Eletricidade e Magnetismo I

4300270
1º semestre 2019
Período Noturno

28/3/2019

Roteiro de discussão 2 – Lei de Gauss

SOLUÇÕES!

01 Pelo fato que, na Lei de Coulomb, a interação elétrica vai como o inverso do quadrado da distância, podemos entender o fluxo do campo elétrico sobre uma superfície como uma medida do número de linhas de campo que a atravessa. Assim, podemos dizer que, como nas três superfícies há o mesmo número de linhas de campo atravessando-as, o (módulo) do fluxo é o mesmo. ∎

02

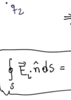
$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

a) O lado esquerdo da equação diz sobre o fluxo total em uma <u>superfície fechada</u> S (daí o porquê do pequeno círculo no símbolo da integral) do vetor campo elétrico. O lado direito, a menos da constante permissividade ε_0, é a carga elétrica no interior da superfície S. Em suma, a Lei de Gauss fornece uma maneira de contabilizar a carga total no interior de uma superfície S. Como? Calcule o fluxo total do campo elétrico sobre esta superfície.

b) Para qualquer superfície fechada.

c) Para qualquer distribuição. Discreta, contínua ou mesmo uma que varie com o tempo.

d) Não. $\vec{E}$, neste caso, é o campo elétrico resultante sobre a superfície gaussiana, devido tanto às cargas internas à superfície quanto às cargas externas. Acontece que o campo devido às cargas externas não contribuem p/ o fluxo. Veja:



$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\left\{\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 \\ \vec{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \oint_S (\vec{E}_1+\vec{E}_2)\cdot\hat{n}\,ds = q_1/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}_1\cdot\hat{n}\,ds + \underbrace{\oint_S \vec{E}_2\cdot\hat{n}\,ds}_{=0 \text{ porque } S \text{ ñ envolve } q_2} = q_1/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{E}_1\cdot\hat{n}\,ds = q_1/\varepsilon_0}$$

e) Se o fluxo é nulo, pela Lei de Gauss, necessariamente a carga no interior da superfície é nula, não que o campo elétrico é nulo. ∎

03 Pela Lei de Gauss, nosso Universo não possui carga elétrica líquida, isto é, é um Universo neutro: o número total de carga positiva é exatamente igual ao número de cargas negativas. Por quê? Bem, sempre podemos tomar uma superfície fechada suficientemente grande de sorte que o vetor campo elétrico não "chegue" a essa superfície, tornando seu fluxo nulo.

Agora, se num universo fictício o vetor campo elétrico vai com o inverso da distância, a Lei de Gauss não vale e a afirmação anterior se torna falsa. Assim, teríamos que assumir que neste universo ele não seria neutro. ∎

04 Ela, sob a forma integral, caracteriza a existência ou não de cargas elétricas numa região finita do espaço. Em outras palavras, ela atesta que cargas elétricas são fontes (ou sorvedouros) de campo elétrico. ∎

05 Naquelas em que há simetrias, onde o cálculo da integral é bastante simplificado. Situações típicas são quando, à medida que se percorre a superfície escolhida (Gaussianas), o vetor campo elétrico ou é constante ou é paralelo ao elemento de área, mantendo seu módulo constante. ∎

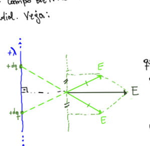
06

a) X

b) X

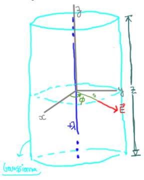
c) X

d) Aqui, há uma simetria tanto azimutal quanto longitudinal. Para usar a Lei de Gauss, precisamos escolher uma gaussiana que contemple ambas estas simetrias. Uma superfície cilíndrica tem estas características. Também precisamos saber qual a direção do vetor campo elétrico nesta distribuição. Não é difícil se convencer que é radial. Veja:



A partir da figura ao lado, vemos que, para qualquer elemento de carga dq da distribuição, sempre existe outra simétrica, de sorte que as componentes verticais de seus campos se cancelam.

Juntando estes ingredientes, apliquemos a Lei de Gauss, usando como gaussiana a superfície de um cilindro.



Coordenadas cilíndricas: z: coordenada longitudinal; φ: " azimutal; s: " radial

- <u>Campo Elétrico</u>: $\vec{E} = E(s)\,\hat{s}$
- <u>Elemento de área</u> (Coord. cilíndricas): $d\vec{a} = s\,d\phi\,dz\,\hat{s}$
- <u>Carga no interior da gaussiana</u>: $q_{int} = \lambda\cdot z$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \underbrace{\int_{\text{BASES}} \vec{E}\cdot d\vec{a}}_{=0,\ \text{pq o campo é radial}} + \int_{\substack{\text{Sup.}\\\text{Lateral}}} \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \int_{\substack{\text{Sup.}\\\text{Lateral}}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z'=-z/2}^{z/2} [E(s)\,\hat{s}]\cdot(s\,d\phi\,dz'\,\hat{s}) = \frac{\lambda z}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(s)\cdot s\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z'=-z/2}^{z/2} dz' = E(s)\cdot s\cdot 2\pi\cdot \cancel{z} = \frac{\lambda \cancel{z}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(s) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{s}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(s) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{s}\,\hat{s}}$$