um mesmo satélite em dois instantes distintos 1 e 2, resultando nas seguintes equações:

$$\varphi_j^i(T_1) = \varphi^i(T_1) - \varphi_j(T_1) - (f/c)\rho_j^i(T_1) + N_j^i(T_1) - (f/c)\delta A_j^i(T_1) \quad (4.11)$$

para o instante  $T_1$  e

$$\varphi_j^i(T_2) = \varphi^i(T_2) - \varphi_j(T_2) - (f/c)\rho_j^i(T_2) + N_j^i(T_2) - (f/c)\delta A_j^i(T_2) \quad (4.12)$$

para o instante  $T_2$ . A diferença da (4.12) para (4.11) resulta:

$$\varphi_j^i(T_{1,2}) = \varphi_j^i(T_2) - \varphi_j^i(T_1) = [\varphi^i(T_2) - \varphi^i(T_1)] - [\varphi_j(T_2) - \varphi_j(T_1)] - (f/c)[\rho_j^i(T_2) - \rho_j^i(T_1)] - (f/c)[\delta A_j^i(T_2) - \delta A_j^i(T_1)] \quad (4.13)$$



fazendo:

$$\begin{aligned}\varphi^i(T_{1,2}) &= \varphi^i(T_2) - \varphi^i(T_1) \\ \varphi_j(T_{1,2}) &= \varphi_j(T_1) - \varphi_j(T_2) \\ \rho_j^i(T_{1,2}) &= \rho_j^i(T_1) - \rho_j^i(T_2) \\ \delta A_j^i(T_{1,2}) &= \delta A_j^i(T_1) - \delta A_j^i(T_2)\end{aligned}$$

obtem-se:

$$\varphi_j^i(T_{1,2}) = \varphi_j^i(T_2) - \varphi_j^i(T_1) = \varphi^i(T_{1,2}) + \varphi_j(T_{1,2}) + (f/c)[\delta\rho_j^i(T_{1,2}) + \delta A_j^i(T_{1,2})] \quad (4.14)$$

supondo que não haja perda de sintonia entre os instantes 1 e 2. A característica da equação (4.14) é a isenção de qualquer ambigüidade. Um bom resultado é alcançado quando se estende as observações por várias horas, exigência esta relacionada com a lenta variação da distância receptor-satélite.

## 4.2.2 Simples diferença de fase

Aplicando a equação (4.9) a dois receptores A e B, sintonizados no mesmo satélite  $i$ , obtém-se (4.15)

$$\varphi_{AB}^i = \varphi_B^i - \varphi_A^i = \varphi_{AB}(T) + (f/c)\rho_{AB}^i + N_{AB}^i + (f/c)\delta A_{AB}^i \quad (4.15)$$

onde:  $N_{AB}^i = N_B^i - N_A^i$

$$\rho_{AB} = \rho_A^i - \rho_B^i$$

$$\varphi_{AB}(T) = \varphi_A(T) - \varphi_B(T) \quad (4.16)$$

$$\delta A_{AB}^i = \delta A_A^i - \delta A_B^i$$

O termo  $\varphi_{AB}(T)$  na equação (4.15) representa o efeito de não-alinhamento entre os osciladores dos receptores e  $N_{AB}^i$  a ambigüidade inteira inicial entre os receptores A e B. Na referida equação desaparece a fase no satélite por ser a mesma para as duas estações, uma vez que se trata do mesmo satélite no mesmo instante.

“O modelo expresso pela equação (4.15) indica a remoção dos efeitos dos erros associados com o relógio do satélite. Mas ainda percebe-se um número maior de incógnitas do que equações.

A simples diferença de fase ainda possibilita uma expressiva redução dos erros causados pela refração atmosférica, desde que a distância entre os receptores seja pequena em comparação com os 20.000 km de altitude dos satélites. Assume-se que, neste caso, como os sinais percorrem a camada atmosférica em regiões bem próximas, os efeitos causados pelas refrações ionosférica e troposférica sejam iguais, anulando-se” [Santos, 1990]. Estima-se como aceitável uma base máxima de 100 km.

A simples diferença de fase ainda possibilita uma redução nos erros causados pela incerteza dos parâmetros orbitais transmitidos.

### 4.2.3 Dupla diferença de fase

Aplicando a equação (4.15) a dois satélites  $i$  e  $k$ , obtém-se

$$\varphi_{AB}^{ik} = \varphi_{AB}^k - \varphi_{AB}^i = N_{AB}^{ik} + (f/c)\rho_{AB}^{ik} + (f/c)\delta A_{AB}^{ik} \quad (4.17)$$

onde  $N_{AB}^{ik} = N_{AB}^k - N_{AB}^i$

$$\rho_{AB}^{ik} = \rho_A^k - \rho_B^k - \rho_A^i + \rho_B^i \quad (4.18)$$

$$\delta A_{AB}^{ik} = \delta A_A^k - \delta A_B^k - \delta A_A^i + \delta A_B^i$$

Este modelo acarreta na remoção dos erros provenientes dos relógios do satélite e do receptor. O efeito da atmosfera é, na pior hipótese, minimizado bem como os parâmetros orbitais.

A posição de um dos receptores deverá ser conhecida.

### 4.2.4 Tripla diferença de fase

Este método resulta da aplicação da (4.17) a dois instantes  $T_1$  e  $T_2$ , implicando na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \varphi_{AB}^{ik}(T_{1,2}) &= \varphi_{AB}^{ik}(T_2) - \varphi_{AB}^{ik}(T_1) = \\ &= (f/c)[\rho_{AB}^{ik}(T_2) - \rho_{AB}^{ik}(T_1)] - (f/c)[\delta A_{AB}^{ik}(T_2) - \delta A_{AB}^{ik}(T_1)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde:  $\rho_{AB}^{ik}(T_2) = \rho_A^k(T_2) - \rho_B^k(T_2) - \rho_A^i(T_2) + \rho_B^i(T_2)$

$$\rho_{AB}^{ik}(T_1) = \rho_A^k(T_1) - \rho_B^k(T_1) - \rho_A^i(T_1) + \rho_B^i(T_1)$$

$$\delta A_{AB}^{ik}(T_2) = \delta A_A^k(T_2) - \delta A_B^k(T_2) - \delta A_A^i(T_2) + \delta A_B^i(T_2)$$

$$\delta A_{AB}^{ik}(T_1) = \delta A_A^k(T_1) - \delta A_B^k(T_1) - \delta A_A^i(T_1) + \delta A_B^i(T_1)$$

A grande vantagem do modelo é a eliminação das ambigüidades. Assim como na Dupla Diferença, as coordenadas de um ponto devem ser conhecidas na solução. A exemplo dos modelos anteriores, a Tripla Diferença de Fase possibilita uma expressiva redução dos efeitos da atmosfera e dos parâmetros orbitais.

Em resumo, as simultâneas diferenças contribuem de duas maneiras na solução: reduzindo o número de incógnitas e eliminando ou minimizando o efeito dos erros sistemáticos. Porém, criam uma dificuldade complementar, pois, aumentam as correlações.

### 4.3 Combinações Lineares das Observações

Combinações lineares entre observações de mesmo tipo podem ser formadas tanto entre as fases da portadora quanto dos códigos. Elas foram inicialmente usadas para eliminar o atraso da ionosfera; entretanto, mostraram-se úteis na solução da ambigüidade.

Uma combinação arbitrária das fases da portadora em  $L_1$  e  $L_2$  tem a forma:

$$\varphi_{nm}(t) = n\varphi_1(t) + m\varphi_2(t)$$

com  $n, m$  inteiros arbitrários. Existem infinitas combinações dependendo da escolha limitada de  $n$  e  $m$ . Entretanto as opções úteis devem satisfazer as seguintes condições:

- coeficientes inteiros para resultar em ambigüidades inteiras
- comprimento de onda razoavelmente longo para facilitar a fixação da ambigüidade
- baixa influência da ionosfera
- ruído limitado na observação

Duas combinações específicas são particularmente importantes: uma chamada banda larga em que  $n = 1$  e  $m = -1$ :

$$L_{BL} = L_1 - L_2 \qquad \lambda_{BL} = 86,2 \text{ cm} \qquad (4.20)$$

e a outra banda estreita com  $n = m = 1$

$$L_{BE} = L_1 + L_2 \qquad \lambda_{BE} = 10,7 \text{ cm} \qquad (4.21)$$

A vantagem da observação de banda larga, comparada com a observação original da  $L_1$ , é que a ambigüidade a ser fixada refere-se a um sinal com um comprimento de onda quatro vezes maior. A desvantagem é que o ruído também será amplificado. A observação de banda estreita tem o menor ruído, mas é difícil fixar a ambigüidade em razão do menor comprimento de onda do que o sinal original. É usada em pequenas distâncias.

A magnitude do efeito nas duas combinações citadas é a mesma, porém, de sinal oposto. A média aritmética da banda larga e da banda estreita resulta num sinal livre da ionosfera:

$$L_0 = \frac{L_{BL} + L_{BE}}{2} \qquad (4.22)$$

As ambigüidades das bandas larga e estreita são:

$$N_{BL} = N_1 - N_2 \quad (4.23a)$$

$$N_{BE} = N_1 + N_2 \quad (4.23b)$$

Há uma dependência entre elas. Quando uma delas é par a outra tem que ser par: da mesma forma, se uma for ímpar a outra será igualmente ímpar. É a conhecida “condição par-ímpar” cujo efeito é uma “reação em cadeia” no sentido de que, quando uma das ambigüidades é fixada as soluções indicam de maneira mais clara as demais ambigüidades.

## 4.4 Solução da Ambigüidade

Como foi mencionado, as medidas da fase são realizadas no receptor a partir de um dado instante  $T_0$ , passando-se a monitorar a variação da fase a partir do instante inicial. Porém, desconhece-se qual o número inteiro de ciclos que ocorreu na portadora entre o satélite e o receptor. É por isso que a contagem que se obtém em qualquer momento  $t_0 + \Delta t$  é um valor ambíguo. A “solução da ambigüidade”, expressão usada para indicar a determinação do número inteiro de ciclos entre o satélite e o receptor no instante  $t_0$ , é essencial quando se deseja obter a diferença de coordenadas entre as antenas dos receptores, supondo o uso do método diferencial característico das aplicações geodésicas do GPS, com precisão da ordem do centímetro. Saliente-se que haverá uma ambigüidade para cada satélite observado por um receptor.

O problema da ambigüidade tornou-se a maior dificuldade do GPS para a geodésia e muitas estratégias foram pesquisadas para uma solução confiável e rápida. As principais são:

- geométrica
- combinações das fases do código e da portadora
- procura da ambigüidade
- métodos combinados.

A alternativa da geometria se aproveita da variação da relação geométrica entre o satélite e o receptor com o tempo. Observando o satélite durante um período longo e mantendo uma contagem contínua durante o mesmo, a ambigüidade inicial não muda. Por outro lado, obtém-se uma diferença de coordenadas oriunda do efeito Doppler, tal como no sistema TRANSIT, permitindo a determinação das coordenadas do ponto. Com estas coordenadas pode-se calcular a distância estação-satélite e comparar com a distância observada ambígua (eivada da ambigüidade). Da comparação deriva-se diretamente a ambigüidade.

Esta técnica funciona bem se o período de observação for longo ( $\geq 2$  hs.), se o número de satélites for no mínimo quatro e se não houver interrupção da sintonia com os satélites. Se houver perda de um satélite e os restantes forem menos do que quatro é necessário introduzir uma nova ambigüidade de um novo satélite. Os valores da ambigüidade assim estimados são números fracionários. Eles poderão ser fixados como inteiros se forem muito próximos de um número inteiro, ou seja, se o erro relativo na direção saté-

lite-receptor for menor do que meio ciclo ( $<12$  cm). Este particular exige um tempo longo de observação. Uma determinação errônea da ambigüidade resulta em erros sistemáticos nas coordenadas.

A combinação das fases do código e da portador vale-se do caráter não ambigüo das medidas de fase sobre o código uma vez que sua estrutura é conhecida. Este método independe da geometria, mas exige um baixo nível de ruído nas medidas do código. Isto somente é possível com o código P. Em função das restrições ao mesmo esta alternativa geralmente é difícil de ser aplicada.

A “procura da ambigüidade” consiste em iniciar por um valor aproximado resultante, por exemplo, da solução fracionária e a partir daí restringir o vetor solução a valores inteiros aplicando técnicas de otimização. O problema básico é que o número de operações aritméticas aumenta drasticamente com o número de elementos das possíveis soluções. Este processo vem sendo aperfeiçoado e parece ser a alternativa mais promissora permitindo a fixação “instantânea” da ambigüidade, viabilizando as aplicações cinemáticas do GPS, particularmente aéreas. É a chamada solução da ambigüidade “em movimento” (“on the fly” ou “on the way”).

O método combinado utiliza de uma forma ou de outra diversas das técnicas anteriores e outras. A idéia básica é que uma ambigüidade fixada estabiliza a solução num passo seguinte.

É importante salientar que se houver uma base conhecida, iniciando as observações nos extremos da mesma, as ambigüidades podem ser fixadas com poucos minutos de observação.

## 4.5 Métodos Rápidos de Posicionamento

A partir da euforia inicial de resolver a ambigüidade em duas horas de observações e com isso obter uma posição com precisão centimétrica, nasceu a aspiração de diminuir a espera para poucos minutos de rastreamento ou até obter a posição instantânea sem perder a precisão. Daí surgiram os métodos rápidos de posicionamento cujo problema básico está ligado à resolução da ambigüidade. Vários autores ligaram os seus nomes às tentativas de diminuir o tempo de observação ou mesmo observar somente numa época fixando as ambigüidades. São eles: B. W. Rimondi, G. Wübenna, G. L. Mader, G. Beutler entre outros. A proliferação das idéias levou também a uma diversidade de denominações, tais como: cinemático, pseudo-cinemático, ‘stop and go’, pseudo-estático, rápido estático; nem sempre caracterizando uma técnica independente. Talvez o autor que primeiro conseguiu estabelecer uma lógica nos conceitos e sugerir uma nomenclatura coerente foi [Seeber, 1993]. Segundo o autor os métodos rápidos podem ser classificados em três tipos:

- Cinemático
- Pseudo-cinemático
- Rápido Estático

O método cinemático pressupõe que um veículo ou aeronave em movimento, a partir de um dado instante, inicie o rastreamento dos satélites disponíveis, resolva instantanea-

mente as ambigüidades e continue seu movimento, determinando a sua posição a intervalos pequenos de tempo (e.g. 1s). Esta alternativa pressupõe a aplicação de métodos rápidos de resolução das ambigüidades ('on the fly'). O método é aplicado em levantamentos marinhos de precisão, em aerofotogrametria, etc.

Há casos em que pode-se inicialmente resolver as ambigüidades através de um método estático qualquer e, a partir daí, deslocar uma das antenas ocupando os pontos que se fizerem necessários, sem perder a sintonia aos mesmos satélites. A permanência em cada ponto pode ser muito curta (1 min.). O método é conhecido como 'pseudo cinemático' e se presta a levantamentos locais de precisão como controle de uma estrutura de engenharia, por exemplo, uma barragem.

A idéia básica do método conhecido como 'rápido estático' é de permanecer por pouco tempo em cada ponto (5 – 10 min.) sem a preocupação de resolver preliminarmente as ambigüidades. Há duas alternativas normalmente usadas: primeiramente uma simples ocupação dos pontos. Os receptores podem ser desligados durante o trajeto e as ambigüidades precisam ser resolvidas em cada ponto com as observações disponíveis. O método funciona satisfatoriamente se a geometria for boa, o que implica em um número maior possível de satélites. A segunda alternativa utilizada é planejar o levantamento de tal modo que as estações sejam reocupadas depois de algo entorno de 1h. A idéia fundamental que justifica a estratégia é a ciência de que uma boa geometria se consegue, não necessariamente rastreando por uma hora, mas retornando ao ponto depois de uma hora. Assim, a antena é estacionada num ponto inicial por 5 min., deslocada para o ponto seguinte sem necessidade de manter a sintonia aos satélites, estacionado por outros 5 min. e assim sucessivamente até completar 1h.; volta-se então ao ponto inicial repetindo o procedimento. O arquivo é tratado como um conjunto único de observações (daí a conveniência em não desligar o receptor durante a operação) e a falta de sintonia durante o deslocamento de um ponto ao outro é considerada perda de ciclos, recebendo o tratamento normalmente empregado para esta deficiência do sistema GPS.

## 4.6 DGPS

O posicionamento geodésico usando observações da fase é feito no método relativo ou diferencial. As várias possibilidades de correlacionar diferentes estações, diferentes satélites e diferentes instantes conduz aos métodos descritos no parágrafo 4.2. Mas há uma técnica específica de posicionamento relativo com o uso do código C/A que vem sendo bastante utilizada e é conhecida por DGPS (Differential Global Positioning System). Além do AS, até 1º de maio de 2000 havia uma outra restrição no sistema GPS conhecida como SA (Selective Availability). Tratava-se de um erro proposital introduzido no tempo do satélite. A idéia do DGPS era eliminar os efeitos sistemáticos causados pelo SA e por outros fatores. O SA causava um erro de até 100 m na posição absoluta com o código C/A. Com a desativação daquela restrição o erro ficou reduzido para 25 m no máximo. Utilizando a técnica do DGPS o erro cai para 1-5 m. Para tanto, um receptor é colocado fixo num ponto com coordenadas previamente determinadas e assim são obtidas correções a serem aplicadas por um usuário (veículo). Podem ser deri-

vadas correções para a posição ou para a distância. No primeiro caso são comparadas as coordenadas conhecidas na estação fixa com aquelas obtidas do rastreamento dos satélites. As diferenças serão as correções a serem aplicadas ao usuário móvel. No segundo caso, são comparadas as distâncias aos satélites rastreados; são calculadas diferenças entre as distâncias obtidas a partir das coordenadas da estação e do satélite com as distâncias obtidas pelo rastreamento.

Neste caso, são corrigidas as distâncias aos satélites rastreados simultaneamente na estação fixa e na móvel. Esta última alternativa é mais recomendável pois as coordenadas nas duas estações, fixa e móvel, podem não resultar do rastreamento dos mesmos satélites. (Figura 4.1).

Uma possibilidade é armazenar os dados nos dois receptores para posterior processamento. Quando se exige a posição em tempo real do receptor móvel é necessário que a estação-base transmita via rádio as correções para que sejam recebidas e aplicadas. Este é o caso mais comum na navegação. Já existem iniciativas neste sentido inclusive com uma padronização das correções transmitidas numa taxa de 50 bps pela “Radio Technical Committee for Marine Services” (RTCM).

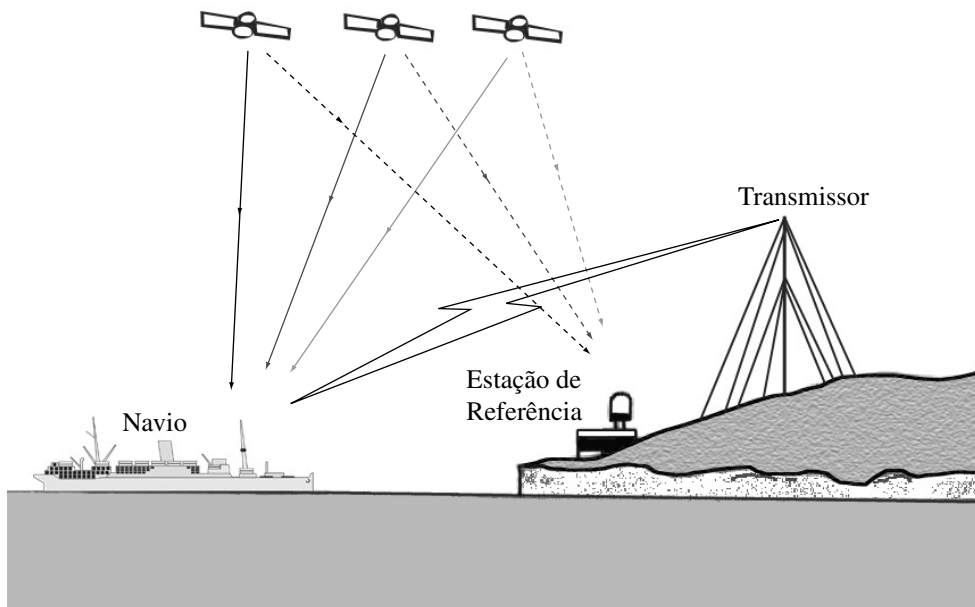


Figura 4.1 Aplicação do DGPS.

Além do AS, o DoD implementou, durante vários anos, uma outra restrição conhecida com Selective Availability (SA). Através da mesma era introduzido um erro proposital e conhecido, podendo ser nas efemérides e/ou no relógio do satélite. Durante a sua vigência a restrição ocorreu somente no relógio. A partir de 2 de maio de 2000, por decreto presidencial, o DoD dos Estados Unidos desativou o SA. A idéia do DGPS foi eliminar

os efeitos sistemáticos, em particular, aquele resultante do SA nas aplicações do GPS em navegação. Evidentemente que outros efeitos sistemáticos também são eliminados, desde que ocorram nas duas estações.

O erro típico na posição absoluta de um receptor que usa o código C/A é de  $\pm 30$  m. Com o SA ligado este erro aumentava para  $\pm 100$  m. Com a alternativa do DGPS o erro fica na ordem de 1 a 5 m no posicionamento do receptor móvel.

As possibilidades de aplicação são:

- a) navegação mais precisa em águas costeiras
- b) aproximação ao porto
- c) mapeamento do fundo oceânico
- d) hidrografia
- e) levantamentos sísmicos e gravimétricos
- f) posicionamento de sensores submersos na prospecção mineral no mar
- g) calibração de sistemas de retransmissão.

## 4.7 Posicionamento Preciso por Ponto

A expressão posicionamento preciso por ponto (PPP) significa a determinação de coordenadas com precisão de centímetros, ou mesmo milímetros, utilizando somente um receptor, portanto, posicionamento absoluto. Contrapõe-se ao uso de dois receptores através da dupla diferença de fase; este também oferece precisão centimétrica. Por outro lado, difere ainda da alternativa de uso do código, seja no modo absoluto como no relativo, cuja precisão é da ordem de metros. O posicionamento PPP se vale do conhecimento da órbita dos satélites com alta precisão e da perfeita sincronização entre os relógios dos satélites através de correções adequadas. Estes dois aspectos justificam a denominação preciso por tratar-se de produtos de alta qualidade no processamento. Por outro lado, a alta precisão exige o uso de receptores geodésicos com dupla frequência e a opção de medidas de fase de batimento da portadora.



# V O GPS e a Altimetria

**H**á uma expectativa de usar o sistema GPS para determinar a altitude ortométrica, evitando assim a onerosa operação do nivelamento geométrico. Ao nível de precisão que normalmente se requer a altimetria, isto não pode ser feito com o código C/A. Seria possível usar o código P e com certeza a fase de batimento da portadora.

Através das observações GPS no método diferencial, obtém-se as coordenadas cartesianas X, Y, Z de um ponto desconhecido em função das diferenças de coordenadas fornecidas pelo GPS e das coordenadas supostamente conhecidas do ponto de partida. A relação entre as coordenadas cartesianas e as geodésicas é:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos\varphi \cos\lambda & (5.1) \\ Y &= (N + h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ Z &= [N(1 - e^2) + h] \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

a partir das quais o terno geodésico  $(\varphi, \lambda, h)$  é obtido em função de  $(X, Y, Z)$ . A longitude é derivada diretamente enquanto a latitude e a altura geométrica são calculadas por um processo iterativo. A grandeza altimétrica que compõe o terno geodésico é a altura geométrica  $h$ . Esta se relaciona com a altitude ortométrica  $H$  de maneira aproximada, através da altura geoidal  $N$ :

$$h \cong N + H \quad (5.2)$$

A aproximação é devida ao fato das três grandezas não serem co-lineares. Assim, a determinação de  $H$  utilizando o GPS implica no conhecimento da altura geoidal.

Contribuem atualmente para a determinação das alturas geoidais os modelos do geopotencial, os levantamentos gravimétricos e as observações sobre os satélites artificiais quando conduzidas sobre o rede de nivelamento. No primeiro caso é obtida a componente de longo comprimento de onda da altura geoidal. No segundo, as anomalias da gravidade são utilizadas na integral modificada de Stokes para obter a componente de curto comprimento de onda da altura geoidal. Finalmente, observações aos satélites artificiais, seja com o antigo sistema TRANSIT ou atualmente com o GPS, sobre a rede de nivelamento, permitem o uso de (5.2) para determinar  $N$ , uma vez que  $H$  é conhecido do nivelamento.

A Fundação IBGE e a Universidade de São Paulo têm trabalhado ao longo dos últimos dez anos num projeto de melhoria da carta geoidal no Brasil. Neste sentido, um intenso programa de observações com o sistema TRANSIT foi conduzido sobre a rede de nivelamento de 1ª ordem resultando em um total de mais de 200 pontos. Este trabalho foi realizado na década de 70. No momento, a atenção está voltada para o GPS e já

se dispõe de mais de uma centena de alturas geoidais derivadas. Levantamentos gravimétricos também têm sido intensificados de modo a melhorar a cobertura, sobretudo em regiões vazias. Estes dados e o mais recente modelo do geopotencial, EGM96, permitiram obter uma versão recente da carta geoidal (Figura 5.1). O erro absoluto esperado desta carta é inferior a 2 m e o relativo de 2 cm/km (20 PPM).

Em muitas aplicações da cartografia e sobretudo da engenharia as precisões exigidas são bem superiores às da carta geoidal disponível. Daí a razão que justifica novos esforços para a melhoria da carta geoidal.

Por outro lado, o sistema GPS sempre trabalha no modo diferencial quando as precisões exigidas são altas. Se na estação de referência do GPS a altura geoidal for conhecida de alguma forma e a estação a determinar não estiver muito distante (poucas dezenas de quilômetros) o uso da diferença de altura geoidal entre os dois pontos pode oferecer uma maior confiança na determinação da altitude ortométrica com o sistema GPS. Assim, sejam os pontos 1 e 2 com as respectivas coordenadas geodésicas, altura geoidal e altitude ortométrica:

Ponto 1:  $\varphi_1, \lambda_1, h_1, N_1, H_1$

Ponto 2:  $\varphi_2, \lambda_2, h_2, N_2, H_2$

Considere-se a diferença de altitude geométrica entre os dois pontos:

$$h_2 - h_1 = dh \quad \text{ou} \quad H_2 + N_2 - H_1 - N_1 = dh$$

$$H_2 = H_1 - N_2 + N_1 + dh$$

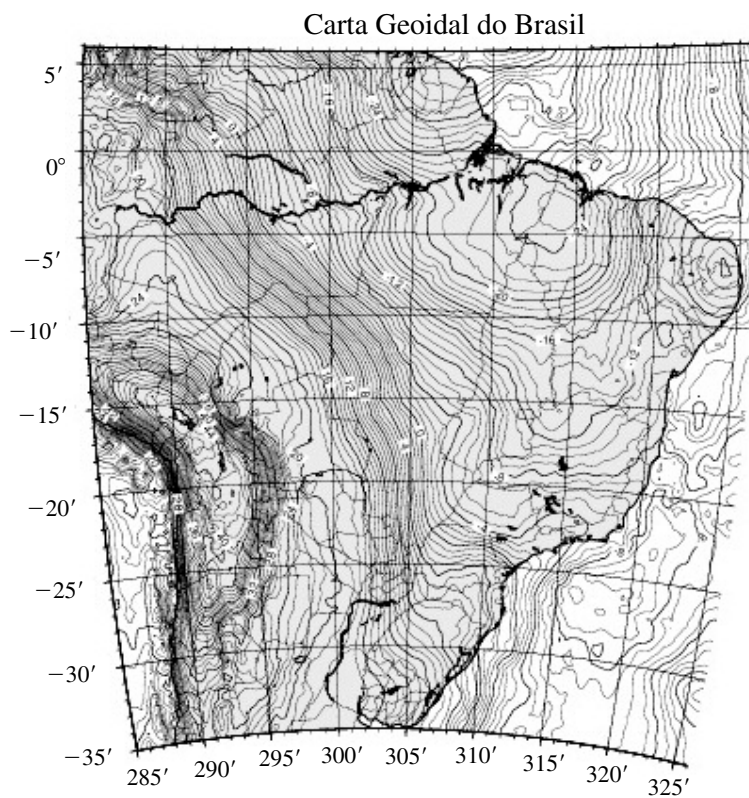
ainda:

$$H_2 = H_1 + (N_1 - N_2) + dh$$

Finalmente:

$$H_2 = H_1 + dN + dh$$

Admitindo que o ponto 1 seja inteiramente conhecido, obtém-se a altitude ortométrica de 2 em função da diferença de altura geoidal e da diferença de altitude geométrica entre os dois pontos. A vantagem é que a carta geoidal necessita de uma precisão relativa e não absoluta compatível com a exigência do levantamento, o que é sempre mais viável.



**Figura 5.1** Modelo geoidal do Brasil.



# VI O GPS e a Engenharia

O sistema GPS traz importantes benefícios e avanços para a engenharia. Em grandes obras civis o sistema facilita a implantação de apoio topográfico para a locação da obra, permite levantar planimetricamente uma obra existente, contribui no monitoramento e no controle de grandes estruturas e finalmente auxilia no cadastro e no controle de entidades as mais diversas. O transporte aéreo, marítimo e terrestre receberam igualmente um benefício surpreendente com a facilidade de posicionamento do sistema GPS. O resultado é a melhoria do planejamento e da logística no transporte e na entrega de mercadorias.

## 6.1 Apoio Topográfico

Os trabalhos de apoio conduzidos através dos processos topográficos, hoje valendo-se de estações totais eletrônicas, exigem o conhecimento de um ponto de partida com coordenadas conhecidas e de uma direção com um azimute estabelecido. Esta tarefa ficou tremendamente facilitada com o sistema GPS. Utilizando receptores geodésicos de uma ou duas frequências as coordenadas podem ser transportadas em distâncias de centenas ou até milhares de quilômetros com precisão de poucos centímetros em um intervalo de 2 hs. ou até menos. Desta forma, é fácil implantar dois pontos de apoio numa área de interesse transportando as coordenadas desde uma estação pertencente a uma rede qualquer de referência. Isto satisfaz a exigência da topografia em relação às coordenadas e ao azimute. A condição fundamental para a perfeita operação do GPS é um horizonte razoavelmente desobstruído relativo à antena do receptor. Com isso, o próprio levantamento topográfico na área de interesse fica restrito aos pontos que apresentem deficiência de visibilidade aos satélites devido a obstáculos como: vegetação, edificação, etc. O levantamento total de uma obra já existente também se vale da combinação do sistema GPS com os métodos topográficos. Neste caso o GPS supre igualmente a tarefa para todos os pontos com uma visibilidade favorável.

O monitoramento de grandes estruturas é fundamental para a segurança. Diversos controles são necessários, entre eles a deformação e o deslocamento. O controle do deslocamento implica em utilizar como referência um ponto com uma estabilidade confiável de modo que uma possível variação nas coordenadas ou na distância em relação à referência possa realmente ser atribuída a um deslocamento da estrutura. Quando o ponto de referência está próximo à estrutura e, portanto, na área de influência da mesma, ele pode estar sofrendo algum tipo de deslocamento simultâneo com a estrutura. O GPS traz um grande aporte para este problema permitindo observações desde um ponto remoto com uma estabilidade recomendável.

Em diversos processos na área operacional faz-se necessário proceder a um cadastro de entidades que, ou precisam ser periodicamente monitoradas ou entram na avaliação para implementação de mudanças, atualizações ou mesmo implantação de novas tecnologias. Exemplos práticos são as torres ou postes de transmissão de energia, estações de retransmissão de sinais de micro-ondas (telefonia), residências para implementação de novas tecnologias (TV a cabo), etc. A obtenção de coordenadas nestes entes para eventual implementação um sistema de informação geográfica (SIG) é possível e rápida com um receptor GPS. Igualmente a precisão exigida irá apontar a técnica recomendável e o equipamento adequado.

## 6.2 O GPS no Transporte

O sistema GPS foi desenvolvido com um objetivo básico: atender à navegação aérea. Com isso ele realiza basicamente todo o tipo de posicionamento de veículos em movimento. A precisão exigida varia em função do objetivo do posicionamento do ente em movimento. O uso simples do código C/A fornece um erro máximo de  $\pm 30$  m. Isto é suficiente para posicionar uma aeronave em rota ou um navio em um cruzeiro em alto mar. Mas há inúmeros casos que um erro de 30 m pode não ser desejável. Por exemplo, uma aeronave no procedimento de aproximação para pouso, uma navegação costeira mais cuidadosa, um levantamento marinho para fins de pesquisa e estudo, etc. Neste caso o DGPS constitui uma alternativa promissora.

O sistema GPS vem se constituindo numa componente importante do transporte rodoviário de cargas. Um veículo de carga equipado com um receptor GPS e um sistema de transmissão pode ter seu movimento monitorado por uma central de controle. Esta facilidade tem reflexo no planejamento do transporte, no monitoramento das condições de operação do veículo e na segurança da operação. Nas aplicações mais gerais o receptor GPS pode operar simplesmente com o código C/A. A transmissão das informações, do veículo para uma central de controle, pode ser via um "link" de rádio ou utilizando um satélite de comunicação. No primeiro caso, fica-se restrito à área ou corredor atendido pelo "link". O satélite viabiliza transmissões em longas distâncias, possibilitando operações de caráter nacional e até continental.

Os sistemas de monitoramento de carga, numa versão mais simples, contemplam a transmissão da posição do veículo para uma central de controle, sem nenhuma interferência do motorista, que mantém uma conveniente vigilância sobre o seu deslocamento. Um passo mais avançado é dado quando o veículo dispõe de uma unidade de controle com algumas teclas que, quando acionadas, dão conhecimento à central de simples mensagens pré-formatadas, tais como: emergência, acidente, tráfego interrompido, etc. A central pode, eventualmente, transmitir mensagens mais completas para o motorista que as lê na unidade do veículo. Uma interação maior entre o motorista e o veículo é conseguida se a unidade de controle do veículo for mais completa e permitir que o motorista digite informações e as transmita para a central, assim como, receba respostas da central. A sofisticação do sistema como um todo pode aumentar se o mesmo contemplar a colocação de sensores no veículo, tais como: temperatura e rotação do motor, velocidade do veículo, consumo de combustível, abertura do compartimento de carga, etc. Estas informações, sendo transmitidas para a central com uma frequência desejável, resultam numa maior assistência e monitoramento. A abertura do compartimento de carga pode inclusive ter a opção de ser acionada somente pela central de controle.

# VII Considerações Finais

A restrição ao código P, acenado desde o início pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos determinou uma busca de novas alternativas de uso do GPS para o posicionamento de alta precisão. Com isso nasceu a técnica de uso da portadora com medidas da fase, descritas no Capítulo IV.

A portadora pode ser obtida de duas maneiras distintas. A primeira, mais lógica e direta, consiste em subtrair os códigos (e evidentemente as mensagens). Como os dois códigos são modulados em fases distintas, a tarefa pode ser conseguida com o código P ou C/A independentemente. Porém, mantida a restrição ao primeiro, resta somente a alternativa do segundo. Neste caso fica-se restrito somente a uma frequência, aquela em que o código C/A é modulado, com a conseqüente impossibilidade de corrigir o efeito da refração ionosférica. A segunda alternativa é quadrar o sinal recebido. Neste caso elimina-se tanto um como outro código, tendo em vista que eles assumem sempre os valores +1 ou -1, podendo-se dispor das duas frequências. Porém a conseqüência é que haverá um aumento no ruído com uma perda na qualidade do sinal a ser utilizado nas observações. Não obstante este fato, em anos passados os fabricantes colocaram à disposição receptores que utilizavam a referida técnica.

Hoje, porém, existe uma nova geração de receptores que usam uma tecnologia especial de recuperação do código P a partir do Y. Como este tem uma frequência muito baixa (50 bps) o fato é aproveitado para reconstituir o código P através de um processo de correlação.

O posicionamento por satélite genericamente pode ser feito de modo absoluto ou relativo. No primeiro caso, são determinadas as coordenadas de um ponto (receptor) de maneira independente. Isto é conseguido instantaneamente pelo GPS usando um dos códigos. No segundo caso, são determinadas as diferenças de coordenadas entre dois pontos. Isto exige que as observações sejam simultâneas e neste caso pode-se usar o código ou a fase.

O uso do GPS que sempre ofereceu uma alta precisão é a fase de batimento da portadora no método relativo. Atualmente o PPP vem ganhando uma grande ênfase.





# Referências

ANDRADE, J. B. (1988) NAVSTAR-GPS. *Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas*. UFPr. Curitiba.

ARIAS, E. F.; CHARLOT P.; FEISSEL M. e LESTRADE J.F. (1995) — **The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS**. *Astronomy and Astrophysics*, 303, pp. 604-608.

BLITZKOW D. e SÁ N. C. (1985) — NAVSTAR/GPS — A situação presente e as perspectivas futuras. *XII Congresso Brasileiro de Cartografia*. Brasília.

BLITZKOW D.; CINTRA J. P. e FORTES L. P. S. (1991) — A contribution to the geoid determination. *XX Assembléia Geral da UGGI*, Viena.

*First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System*, vols. I e II. U.S. Department of Commerce, NOAA. Maryland, April 15-19, 1985.

Global Positioning System (1980) — **Papers published in Navigation**. The Institute of Navigation, vols. I e II. Washington.

GROTEN E. and STRAUSS R. (1988) GPS — **Techniques applied to Geodesy and Surveying**. Springer-Verlag.

MA C. & FEISSEL M. (1997). **Definition and Realization of the International Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects**. IERS Technical Note 23. Observatoire de Paris. Central Bureau of IERS. Paris.

McCARTHY D. D. (1992). **IERS Technical note 13**. Observatoire de Paris. Central Bureau of IERS. Paris.

SANTOS M.C. (1990) NAVSTAR/GPS: **Aspectos teóricos e aplicações geofísicas**. Dissertação de Mestrado. Observatório Nacional — CNPq. Rio de Janeiro.

SEEBER G. (1993). **Satellite Geodesy — Foundations, methods and applications**. Walter de Gruyter. Berlin.

WELLS D. (1986) — **Guide to GPS Positioning**. **Canadian GPS Associates**. University of New Brunswick. Fredericton.

