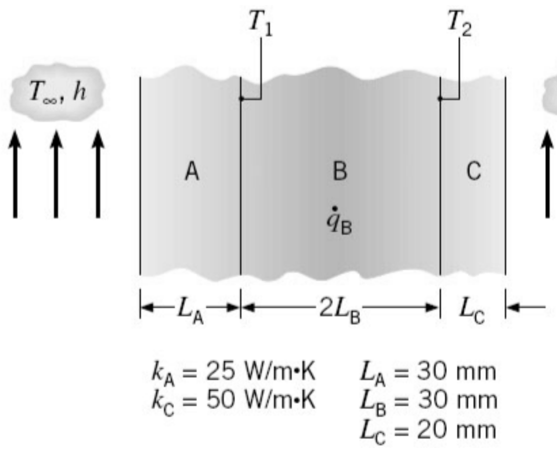
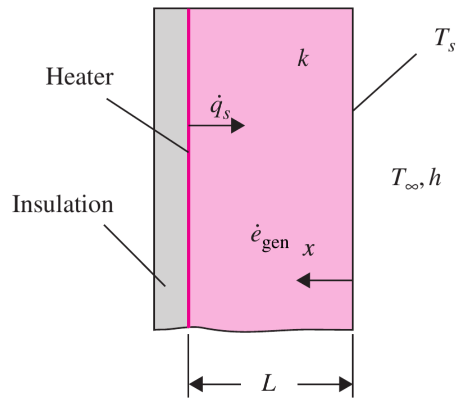
PME3398 – Fundamentos de Termodinâmica e Transferência de Calor
Professores Bruno Carmo e Antonio Pacífico

Lista de exercícios resolvidos 10 – Condução com geração

1- Seja a condução unidimensional em uma parede plana composta. Sua superfície externa está exposta a um fluido a 25 °C, com um coeficiente convectivo de 1000 W/(m²·K). Na parede intermediária B há geração uniforme de calor a uma taxa $\dot{q}_B$, enquanto não existe geração nas paredes A e C. As temperaturas nas interfaces são T_1 = 261 °C e T_2 = 211 °C. Supondo resistências de contato desprezíveis nas interfaces, determine a taxa volumétrica de geração de calor $\dot{q}_B$ e a condutividade térmica k_B.



2- Uma parede plana de espessura L = 4 cm possui condutividade térmica k = 20 W/(m·K). Uma reação química ocorre dentro da parede, resultando em uma geração de calor uniforme a uma taxa $\dot{e}_{gen}$ = 10^5 W/m³. Entre a parede e a camada isolante existe um aquecedor de espessura desprezível que gera um fluxo de calor $\dot{q}_s$ = 16 kW/m². O lado oposto da parede está em contato com água a uma temperatura T_∞ = 40 °C. Um sensor de temperatura localizado na parede em contato com a água marca T_s = 90 °C. Pede-se:

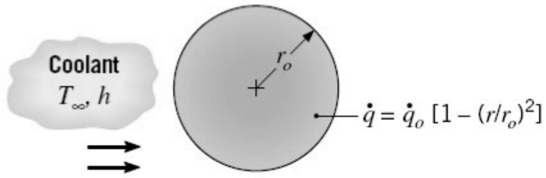


a. O coeficiente de transferência de calor por convecção entre a parede e a água;
b. Mostre que a distribuição permanente de temperatura possui a forma $T(x) = ax^2 + bx + c$ e determine os valores e unidades de a, b e c. A origem de x é mostrada na figura;
c. Determine a posição e o valor da temperatura máxima na parede;
d. Esta posição pode ser encontrada sem conhecer os valores de a, b e c, mas sabendo que $T(x)$ é uma função quadrática? Justifique.

3- Considere uma tubulação de água de comprimento L = 17 m, raio interno r_1 = 15 cm, raio externo r_2 = 20 cm e condutividade térmica k = 14 W/(m·K). Gera-se calor uniformemente no cano por um aquecedor elétrico de 25 kW. As superfícies interna e externa da tubulação estão a T_1 = 60 °C e T_2 = 80 °C, respectivamente. Pede-se:

a. A equação da distribuição de temperatura em função do raio do cano (entre r_1 e r_2) específica para as condições deste enunciado;
b. A temperatura do cano na sua superfície média [$r = (r_1 + r_2)/2$];
c. A temperatura calculada no item (b) é a temperatura máxima? Justifique.

4- Rejeitos radioativos são colocados em um recipiente esférico de parede delgada. Os rejeitos geram energia térmica de forma não uniforme de acordo com a relação $\dot{q} = \dot{q}_o[1-(r/r_o)^2]$, na qual $\dot{q}$ é a taxa local de geração de energia por unidade de volume, $\dot{q}_o$ é uma constante e r_o é o raio do recipiente. Condições de regime estacionário são mantidas pela imersão do recipiente em um líquido que se encontra a T_∞ e fornece um coeficiente convectivo h uniforme. Determine a distribuição de temperaturas, $T(r)$, no interior do recipiente. Expresse o seu resultado em termos de $\dot{q}_o$, r_o, T_∞, h e da condutividade térmica k dos rejeitos radioativos.



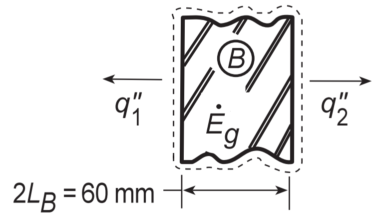
PME3398 – Fundamentos de Termodinâmica e Transferência de Calor
Professores Bruno Carmo e Antonio Pacífico

Soluções da Lista de Exercícios 10

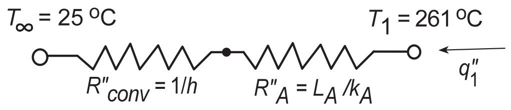
1) Condução em regime permanente em parede plana, com geração em B e sem geração em A e C. Fazendo um balanço de energia em B, por unidade de área:

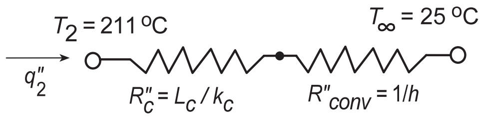
$$2\dot{q}_B L_B = q_1'' + q_2''$$

$$\dot{q}_B = (q_1'' + q_2'')/(2L_B)$$



Para determinar os fluxos q_1'' e q_2'', construímos os circuitos térmicos para as paredes A e C.





$$q_1'' = (T_1 - T_\infty)/(1/h + L_A/k_A)$$

$$q_1'' = (261 - 25)/(1/1000 + 0{,}030/25)$$

$$q_1'' = 107273\,\mathrm{W/m^2}$$

$$q_2'' = (T_2 - T_\infty)/(1/h + L_C/k_C)$$

$$q_2'' = (211 - 25)/(1/1000 + 0{,}020/50)$$

$$q_2'' = 132857\,\mathrm{W/m^2}$$

Usando estes valores, encontramos o valor de $\dot{q}_B$:

$$\dot{q}_B = (107273 + 132587)/(2 \times 0{,}030) = 3{,}99 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$$

Para encontrar k_B, usamos a forma geral da distribuição de temperaturas numa parede com geração aplicada à parede B,

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_B}{2k_B}x^2 + C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de contorno $T(-L_B) = T_1$ e $T(+L_B) = T_2$, obtemos

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{2L_B}, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_B}{2k_B}L_B^2 + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{\dot{q}_B L^2}{2k_B}\left(1 - \frac{x^2}{L_B^2}\right) + \frac{T_2 - T_1}{2}\frac{x}{L_B} + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Calculamos então a expressão do fluxo de calor,

$$q_x''(x) = -k_B\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -k_B\left(-\frac{\dot{q}_B}{k_B}x + C_1\right) = \dot{q}_B x - C_1 k_B = \dot{q}_B x - \frac{T_2 - T_1}{2L_B}k_B,$$

e usamos um dos pontos onde conhecemos o valor do fluxo, por exemplo $q_x''(+L_B) = q_2''$,

$$132857 = 3{,}99 \times 10^6 \times 0{,}030 - \frac{211 - 261}{2 \times 0{,}030}k_B \quad \Rightarrow \quad k_B = 15{,}8\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$$

2) a. O fluxo de calor total que emerge pela face da parede em contato com a água, q''_t é dado por $q''_t = q''_s + q'''L$. Nesta face o balanço de energia, então, será dado por:

$$q''_t = h\,(T_s - T_\infty) \Rightarrow q''_s + q'''L = h\,(T_s - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{q''_s + q'''L}{T_s - T_{infty}}$$

$$h = \frac{16000 + 10^5 \times 0{,}04}{90 - 40} = 400\,\mathrm{W/(m^2.K)}$$

b. A equação diferencial para este caso é:

$$k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + q''' = 0$$

Cuja solução é:

$$T(x) = -\frac{q'''}{2k}x^2 + bx + c$$

De onde fica claro que a solução é do tipo $T(x) = ax^2 + bx + c$.

Determinando os coeficientes a, b e c:

$$a = -\frac{q'''}{2k} = -\frac{10^5}{220} = -2500\,^\circ\mathrm{C/m^2}$$

Para $x = 0 \Rightarrow T(x=0) = T(0) = T_s = 90\,^\circ\mathrm{C}$, logo, $c = 90\,^\circ\mathrm{C}$.

Para $x = L \Rightarrow -k\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L} = -q''_s$. Assim[1],

$$k\left(-\frac{q'''L}{k} + b\right) = q''_s \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{k}\left(q''_s + q'''L\right) = \frac{1}{20} \times \left(16000 + 10^5 \times 0{,}04\right) = 1000\,^\circ\mathrm{C/m}$$

c. Para polinômios do 2º grau, a coordenada para pontos de máximo (ou mínimo) é:

$$x_{\mathrm{extr}} = -b/(2a) = 1000/[2 \times (-2500)] = 0{,}2\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{cm}$$

Mas $x = 20\,\mathrm{cm}$ localiza-se fora da parede. Assim, $T_{máx}$ ocorre para $x = L$:

$$T_{máx} = T(x = L) = -2500L^2 + 1000L + 90$$

$$T_{máx} = -2500 \times 0{,}04^2 + 1000 \times 0{,}04 + 90 = 126\,^\circ\mathrm{C}$$

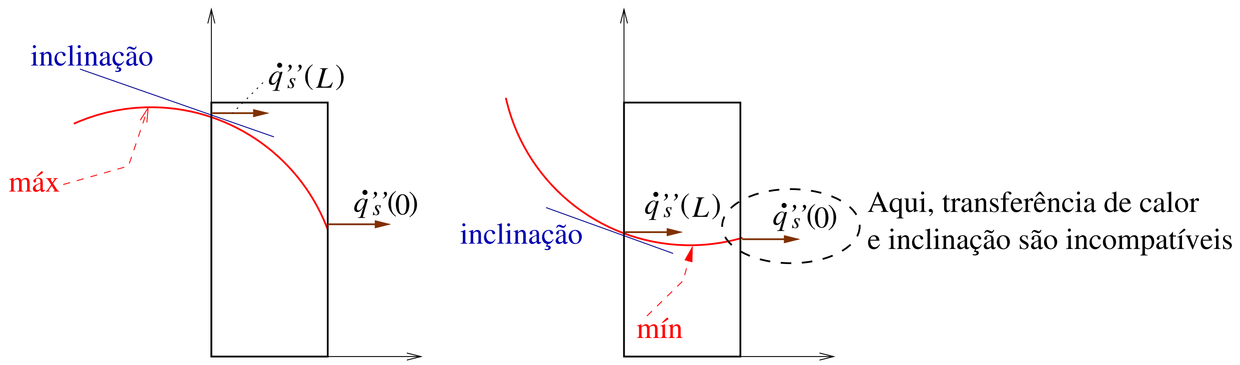
d. O sentido de $q''_s(x = L)$ se dá no sentido negativo da coordenada x. Assim, em $x = L$ isso indica que a temperatura no sentido positivo de x. Se a é negativa, o gráfico de $T(x)$ é semelhante ao da figura (A) abaixo, que mostra $T_{máx}$ em $x = L$. Se a é positiva, o gráfico de $T(x)$ deve ser semelhante ao da figura (B), que é incompatível com o sentido da transferência de calor na superfície da parede em contato com a água. Assim, a distribuição de temperatura

---

[1] b também poderia ter sisdo calculado por:

$$-k\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = -h\,(T_s - T_\infty) \Rightarrow k(a \times 0 + b) = h\,(T_s - T_\infty) \Rightarrow b = \frac{400}{20} \cdot (90 - 40) = 1000\,^\circ\mathrm{c/m}$$

deve ser como indicado na figura (A), onde $T_{máx}$ ocorre somente em $x = L$, e assim, esta fica determinada sem utilização de valores numéricos de a, b ou c.



(A) (B)

Note que outra maneira de argumentar seria: Em regime permanente o sentido do fluxo de calor não pode ser da direita para a esquerda em nenhum lugar, porque o limite esquerdo da parede é isolado. Se isto fosse verdade (fluxo de calor da direita para a esquerda) então deveria haver acúmulo de energia em algum lugar, contradizendo o regime permanente. Deste modo, a temperatura deve diminuir continuamente da esquerda para a direita e, assim, $T_{máx}$ ocorre em $x = L$.

3) Para realização dos cálculos envolvidos neste exercício, antes é necessário conhecer a taxa de geração volumétrica de energia:

$$q''' = \frac{\dot{Q}}{\forall} = \frac{4\dot{Q}}{\pi\left(D_2^2 - D_1^2\right)L} = \frac{4 \times 25 \times 10^3}{\pi \times (0{,}4^2 - 0{,}3^2) \times 17} = 26{,}75\,\mathrm{kW/m^3}$$

a. Equação diferencial (difusão do calor 1D, regime permanente, com geração de energia):

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{q'''}{k} = 0$$

Condições de contorno:

1. $T(r_1) = T_1 = 60\,^\circ\mathrm{C}$;
2. $T(r_2) = T_2 = 80\,^\circ\mathrm{C}$.

Voltando à solução da equação diferencial:

$$r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{q'''r^2}{2k} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{q'''r}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{q'''r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

Aplicando as condições de contorno:

$$60 = -\frac{26{,}75 \times 10^3 \times 0{,}15^2}{4 \times 14} + C_1 \ln 0{,}15 + C_2 \qquad 80 = -\frac{26{,}75 \times 10^3 \times 0{,}2^2}{4 \times 14} + C_1 \ln 0{,}2 + C_2$$

Resolvendo, $C_1 = 98{,}58$; $C_2 = 257{,}8$. Assim:

$$T(r) = -\frac{26{,}75 \times 10^3 r^2}{4 \times 14} + 98{,}58 \ln r + 257{,}8 = -477{,}7r^2 + 98{,}58 \ln r + 257{,}8$$

b. No plano central $r_c = (r_1 + r_2)/2 = 17{,}5\,\text{cm}$.

$$T(r_c) = -477{,}7 \times 0{,}175^2 + 98{,}58 \ln 0{,}175 + 257{,}8 = 71{,}3\,°\text{C}$$

c. Na condição de máxima temperatura, $(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r) = 0$, assim,

$$-\frac{q'''r}{2k} + \frac{98{,}58}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{26{,}75 \times 10^3 r}{2 \times 14} = \frac{98{,}58}{r} \quad \Rightarrow \quad r_{T_{\text{máx}}} = 0{,}321\,\text{m} = 32{,}1\,\text{cm}$$

Portanto $T_{máx}$ só ocorreria para um raio maior que o limite físico do exercício (20 cm). Logo **a temperatura calculada no item (b) não é a temperatura máxima**; a temperatura máxima ocorre para $r = r_2 = 20\,\text{cm}$.

4) Trata-se de um caso de condução unidimensional com geração em geometria esférica, com condutividade térmica constante. A forma apropriada da equação de difusão do calor é

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\dot{q}}{k} = -\frac{\dot{q}_o}{k}\left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]$$

Integrando em r:

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = \int -\frac{\dot{q}_o}{k}\left(r^2 - \frac{r^4}{r_o^2}\right)\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\dot{q}_o}{k}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5r_o^2}\right) + C_1$$

Integrando mais uma vez em r:

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \int\left[-\frac{\dot{q}_o}{k}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5r_o^2}\right) + \frac{C_1}{r^2}\right]\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{\dot{q}_o}{k}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20r_o^2}\right) - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Aplicamos agora as condições de contorno:

- $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0$ (simetria): $\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = -\dfrac{\dot{q}_o}{k}\left(\dfrac{0}{3} - \dfrac{0^3}{5r_o^2}\right) + \dfrac{C_1}{0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

- $-k\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_o} = h[T(r_o) - T_\infty]$: $\quad -\dfrac{\dot{q}_o}{k}\left(\dfrac{r_o}{3} - \dfrac{r_o^3}{5r_o^2}\right) = h\left[-\dfrac{\dot{q}_o}{k}\left(\dfrac{r_o^2}{6} - \dfrac{r_o^4}{20r_o^2}\right) + C_2 - T_\infty\right]$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{2r_o\dot{q}_o}{15h} + \frac{7\dot{q}_o r_o^2}{60k} + T_\infty$$

Portanto, a distribuição de temperaturas é

$$T(r) = T_\infty + \frac{2r_o\dot{q}_o}{15h} + \frac{\dot{q}_o r_o^2}{k}\left[\frac{7}{60} - \frac{1}{6}\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{r}{r_o}\right)^4\right]$$