Teoria do Consumidor

Cap. 1 Advanced Microecnomic Theory (Jehle, Reny)

Noções Primárias

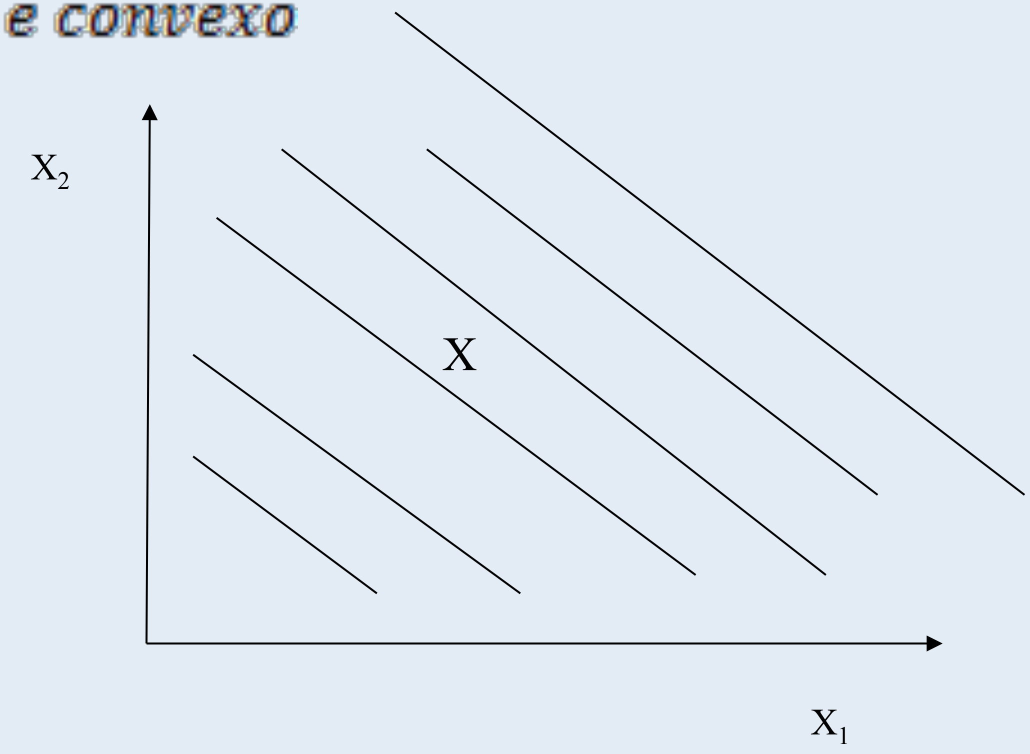
- Hipóteses para atender conceitos matemáticas esperados. Justificado pelo rigor usual em outras áreas do conhecimento.
- Modelo do consumidor possui 4 blocos: i) conjunto consumo; ii) conjunto factível; iii) relação de preferências; iv) hipóteses comportamentais.

Hipótese 1: Propriedades do Conjunto Consumo, X

$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}_+^n$

$X \text{ é } fechado\ e\ convexo$

$\mathbf{0} \in X$

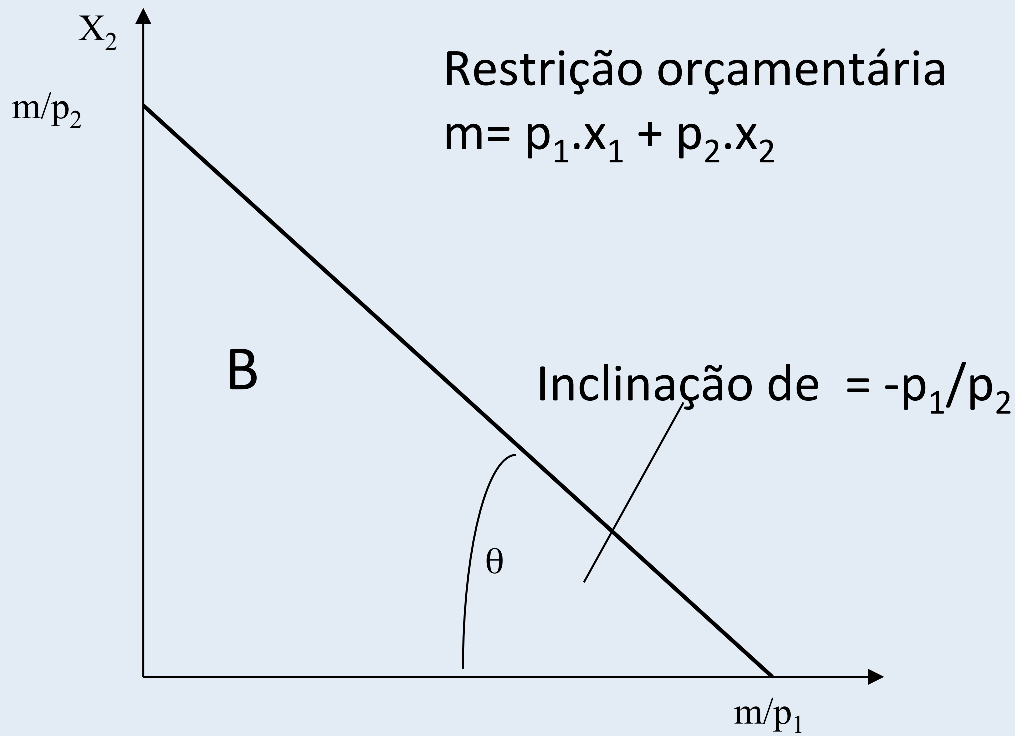


Cestas de consumos descritas por pares ordenados ou n-uplas, com diferentes quantidades consumidas.

Conjunto Factível

- Alternativas de consumo afordable (passíveis de serem compradas) pelo o consumidor.

$B \subset X$



Relações de Preferências

A relação de preferência especifica os limites, se existentes, da habilidade do consumidor em perceber as decisões de escolha envolvidas, sua consistência ou inconsistência e informação sobre gostos dos consumidores sobre diferentes bens.

Função Utilidade representa as relações de preferências

- Uma função valor-real $u: \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função utilidade representando as relações de preferência $\succsim$, se para todo $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+, u(\boldsymbol{x}^0) \geq u(\boldsymbol{x}^1) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^0 \succsim \boldsymbol{x}^1$
- Esta função utilidade representa as relações de preferência do consumidor se relaciona números maiores com cestas preferidas.
- Para garantir a existência de uma função utilidade que descreva as relações de preferências três axiomas são necessários: completitude, transitividade e continuidade.

Axiomas

1: completitude. Para toda cesta x^1 e x^2 em X, ou $x^1 \succsim x^2$ ou $x^1 \succsim x^2$.

2: transitividade. Para qualquer três cestas x^1, x^2 e x^3 em X se $x^1 \succsim x^2$ e $x^2 \succsim x^3$ então $x^1 \succsim x^3$.

3: continuidade. Para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, o conjunto de cestas pelo menos tão boas quanto , $\succsim x$, e o conjunto não melhor $\precsim x$, é fechado em $\mathbb{R}^n_+$.

4: Monotonicidade estrita. Para toda cesta $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+$
Se $x^0 \geq x^1$ então $x^0 \succsim x^1$, enquanto $x^0 \gg x^1$ então $x^0 \succ x^1$

Axiomas

5: Convexidade. Se $x^1 \succcurlyeq x^0$, então
$tx^1 + (1 - t)x^0 \succcurlyeq x^0$ para todo t $\in$[0,1]

5’: Convexidade estrita. Se $x^1 \neq x^0$ e $x^1 \succcurlyeq x^0$,
$tx^1 + (1 - t)x^0 \succ x^0$ para todo t $\in$[0,1]

Reflete a preferência por variedade à especialização.

Existência de uma função valor real representando as relações de preferência

Teorema 1: Se uma relação binária $\succsim$ é completa, transitiva, contínua e estritamente monotônica existe uma função valor-real $u: \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, que representa $\succsim$.

Sob certas condições, existe pelo menos uma função valor representando as preferências.

Esta representação de utilidade, entretanto, não é única. Se *u* representa uma função preferência de um consumidor então $v=u+5$ e $v=u^2$ também representam.

A função utilidade é invariante a transformações monotônicas. Pois, se o que é necessário da relação de preferências é a sua ordenação de cestas tenha um significado, qualquer função utilidade que represente tal ordenação é adequada.

A função Utilidade

A função utilidade é um dispositivo para resumir as informações contidas nas relações de preferências dos consumidores.

A relação de preferência é a caracterização primitiva e mais fundamental das preferências.

Teorema 1.2: Invariância na função utilidade a Transformações monotônicas positivas

Seja $\succsim$ uma relação de preferência em $\mathbb{R}^n_+$ e suponha que *u(x)* também represente uma $\succsim$

Então *v(x)* também representa $\succsim$ se e somente se *v(x)= f(u(x))* para todo x onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente no conjunto de valores considerados por u.

Existe equivalência entre os axiomas sobre gostos (tastes) e propriedades matemáticas.

Teorema 1.3: Propriedades das Preferências e Funções Utilidades

Seja $\succsim$ representada por $u: \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$, então:

1. *u(x)* é estritamente crescente se e somente se $\succsim$ é estritamente monotônica.

2. *u(x)* é quase côncava se e somente se $\succsim$ é convexa.

3. *u(x)* é estritamente quase côncava se e somente se $\succsim$ é estritamente convexa.

Diferenciabilidade

Continuidade: requer que as preferências não apresentem mudanças de padrão repentinos. Não elimina pontas (kinks) e outros tipos de continuidade mas que refletem mudança de comportamento brusco (impolite behavior).

Diferenciabilidade da função utilidade exige maiores restrições que a continuidade. Elimina os comportamentos acima e garante que as curvas de indiferença sejam suaves (smooth).

Sendo *u(x)* diferenciável: tem-se

$\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ é a **utilidade marginal** do bem *i*

Para o caso de dois bens, x_1 e x_2,

Taxa marginal de substituição

$$MRS_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial u(\mathbf{x}) / \partial x_i}{\partial u(\mathbf{x}) / \partial x_j}$$

Quando a utilidade marginal é estritamente positiva mostra quanto do bem x_i pode ser substituído pelo bem x_j sem alterar a utilidade do consumidor.

Exemplo: Função Utilidade

$U(x1,x2)=x1.x2$, então

$U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4;$

Isto é, $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$

Defina a Transformação Monotônica $V = U^2$

Then $V(x_1,x_2) = x_1^2 x_2^2$ e

$V(2,3) = 36 > V(4,1) = V(2,2) = 16$

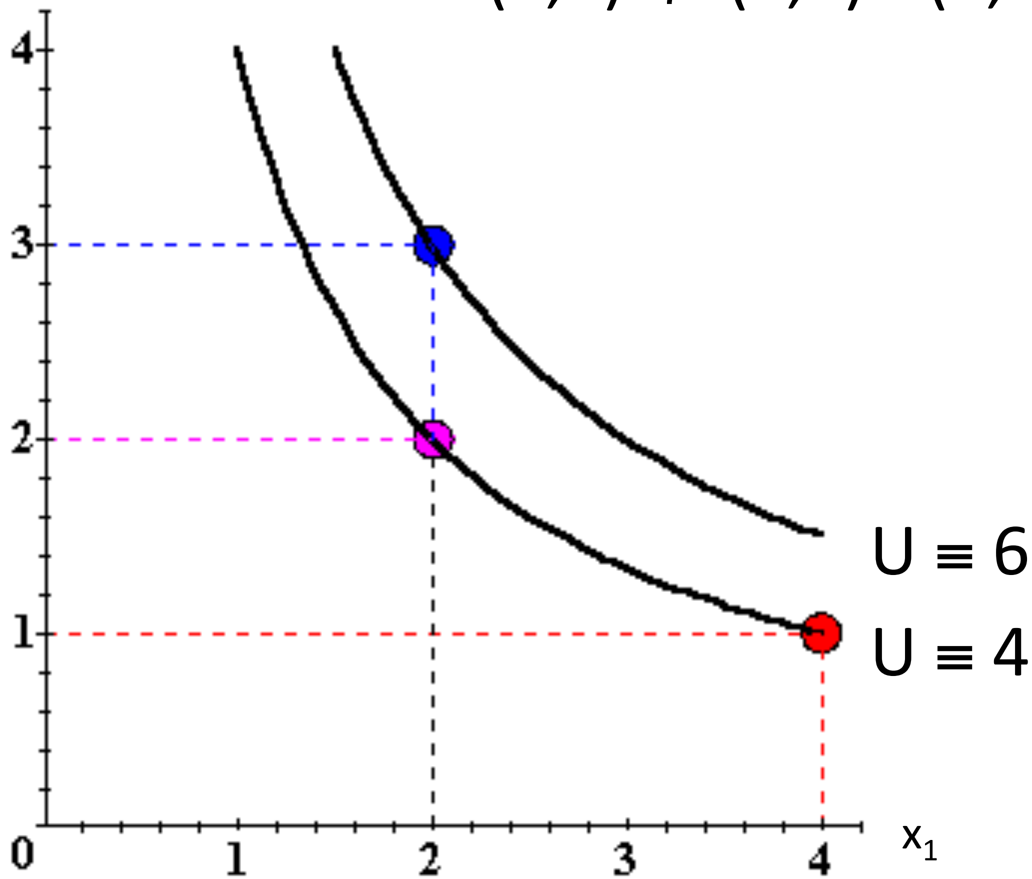
então, novamente

$(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$

V preserva a mesma ordenação de *U*, representando assim as mesmas preferências.

Função Utilidade e Curvas de Indiferenças

$(2,3) \succ (2,2) \sim (4,1)$

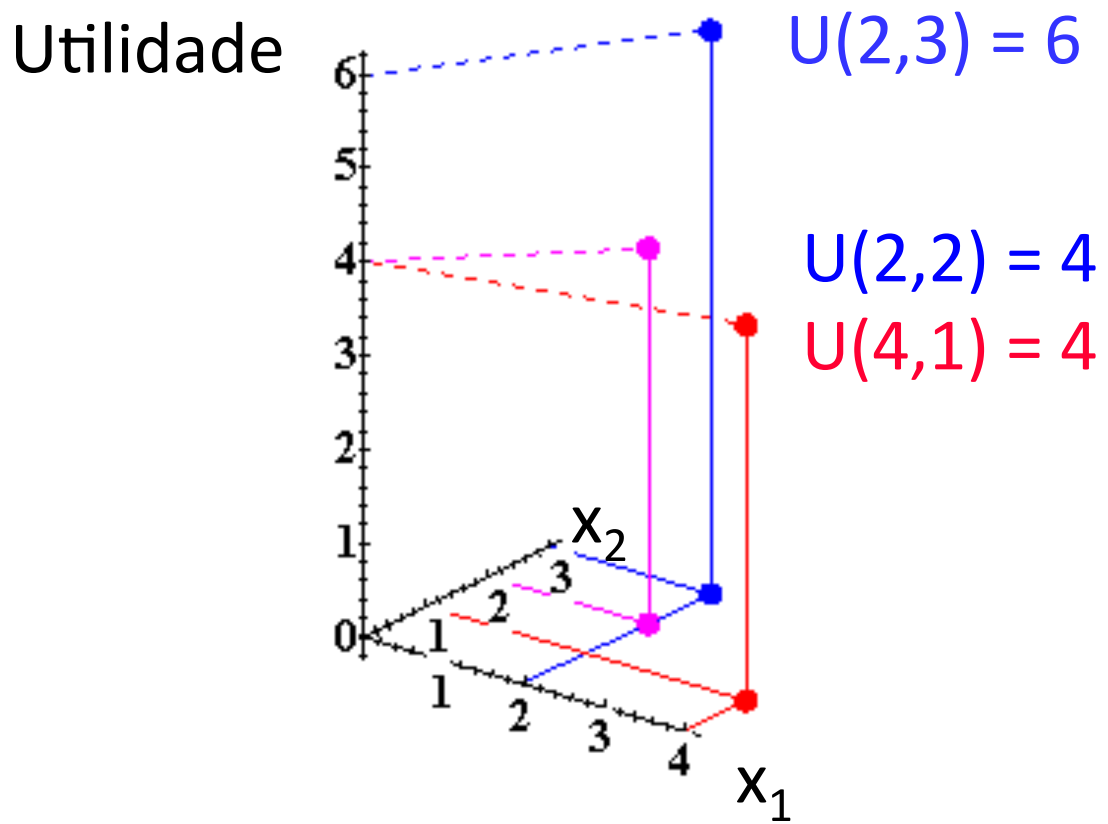


Função Utilidade e Curvas de Indiferenças

- Outro modo de visualizar a mesma informação é plotar o nível de utilidade num eixo vertical.

Função Utilidade e Curvas de Indiferenças

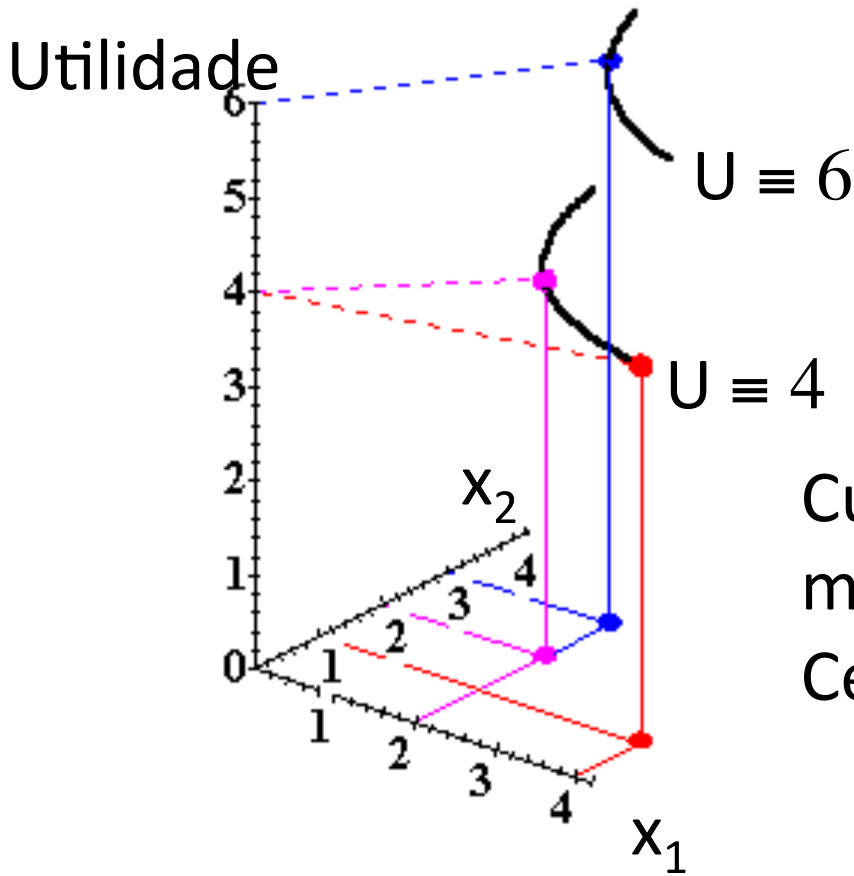
3D plot of consumption e utility levels for 3 bundles



Função Utilidade e Curvas de Indiferenças

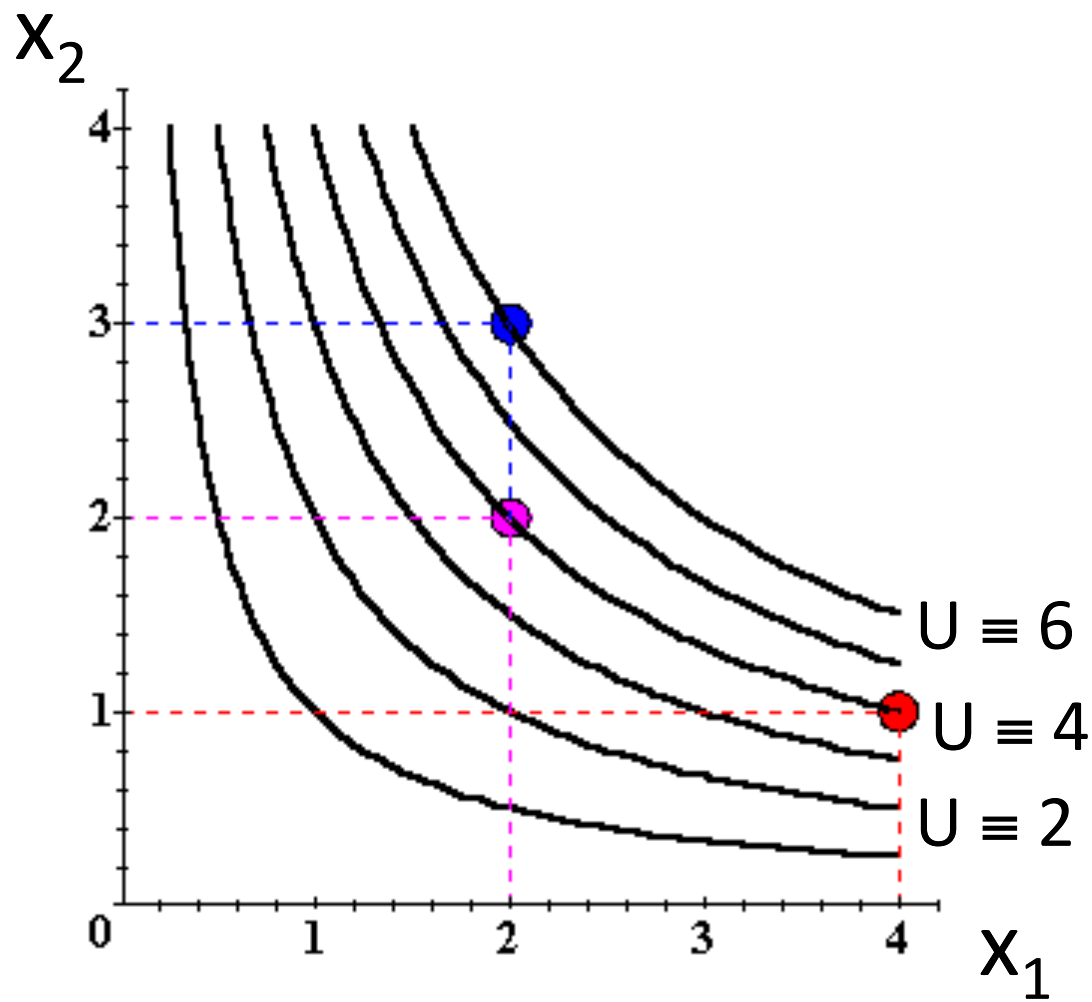
Esta visualização 3D das preferênias pode ser mais informativa adicionando duas curvas de indiferença.

Função Utilidade e Curvas de Indiferenças

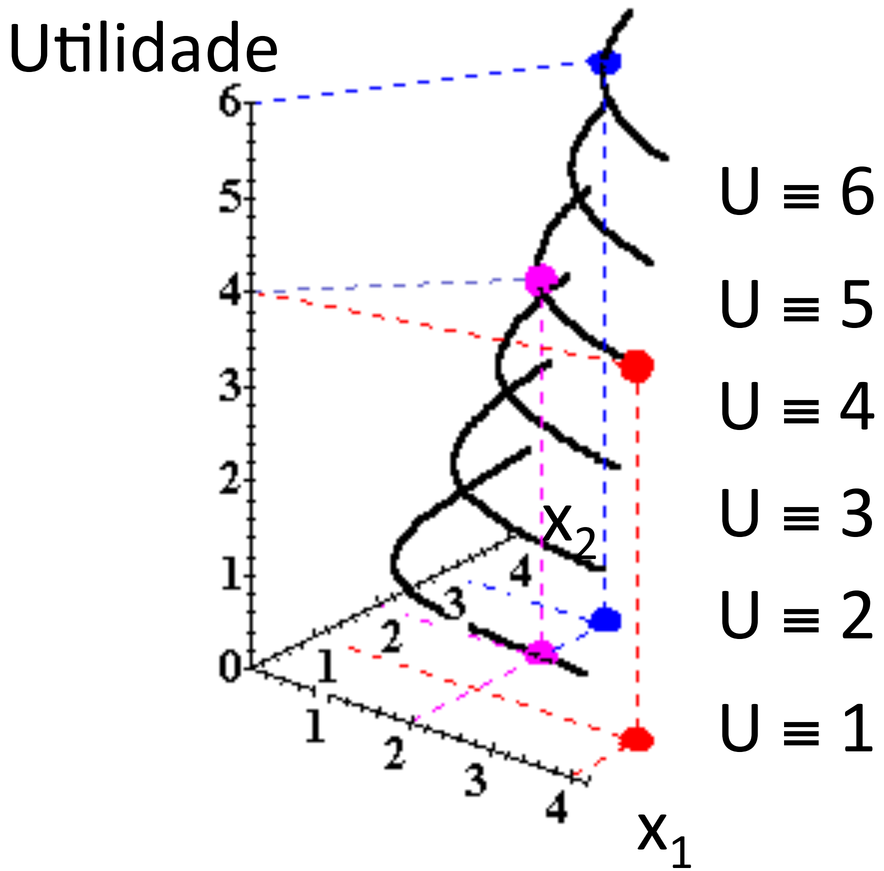


Curvas de indiferenças mais altas contêm Cestas mais preferidas.

Função Utilidade e Curvas de Indiferenças- O mapa de preferências



Função Utilidade e Curvas de Indiferenças



Exemplo de Função Utilidade e suas curvas de indiferença

- Qualquer função utilidade com a forma

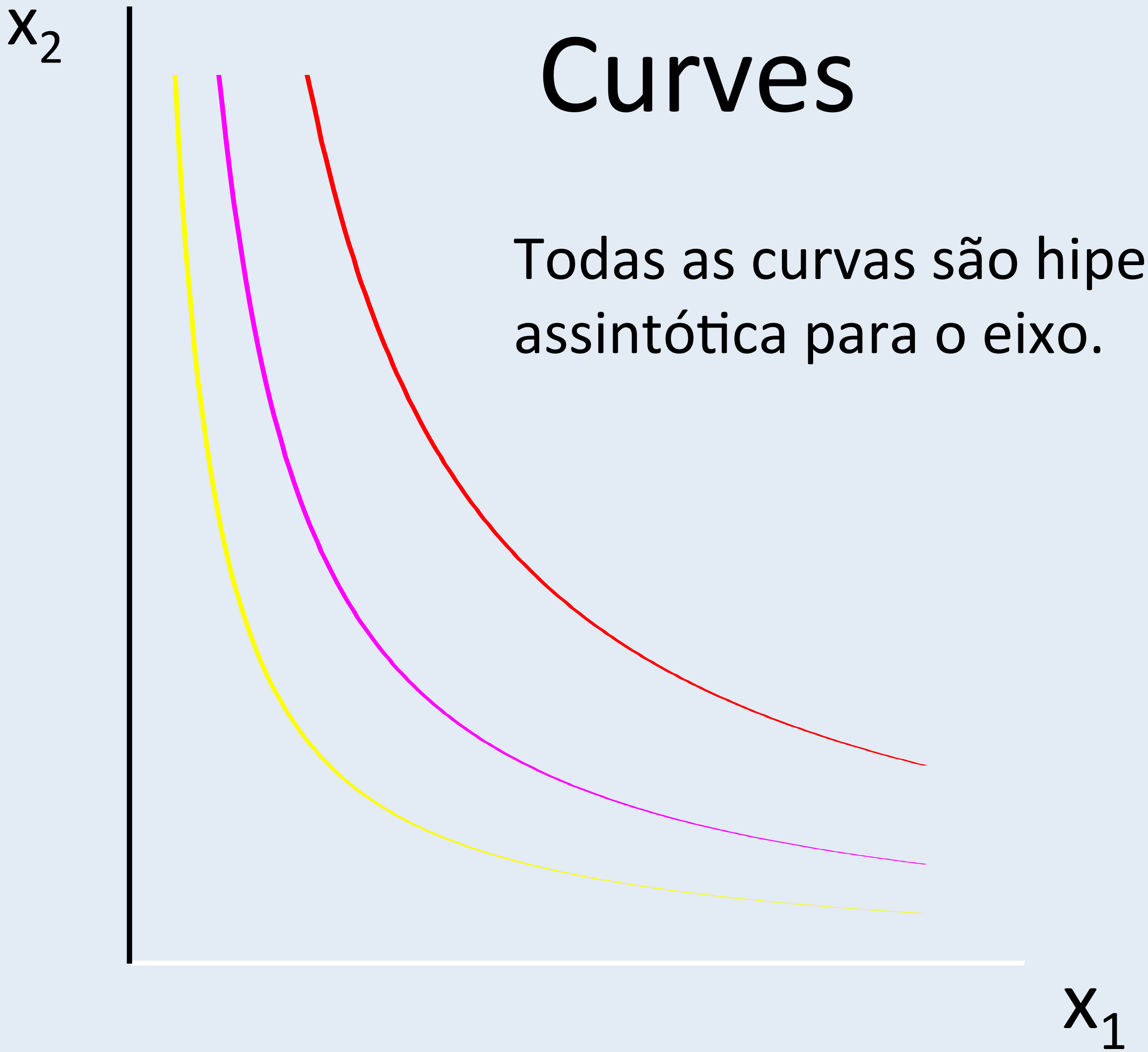
  $$U(x_1,x_2) = x_1^{a}\, x_2^{b}$$

  com $a > 0$ e $b > 0$ é chamada função utilidade **Cobb-Douglas**.

- *E.g.* $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2}\, x_2^{1/2}$ $(a = b = 1/2)$

  $V(x_1,x_2) = x_1\, x_2^{3}$ $(a = 1, b = 3)$

Cobb-Douglas Indifference Curves



Todas as curvas são hiperbólicas, assintótica para o eixo.

Utilidade Marginal exemplo Cobb-Douglas

A utilidade marginal de um bem i é a taxa de variação da utilidade total quando muda a quantidade consumida do bem i; *i.e.*

$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^2$

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$$\boxed{MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^2}$$

$$\boxed{MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 2x_1^{1/2} x_2}$$

Utilidade Marginal e Taxa Marginal de Substituição

A equação geral para uma curva de indiferença é $U(x_1,x_2) \equiv k$, uma constante.
Differenciando totalmente a função tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Rearranjando:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Utilidade Marginal e Taxa Marginal de Substituição
Um exemplo

- Suppose $U(x_1,x_2) = x_1x_2$, then

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = (1)(x_2) = x_2$$

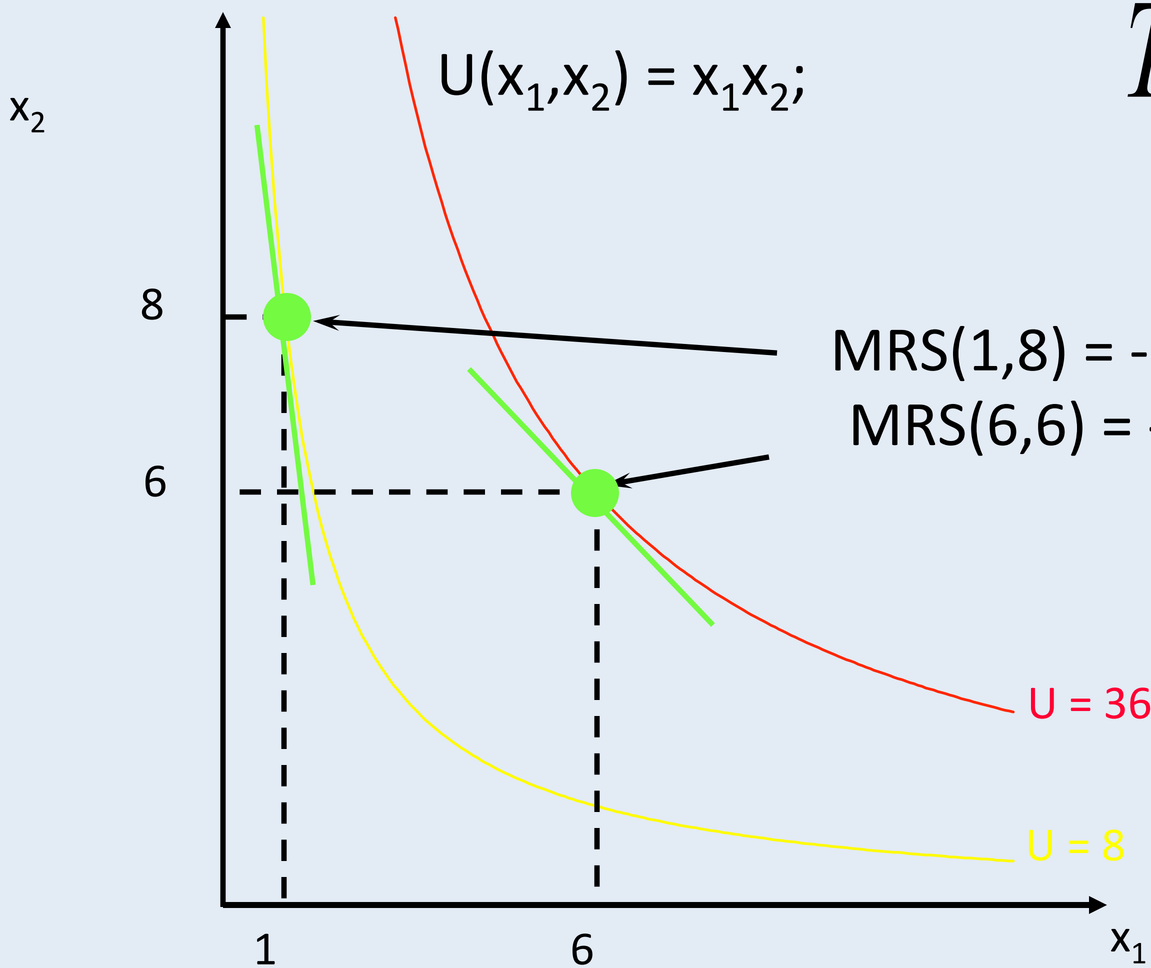
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = (x_1)(1) = x_1$$

so

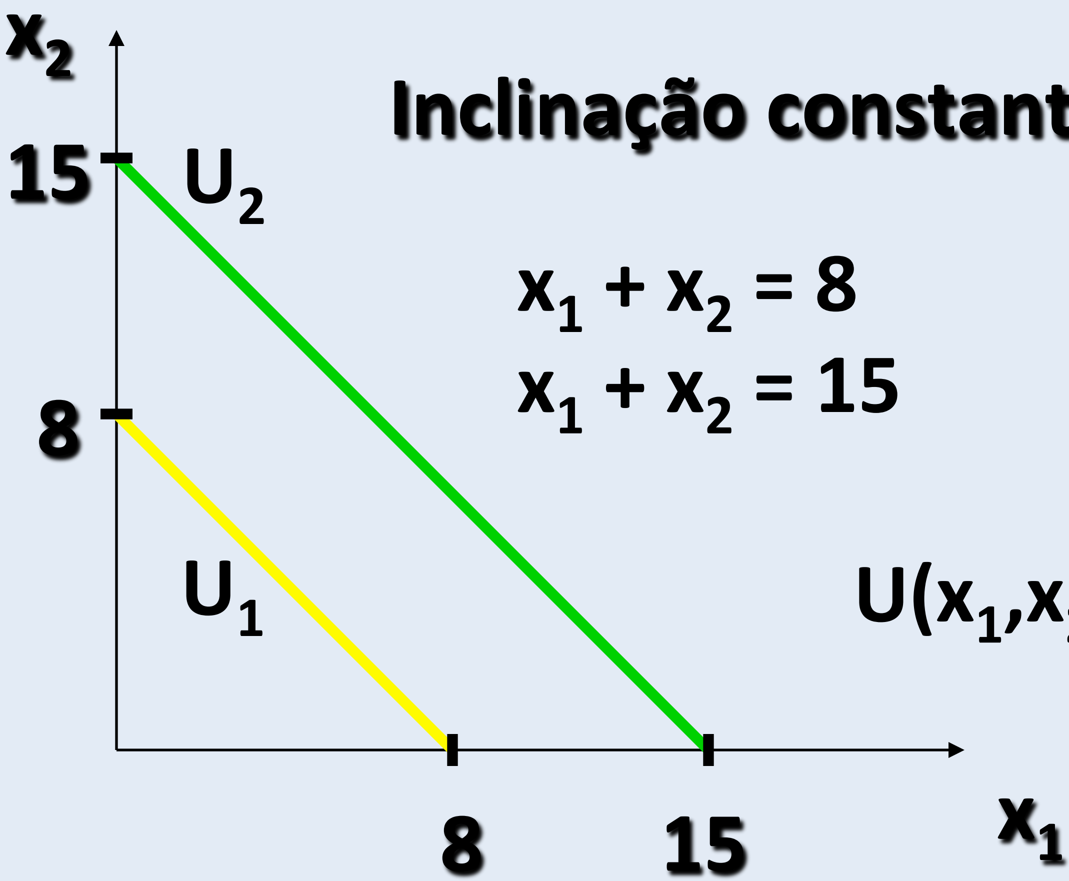
$$TMS = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial\ U/\partial\ x_1}{\partial\ U/\partial\ x_2} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

Utilidade Marginal e Taxa Marginal de Substituição
Um exemplo

$$TMS = -\frac{x_2}{x_1}$$



Casos extremos: Substitutos perfeitos



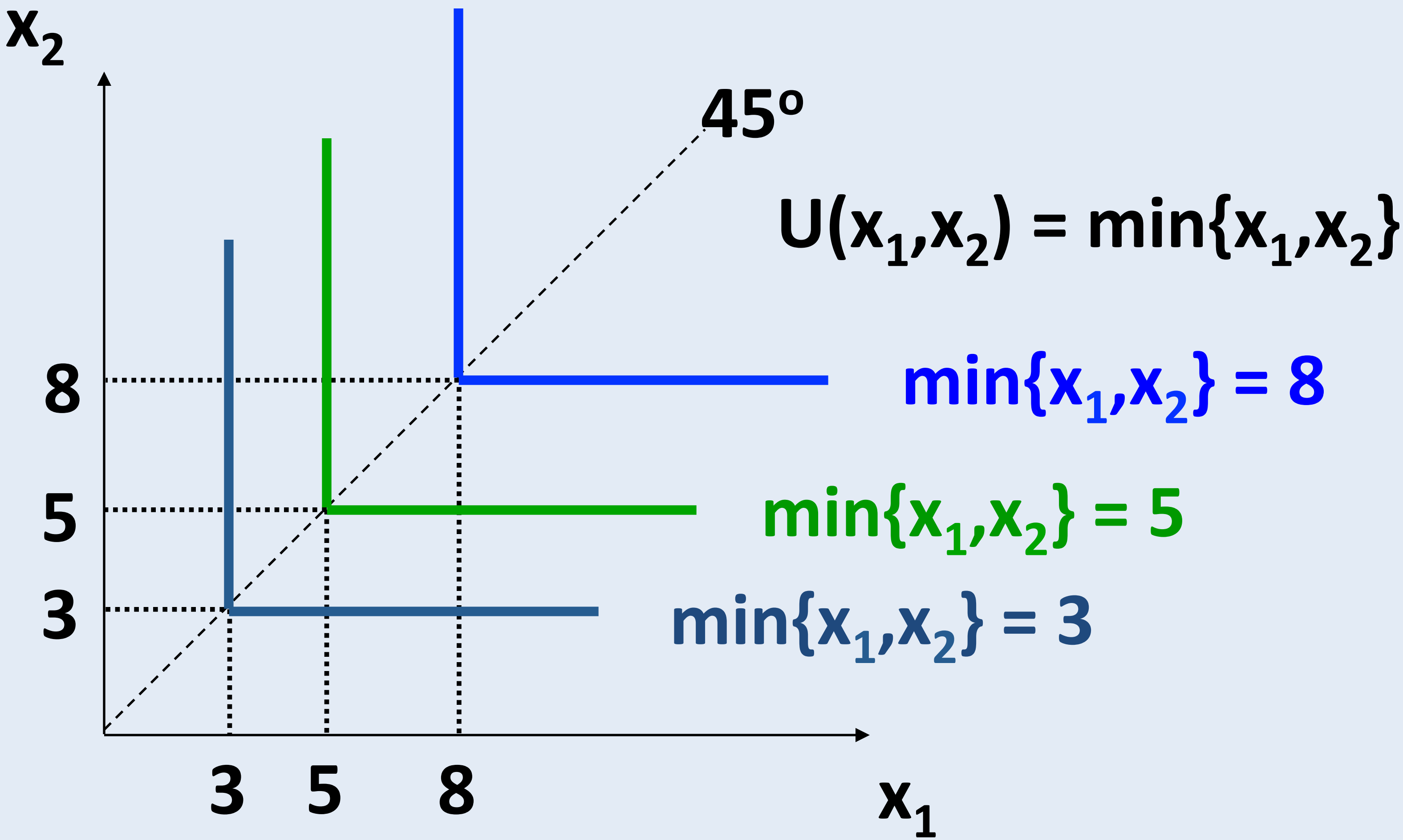
Inclinação constante em - 1.

$x_1 + x_2 = 8$

$x_1 + x_2 = 15$

$U(x_1,x_2) = x_1 + x_2.$

Complementares perfeitos



Problema do Consumidor

Maximizar sua utilidade sujeito à sua restrição orçamentária (B, feseable set $\subset \mathbb{R}^n_+$).

$$\underset{x \in R^n_+}{Max}\ u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a} \quad \mathbf{p}.\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$$

Supõe-se que o agente (consumidor) responde à incentivos/aproveita as oportunidades. Escolhe $x^* \in B$ tal que $x^* \succsim x$ para todo $x \in B$

Hipótese 1.2: Preferências do Consumidor

A relação de preferência do consumidor é completa, transitiva, contínua, estritamente monotônica e estritamente convexa em $\mathbb{R}^n_+$.

Teoremas 1.1 e 1.3 pode ser representada por uma função utilidade, u, que é contínua, estritamente crescente e estritamente quase-concôva em $\mathbb{R}^n_+$.

Caso 2 bens: Escolha racional com Restrição
Restrição Orçamentária: 2 bens

Hipótese: Há apenas dois bens: x_1 e $x_{2,}$ Cesta: (x_1, x_2)

Bem 1: x_1 ao preço p_1

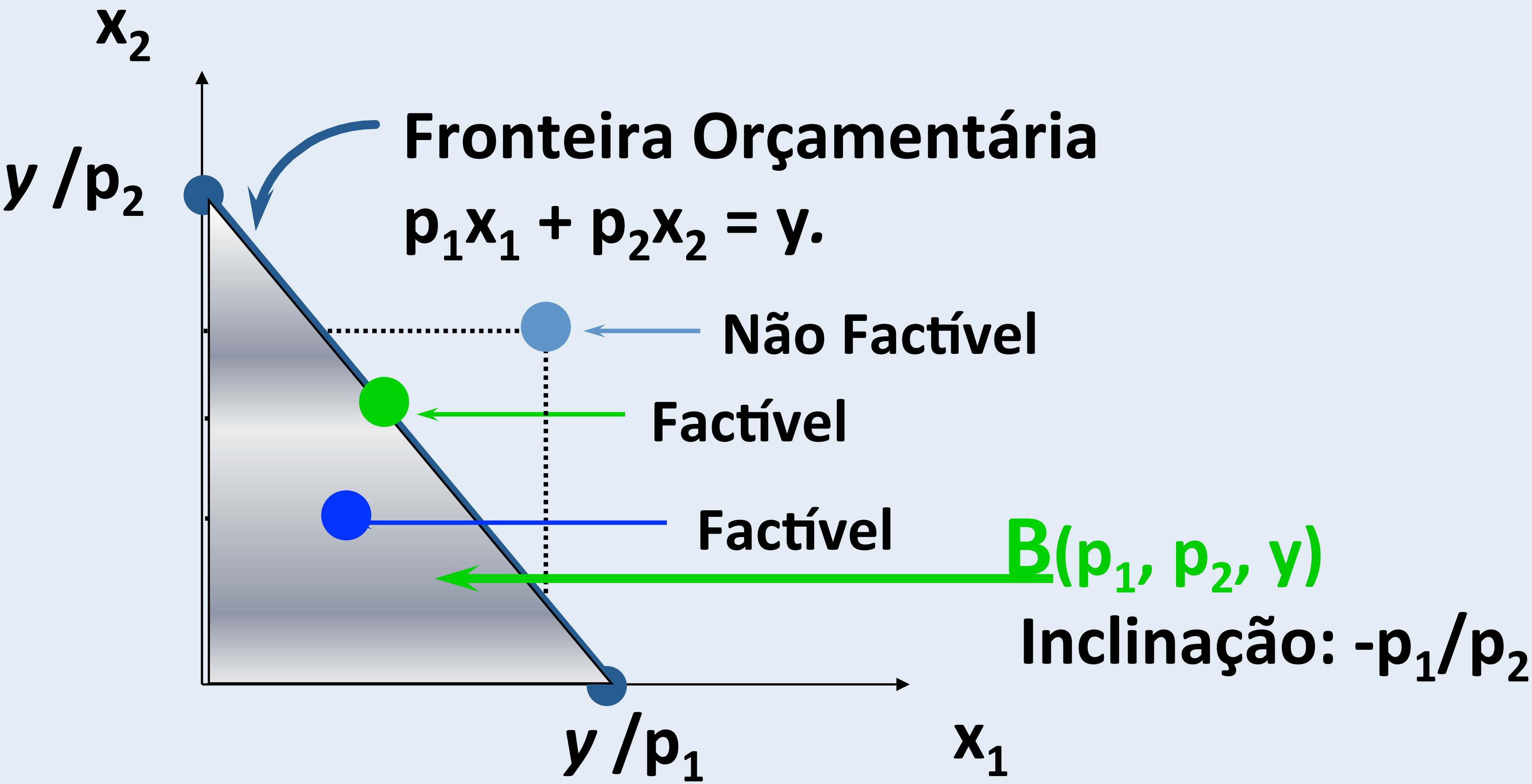
Bem 2: x_2 ao preço p_2

Dotação do consumidor: y

Conjunto Orçamentário $B(p_1, p_2, y)$: Conjunto de todas as cestas que o consumidor pode bancar aos preços p_1 e p_2.

$p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$

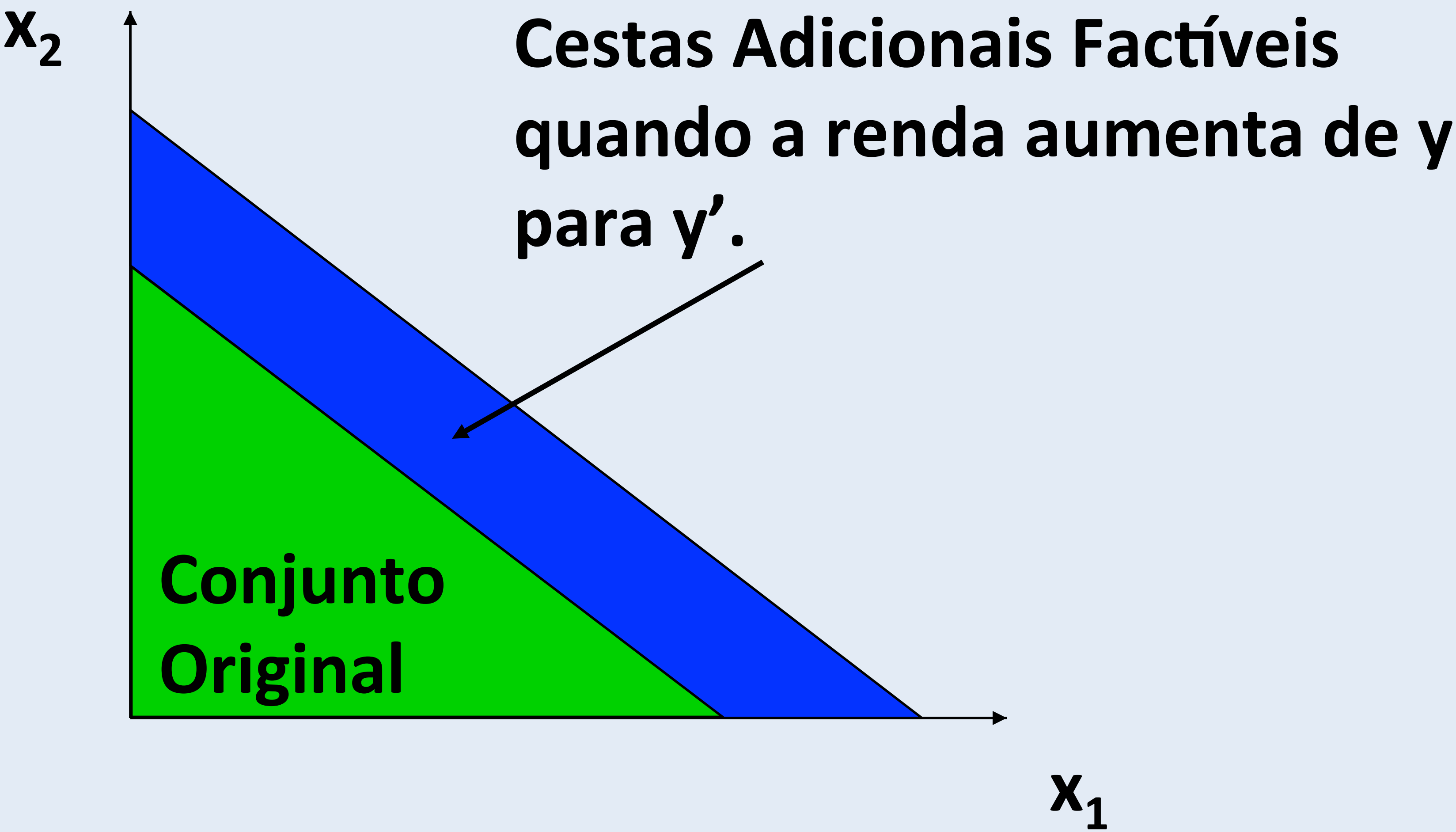
Restrição Orçamentária



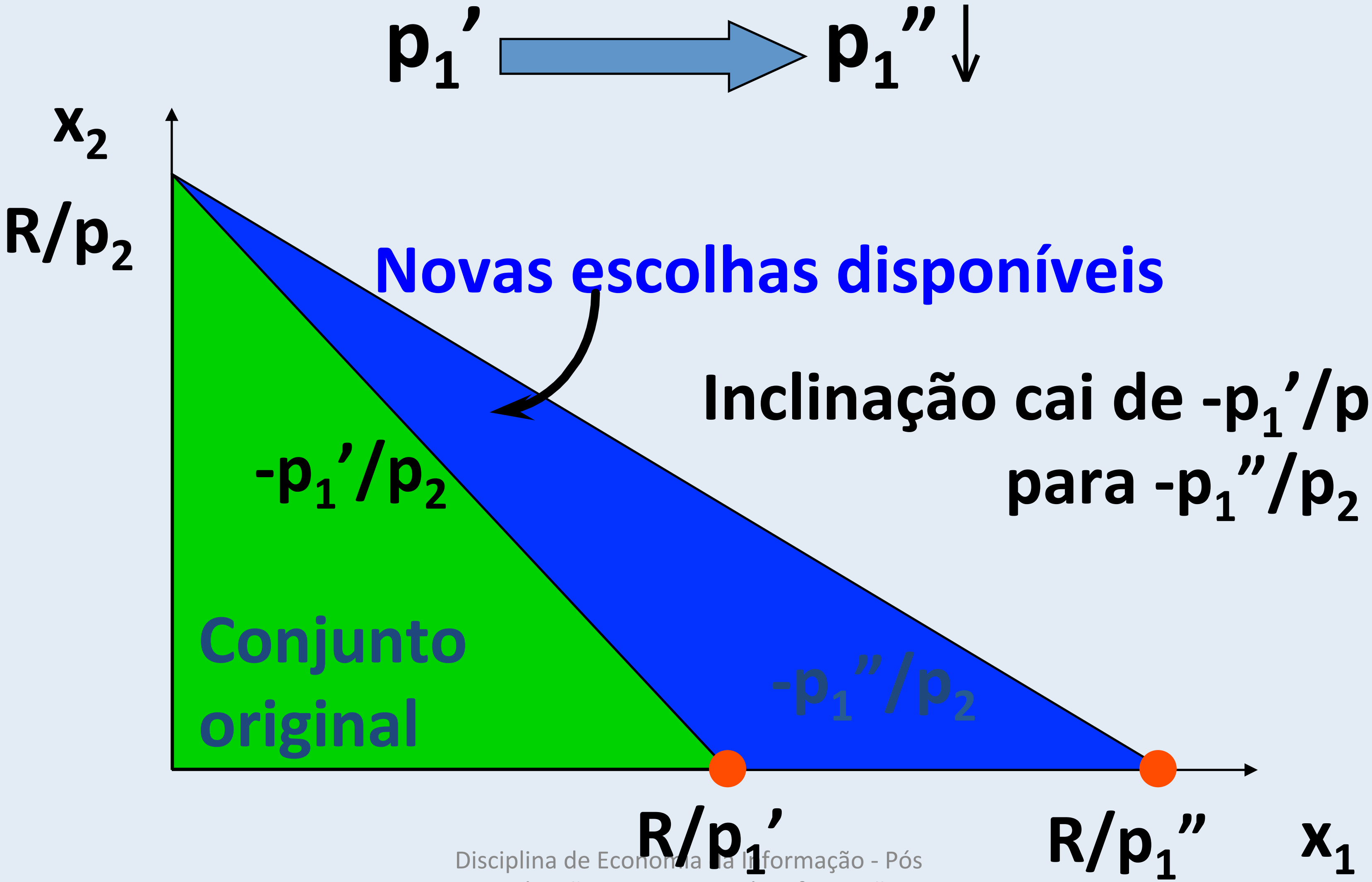
Fronteira Orçamentária:

$$x_2 = y/p_2 - (p_1/p_2)x_1$$

Aumento da Renda/Dotação

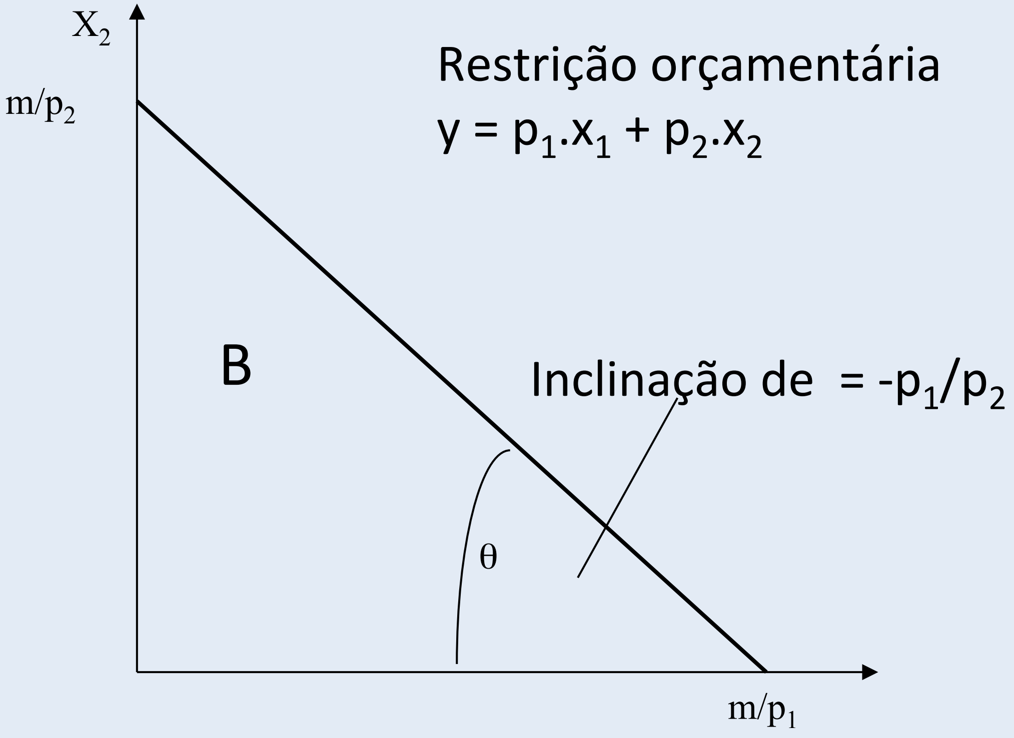


O que acontece com a restrição orçamentária quando há variação no preço de um dos bens? Suponha que p_1 sofra uma redução.

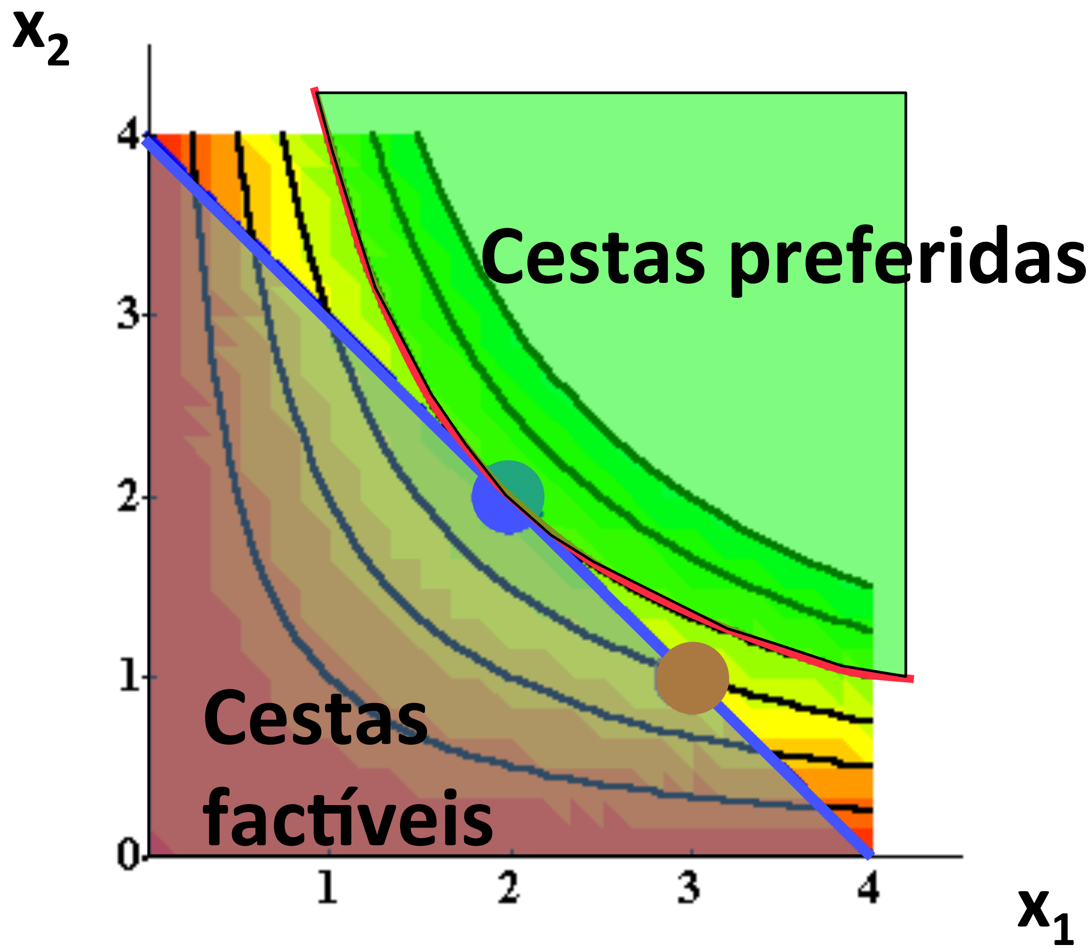


Conjunto Orçamentário B

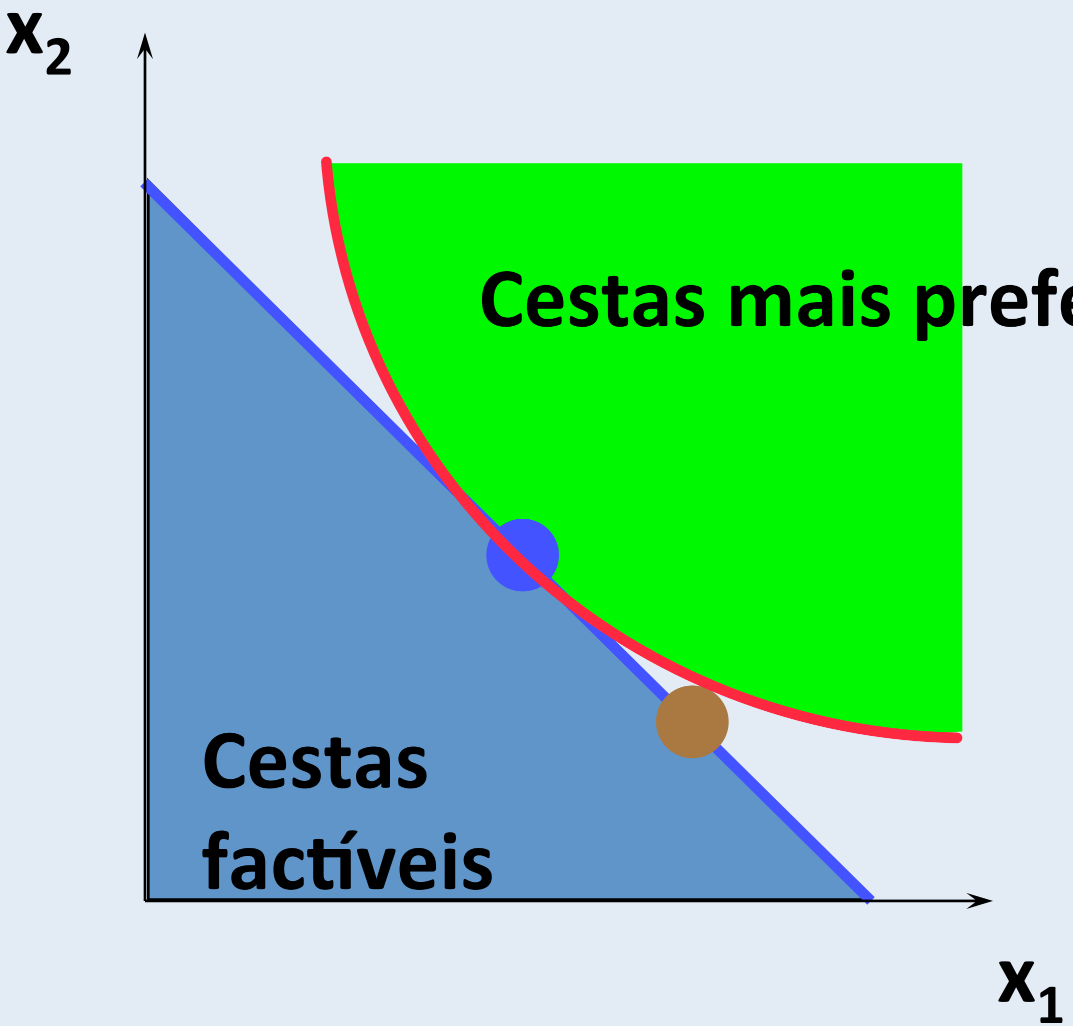
$$B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R_+^n, \mathbf{p}.\mathbf{x} \le \mathbf{y}\}$$



Escolha ótima: conjunto de escolhas possíveis



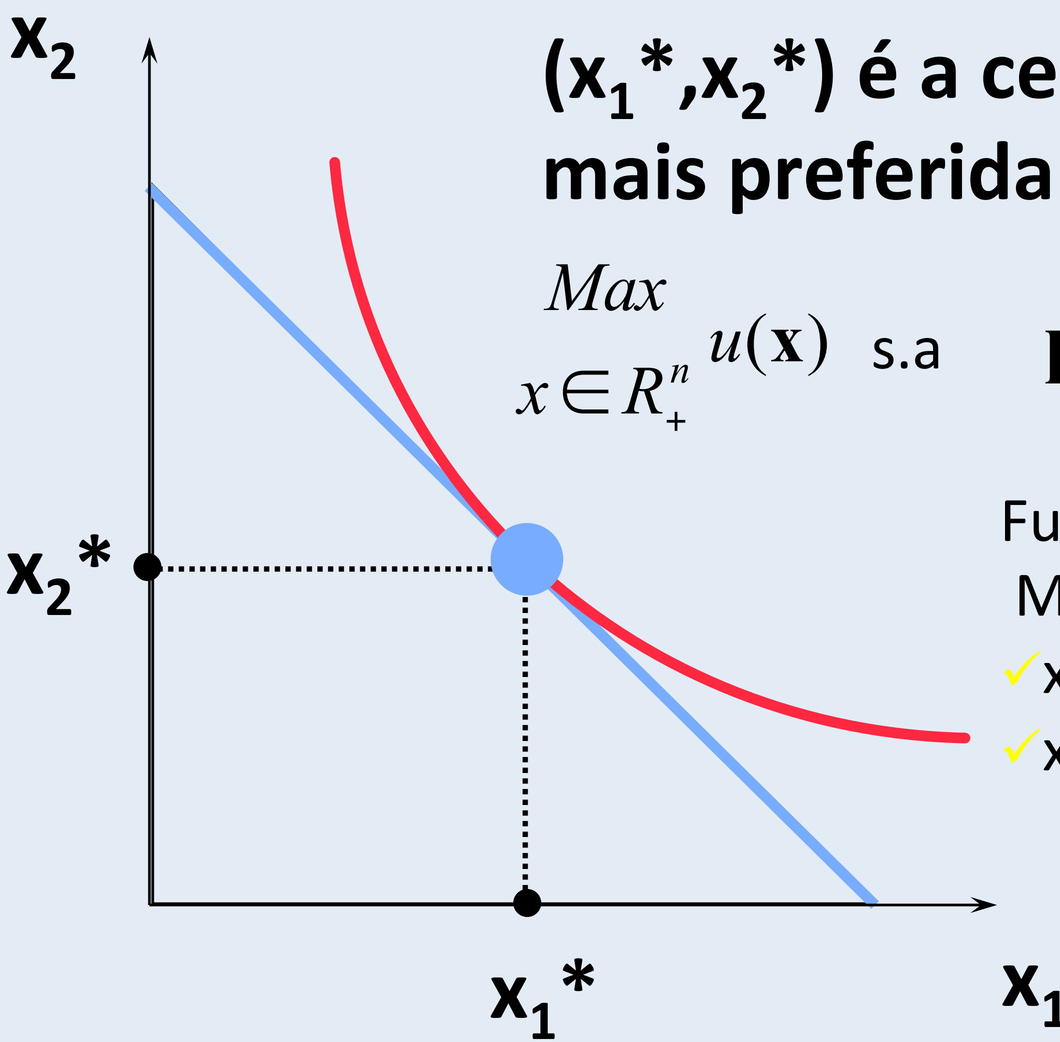
Conjunto de Escolhas possíveis



Escolha ótima

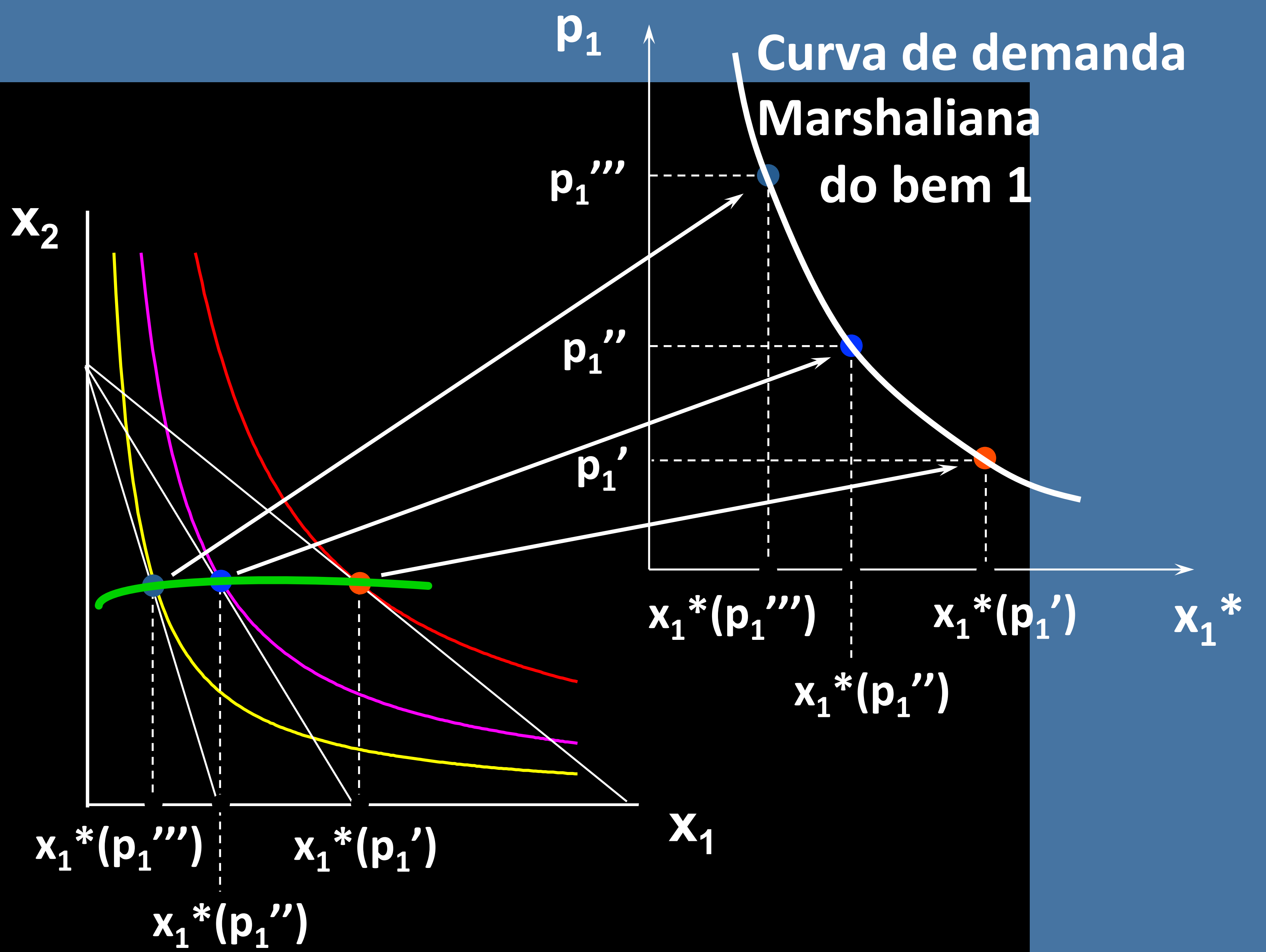
(x_1^*, x_2^*) é a cesta factível mais preferida.

$$\underset{x \in R^n_+}{Max}\ u(\mathbf{x}) \quad \text{s.a} \quad \mathbf{p}.\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$$



Funções Demandas Marshalianas:

- ✓ $x_1^*(p_1,p_2,y)$
- ✓ $x_2^*(p_1,p_2,y)$


Curva de demanda
Marshaliana
do bem 1
p_1
p_1'''
p_1''
p_1'
$x_1^*(p_1''')$
$x_1^*(p_1'')$
$x_1^*(p_1')$
x_1^*
x_2
x_1
$x_1^*(p_1''')$
$x_1^*(p_1'')$
$x_1^*(p_1')$

Escolha ótima: Problema do Consumidor

$$\underset{x \in R^n_+}{Max}\ u(\mathbf{x}) \quad \text{s. a} \quad \mathbf{p}.\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$$

Este é um problema de programação não linear com restrição de desigualdade e pode ser resolvido por Lagrangiano. Reescrevendo a restrição como y-$\mathbf{p}.\mathbf{x} \geq 0$ e assumindo que a solução $\mathbf{x}^*$ é estritamente positiva, pode-se usar o método de Kuhn-Tucker.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda[y - \mathbf{p}.\mathbf{x}]$$

$$L(\mathbf{x},\lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda[y - \mathbf{p}.\mathbf{x}]$$

Existe um λ*≥ 0 tal que (x*,λ*) satisfaz as seguintes condições de Kuhn-Tucker.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* . p_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,n. \qquad (1)$$

$$y - \mathbf{p}.\mathbf{x}^* \geq 0 \quad (2)$$

$$\lambda^*[y - \mathbf{p}.\mathbf{x}^*] = 0 \quad (3)$$

Por monotonicidade estrita (2) é satisfeito por igualdade e (3) é redundante. O Problema se reduz a:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} - \lambda^* p_n = 0$$

$$y - \mathbf{p}.\mathbf{x}^* = 0$$

Por monotonicidade estrita $\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} > 0$ para alguns *i=1, ……, n*. Como $p_i>0$ da condição de Kuhn Tucker

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \lambda^* . p_i = 0$$

Sabemos que para todo *j*

Então a Utilidade Marginal é proporcional ao preço para todos os bens no ótimo

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = \lambda^* . p_j > 0$$

ou para dois bens *j* e *k*:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_*) / \partial x_j}{\partial u(\mathbf{x}_*) / \partial x_k} = \frac{p_j}{p_k}$$

A TMS deve ser igual a taxa de Preços realtivos. Para 2 bens deve ser igual a inclinação da restrição orçamentária.

Solução $x*(\mathbf{p},y) \Rightarrow$ *Demanda Mashalliana*

Exercício 1

$$\underbrace{\max}_{x_1,x_2}(x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} \quad \text{s. a} \quad y - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$$

Lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \lambda) \equiv (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} + \lambda(y - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Solução: funções demandas marshallianas

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r} \qquad x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1}y}{p_1^r + p_2^r}$$

$$r = \rho/(\rho - 1)$$

Utilidade Indireta e Gasto

*u(**x**)* Utilidade direta.

*x(**p**,y), x* ótimo é escolhido em função dos preços e renda.

*v(**p**,y)* é a função utilidade indireta.

Se *u(x)* é contínua, *v(p,y)* é bem definida para ***p***>>0 e y≥0. Se u(**x**) é quase-côncava a solução *x(**p**,y)* é única e é a função demanda do consumidor.

O nível máximo de utilidade é atingido, aos preços ***p*** e renda y, quando *v(**p**,y)* é escolhido. *v(**p**,y)=u(**x**(**p**,y))* fornece o nível de utilidade da curva de indiferença mais alta que o consumidor consegue atingir dados ***p*** e *y*.

Continuidade significa que pequenas variações em ***p*** e *y* levam a pequenas variações na máxima utilidade alcançada em *v(**p**,y)*.

Teorema 1.6 Propriedades da Função Utilidade Indireta

Se u(x) é contínua e estritamente crescente em x , então v(p,y) definida abaixo

$$\underset{x \in R^n_+}{Max}\ u(\mathbf{x}) \quad \text{s. a} \quad \mathbf{p.x} \leq \mathbf{y}$$

1. Continuidade em $R^n_{++} \times R_+$,
2. Homogeneidade de grau zero em *(**p**,y), v(p,y)=v(t**p**,ty) para todo t>0,*
3. *Estritamente crescente em y,*
4. *Decrescente em **p**.*
5. Satisfaz quaseconvexidade em (p,y)
6. Satisfaz a identidade de Roy: Se v(p,y) é diferençável em *(**p**0,y0)* e

$$x_i(\mathbf{p}^0, y^0) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial y} \quad i=1,....n,$$

Exemplo: usando Exercício 1

Exercício 2: A partir da solução do exercício 1 abaixo, calcule a função utilidade indireta:

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \qquad x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r} \qquad r = \rho/(\rho - 1)$$

Resp. $$v(\mathbf{p}, y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/\rho}$$

Diferencie a função utilidade indireta acima com relação a *y* e a *pi* com a finalidade de verificar como um aumento da renda afeta a utilidade do indivíduo e como o aumento de preço afeta. Verifique também a identidade de Roy.