

LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DA MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 3332)
Gabarito Prova de Recuperação - 2018

1ª Questão (3,0 pontos) Uma bomba centrífuga operando com água (massa específica ρ_w) e com uma rotação N_w tem a seguinte curva de potência mecânica no eixo W_w :

$$W_w = A_w + B_w Q_w$$

onde A_w e B_w são constantes dimensionais de ajuste e Q_w é a vazão volumétrica de água.

a) Encontrar os parâmetros adimensionais dos quais depende o problema, supondo que as variáveis envolvidas são a potência W , vazão Q , massa específica ρ , diâmetro D e rotação N . (0,5 pontos)

b) Demonstrar que uma bomba geometricamente semelhante com $k_D = \frac{D_o}{D_w}$ conhecido que utilizará óleo (massa específica ρ_o) e terá uma rotação N_o possui uma curva de altura de de potência mecânica no eixo W_w da forma:

$$W_o = A_o + B_o Q_o$$

onde Q_o é a vazão volumétrica de óleo. Supondo que, como estabelecido no item anterior, a viscosidade dinâmica não seja uma variável do problema, determinar as constantes A_o e B_o em função dos fatores de escala das diferentes variáveis $k_\phi = \frac{\phi_o}{\phi_w}$. (1 ponto)

c) Determinar os fatores de escala de pressão $k_{\Delta P} = \frac{\Delta P_o}{\Delta P_w}$ e de torque no eixo $k_T = \frac{T_o}{T_w}$. (0,5 pontos)

d) Supondo que para a bomba com água a vazão para o ponto de melhor eficiência (*bep* ou *best efficiency point*) resulta $(Q_w)_{bep}$, achar a vazão $(Q_o)_{bep}$ para o *bep* correspondente à bomba com óleo. (0,5 pontos)

e) A hipótese de independência da viscosidade, realizada nos pontos anteriores, é válida para altos números de Reynolds. Para baixos Reynolds, a viscosidade deve ser acrescentada como variável envolvida na descrição do problema. Neste caso, é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo? Por quê? (0,5 pontos)

Solução:

a) Por análise dimensional (ou aplicando o teorema Pi, ou da experiência de bombas), considerando que μ (ou seja o número de Reynolds) não é uma variável do problema, resulta $C_W = C_W(C_Q)$, onde:

$$C_W = \frac{W}{\rho N^3 D^5} \quad (\text{coeficiente de potência})$$

$$C_Q = \frac{Q}{N D^3} \quad (\text{coeficiente de vazão})$$

b) Da igualdade dos números adimensionais para as bombas com água e óleo:

$$\frac{W_w}{\rho_w N_w^3 D_w^5} = \frac{W_o}{\rho_o N_o^3 D_o^5} \Rightarrow W_w = W_o \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} \right)^{-1} \left(\frac{N_o}{N_w} \right)^{-3} \left(\frac{D_o}{D_w} \right)^{-5} = W_o k_\rho^{-1} k_N^{-3} k_D^{-5}$$

$$\frac{Q_w}{N_w D_w^3} = \frac{Q_o}{N_o D_o^3} \Rightarrow Q_w = Q_o \left(\frac{N_o}{N_w} \right)^{-1} \left(\frac{D_o}{D_w} \right)^{-3} = Q_o k_N^{-1} k_D^{-3}$$

onde $k_N = \frac{N_o}{N_w}$ e $k_D = \frac{D_o}{D_w}$. Substituindo na curva da bomba de água, resulta:

$$W_o k_\rho^{-1} k_N^{-3} k_D^{-5} = A_w + B_w Q_o k_N^{-1} k_D^{-3} \Rightarrow W_o = k_\rho k_N^3 k_D^5 A_w + k_\rho k_N^2 k_D^2 B_w Q_o^2$$

Comparando com a curva característica da bomba de óleo, resultam: $A_o = k_\rho k_N^3 k_D^5 A_w$ e $B_o = k_\rho k_N^2 k_D^2 B_w$.

c) Os incrementos de pressão se adimensionalizam como $\frac{\Delta p}{\rho N^2 D^2}$, resultando:

$$\frac{\Delta P_w}{\rho_w N_w^2 D_w^2} = \frac{\Delta P_o}{\rho_o N_o^2 D_o^2} \Rightarrow k_{\Delta P} = \frac{\Delta P_o}{\Delta P_a} = k_\rho k_N^2 k_D^2$$

onde $k_\rho = \frac{\rho_o}{\rho_a}$. Os torques se adimensionaliza como $\frac{T}{\rho N^2 D^5}$, resultando:

$$\frac{T_w}{\rho_w N_w^2 D_w^5} = \frac{T_o}{\rho_o N_o^2 D_o^5} \Rightarrow k_T = \frac{T_o}{T_w} = k_\rho k_N^2 k_D^5$$

d) Da igualdade do coeficiente de vazão para a bep, resulta:

$$\frac{(Q_w)_{bep}}{N_w D_w^3} = \frac{(Q_o)_{bep}}{N_o D_o^3} \Rightarrow (Q_o)_{bep} = k_N k_D^3 (Q_w)_{bep}$$

e) Se a viscosidade é acrescentada como variável envolvida na descrição do problema, não é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo, pois deve ser satisfeita a igualdade de número

de Reynolds $\frac{\rho N D^2}{\mu}$ para modelo e protótipo:

$$\frac{\rho_w N_w D_w^2}{\mu_w} = \frac{\rho_o N_o D_o^2}{\mu_o} \Rightarrow k_\rho k_N k_D^2 k_\mu^{-1} = 1$$

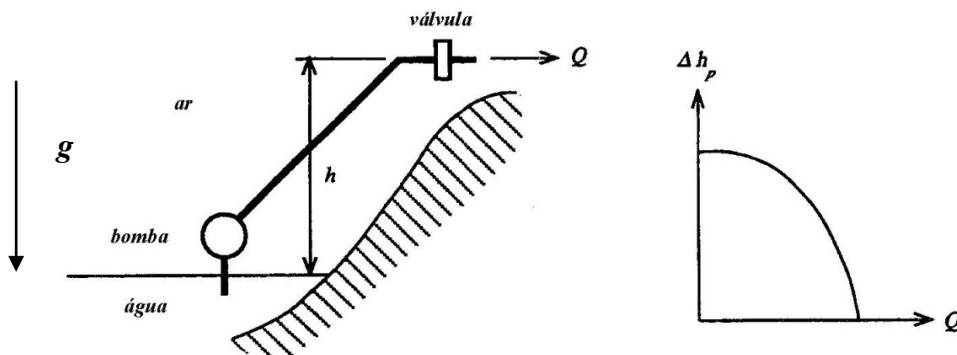
2ª Questão (2,0 pontos) Uma bomba fornece água (de massa específica ρ) com uma vazão volumétrica Q à atmosfera, através de um conduto de diâmetro D e comprimento total L com uma válvula parcialmente aberta de constante de perda K_v na saída, como mostra a figura. A saída está localizada a uma altura h acima da superfície do reservatório de onde é extraída a água. A altura de carga da bomba Δh_p está relacionada com a vazão como segue:

$$\Delta h_p = A - BQ^2$$

onde A e B são constantes dimensionais. A eficiência da bomba η_p é independente da vazão. O número de Reynolds na tubulação é suficientemente grande como para que o fator de atrito f seja constante. Nestas condições, deduzir uma expressão para a vazão volumétrica em regime permanente Q e a potência de bombeamento W_p em função dos parâmetros ρ , A , B , D , f , L , aceleração gravitacional g , h , e K_v .

Conservação da energia: $H_{E1} + H_{maq} = H_{E2} + \sum \Delta H_{perdas}$; Altura de energia: $H = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$;

Perda distribuída: $\Delta h_d = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$; Perda singular: $\Delta h_s = K \frac{V^2}{2g}$; Potência no eixo: $W_p = \frac{\rho g Q \Delta h_p}{\eta_p}$



Solução:

Se 1 é o ponto no espelho de água e 2 é o ponto na saída (a jusante da válvula), da conservação da altura de energia, temos:

$$H_{E1} - H_{E2} = -\Delta h_p + \left(K_v + f \frac{L}{D} \right) \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

Considerando a pressão atmosférica e a cota do espelho de água como referências, resultam:

$$H_{E1} = 0 \quad (2)$$

$$H_{E2} = \frac{V^2}{2g} + h \quad (3)$$

Substituindo (2), (3) e a curva característica da bomba em (1) e considerando que $V = \frac{Q}{S}$, onde $S = \pi \frac{D^2}{4}$ é a área de passagem do duto, resulta finalmente:

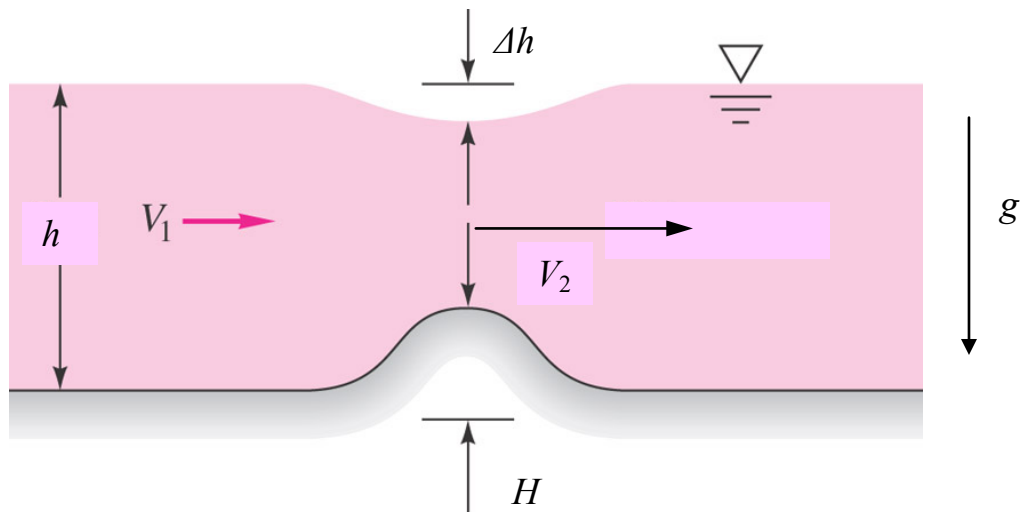
$$\left(B + \frac{1 + K_v + f \frac{L}{D}}{2gS^2} \right) Q^2 - (A - h) = 0 \Rightarrow Q = \frac{A - h}{B + \frac{1 + K_v + f \frac{L}{D}}{2gS^2}} = \left[\frac{A - h}{B + \frac{8 \left(1 + K_v + f \frac{L}{D} \right)}{\pi^2 g D^4}} \right]^{1/2} \quad (4)$$

A potência de bombeamento resulta:

$$W_p = \frac{\rho g \Delta h_p Q}{\eta_p} = \frac{\rho g (A - BQ^2) Q}{\eta_p} \quad (5)$$

3ª Questão (2,0 pontos) Se a velocidade de aproximação não for alta demais, uma saliência de altura H no fundo de um canal de água bi-dimensional de espessura h causará um afundamento Δh do nível da água, que pode servir para a medição da vazão Q por unidade de comprimento na direção normal ao papel. Desprezando as perdas e supondo uma velocidade uniforme na seção de passagem, determinar as velocidades V_1 , V_2 e a vazão Q em função das variáveis anteriores e da aceleração gravitacional g .

Dica: a superfície livre de água está a pressão atmosférica.



Eq. de Bernoulli em uma linha de corrente, incompressível e permanente: $p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{cte}$

Conservação de massa, permanente: $0 = \int_A \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\hat{n}}) dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, F. M. White, McGraw-Hill, 2011)

Solução:

Da equação de continuidade entre as seções 1 e 2, resulta:

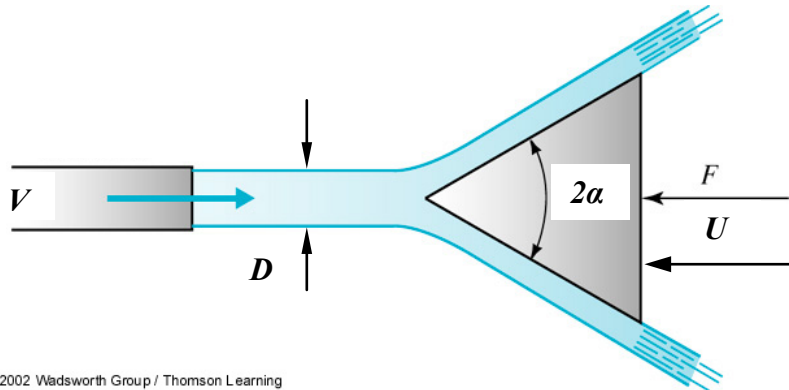
$$V_1 h = V_2 (h - \Delta h - H) \Rightarrow V_2 = \frac{h}{h - \Delta h - H} V_1 = \beta V_1, \text{ onde } \beta = \frac{1}{1 - \frac{\Delta h}{h} - \frac{H}{h}} \geq 1$$

Da equação de Bernoulli para a linha de corrente da superfície, resulta:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g (h - \Delta h) \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2g \Delta h$$

Eliminando V_2 , resultam $V_1 = \left(\frac{2g\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $V_2 = \beta \left(\frac{2g\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$, $Q = V_1 h = h \left(\frac{2g\Delta h}{\beta^2 - 1}\right)^{1/2}$

4ª Questão (3,0 pontos) Um jato de líquido de massa específica ρ , diâmetro D e velocidade de saída V descarga na atmosfera e incide centrado em um cone de ângulo 2α , como mostra a figura. Desprezando forças volumétricas e perdas, determinar a força F necessária para aproximar o cone com uma velocidade constante U . Dica: considerar um sistema solidário ao cone e observar que os módulos das velocidades relativas de entrada e saída não mudam (por que?)



Conservação de massa, permanente e incompressível: $0 = \int_A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\bar{n}}) dA$

Conservação da quantidade de movimento: $\sum \mathbf{F}_{ext} = \int_A \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\bar{n}}) dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, M. C. Potter & D. C. Wiggert, Thomson, 2004)

Solução:

No sistema solidário ao cone, o jato está a pressão atmosférica constante. Como não existem perdas, vale a equação de Bernoulli; desprezando as forças volumétricas, deve ser então o módulo da velocidade relativa $c = V + U = cte$. O cone desvia o jato em um ângulo α . Da equação de continuidade, resulta:

$$\dot{m} = \rho c \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{4} \rho (V + U) \pi D^2 = cte$$

Da equação de conservação do momento linear na direção do escoamento, resulta:

$$-F = \dot{m}(c \cos \alpha - c) = -\dot{m}c(1 - \cos \alpha) \Rightarrow F = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 (V + U)^2 (1 - \cos \alpha)$$