GABARITO
Lista 01

(07) Vamos lançar mão no princípio de conservação da carga elétrica para validar cada reação. Nossa estratégia será: contabilizamos a quantidade de carga elétrica antes e depois da reação. Se forem iguais, a reação é possível. Se não, ela é impossível.

a) $\underbrace{p}_{Q=+e} \rightarrow \underbrace{n + e^+ + \nu}$

$Q' = 0 + e + 0 = +e$, ∴, $Q = Q'$ ⇒ $\boxed{\text{Reação Possível}}$

b) $\underbrace{p + e^-} \rightarrow \underbrace{p + n + \nu}$

$Q = +e + (-e)$ $\Rightarrow Q = 0$ $\quad Q' = +e + 0 + 0$ $\Rightarrow Q' = +e$, ∴, $Q \neq Q'$ ⇒ $\boxed{\text{Reação Impossível}}$

c) $\underbrace{e^+ + e^-} \rightarrow \underbrace{p}$

$Q = +e + (-e)$ $\Rightarrow Q = 0$ $\quad Q' = +e$, ∴, $Q \neq Q'$ ⇒ $\boxed{\text{Reação Impossível}}$

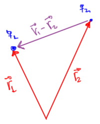
d) $\underbrace{\pi^+ + p} \rightarrow \underbrace{\pi^0 + \pi^0}$

$Q = +e + e$ $\Rightarrow Q = +2e$ $\quad Q' = 0 + 0 = 0$, ∴, $Q \neq Q'$ ⇒ $\boxed{\text{Reação Imposs.}}$

e) $\underbrace{\pi^- + p} \rightarrow \underbrace{\pi^+ + \pi^- + n}$

$Q = -e + (+e)$ $\Rightarrow Q = 0$ $\quad Q' = +e + (-e) + 0$ $\Rightarrow Q' = 0$, ∴, $Q = Q'$ ⇒ $\boxed{\text{Reação Possível}}$

(08)



$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

(Campo de q_2 no ponto $\vec{r}_1$)

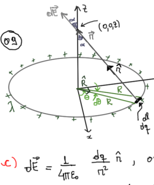
$\vec{F}_{21} = q_1 \vec{E}_2$ (Força "sentida" pela carga q_1 porque está no campo $\vec{E}_2$)

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = q_1 \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}$$

Desde que $q_1 q_2 > 0$, $\vec{F}_{21}$ tem o mesmo sentido que $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, i.e., $\vec{F}_{21}$ tem natureza repulsiva. ∎

(09)



a) $dl = R\,d\theta$

b) $dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$

c) $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\imath^2} \hat{\imath}$, onde $\vec{\imath} = \imath\hat{\imath}$ é o vetor que separa a carga dq do ponto $(0,0,z)$, com módulo $\imath = (z^2 + R^2)^{1/2}$

d) Pela geometria da figura acima,
$\hat{\imath} = -\sin(\alpha)\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\alpha)\sin(\theta)\hat{y} + \cos(\alpha)\hat{z}$

$(d\vec{E})_x = -dE \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta)\,\hat{x}$

$(d\vec{E})_y = -dE \sin(\alpha) \sin(\theta)\,\hat{y}$, com $dE = |d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\imath^2}$

$(d\vec{E})_z = dE \cos(\alpha)\,\hat{z}$ e $\tan(\alpha) = \frac{R}{z}$.

e) Integrando,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \left[(d\vec{E})_x + (d\vec{E})_y + (d\vec{E})_z \right]$$

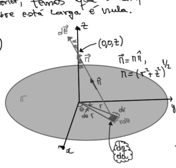
Contudo, pela simetria da distribuição, as integrais das componentes x e y são nulas, sobrando apenas a integral da componente y. Assim,

$$\vec{E} = \int dE \cos(\alpha)\,\hat{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{\lambda R\, d\theta}^{dq}}{\underbrace{z^2 + R^2}_{\imath^2}} \overbrace{\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}}^{\cos(\alpha)} \hat{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi}\,\hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{Rz}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

f) No centro do anel, $z = 0$. Pela expressão calculada no item anterior, temos que o campo elétrico é zero. Logo, a força sobre está carga é nula. ∎

(10)



a) $da = (r\,d\theta)\,dr = r\,dr\,d\theta$

b) $dq = da\,\sigma = \sigma r\,dr\,d\theta$

c) $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\imath^2} \hat{\imath}$,

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r\,dr\,d\theta}{(r^2+z^2)} \hat{\imath}}$$

d) Pela geometria da figura, temos:

$\hat{\imath} = -\sin(\alpha)\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\alpha)\sin(\theta)\hat{y} + \cos(\alpha)\hat{z}$,

de sorte que

$(d\vec{E})_x = -dE \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta)\,\hat{x}$

$(d\vec{E})_y = -dE \sin(\alpha) \sin(\theta)\,\hat{y}$, com $dE = |d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r\,dr\,d\theta}{r^2 + z^2}$

$(d\vec{E})_z = dE \cos(\alpha)\,\hat{z}$ e $\tan(\alpha) = \frac{r}{z}$.

e) Mais uma vez, pela simetria da distribuição, o campo elétrico no ponto $(0,0,z)$ será vertical. Assim, das 3 componentes destacadas no item anterior, apenas $(d\vec{E})_z$, quando somada, será diferente de zero. Assim,

$$\vec{E} = \int (d\vec{E})_z = \int dE \cos(\alpha)\,\hat{z} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{r}{r^2+z^2} \overbrace{\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}}}^{\cos(\alpha)} dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr$$

Para calcular aquela integral, fazemos a mud. de variável:

$$u = r^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} r \to 0 \Rightarrow u \to z^2 \\ r \to R \Rightarrow u \to z^2 + R^2 \\ du = 2r\,dr \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{u^{-3/2}}{2} du\,\hat{z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} u^{-\frac{3}{2}+1} \Big]_{z^2}^{z^2+R^2} \hat{z}$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} \hat{z} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \right] \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{z}}$$

OBS: Se $R \to \infty$, temos que $\vec{E} \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, campo elétrico de um plano infinito, resultado esse que vcs chegarão pela aplicação da Lei de Gauss! ☺