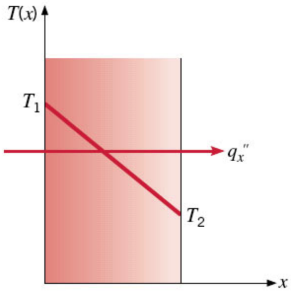
4 Condução unidimensional em regime estacionário

4.1 Parede plana sem geração



Eq. do calor: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0$

Fluxo térmico é constante, independente de x

Se k é constante, podemos integrar a eq. do calor: $T(x) = C_1 x + C_2$

Exemplos de condições de contorno: $T(0) = T_{s,1}$, $T(L) = T_{s,2}$

Assim: $C_2 = T_{s,1}$, $C_1 = \dfrac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}$

$$\therefore T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1})\frac{x}{L} + T_{s,1} \quad \rightarrow \text{distribuição linear}$$

Calor transferido: $q_x = -kA\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dfrac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2})$

Fluxo: $q''_x = \dfrac{q_x}{A} = \dfrac{k}{L}(T_{s,1} - T_{s,2})$

4.1.1 Resistência térmica

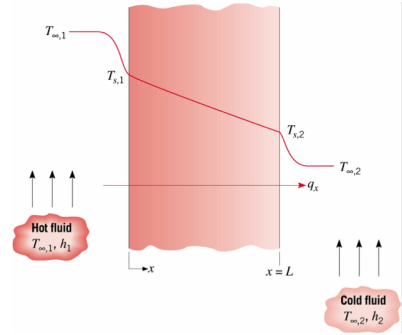
Analogia com circuitos elétricos é possível para problemas unidimensionais, sem geração interna, em regime permanente.

Elétrico: $$U = RI$$

Térmico: $$(T_{s,1} - T_{s,2}) = \frac{L}{kA} q_x$$

Resistência de condução:

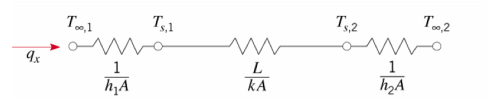
$$R_{t,\text{cond}} = \frac{L}{kA} \text{ (parede plana)}$$



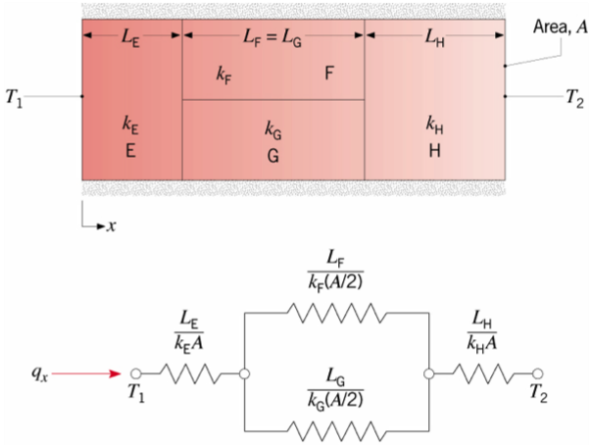
Resistência de convecção:

$$q_x = hA(T_s - T_\infty)$$

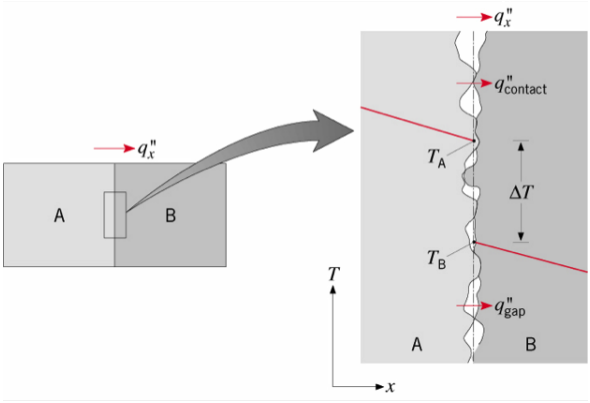
$$\therefore R_{t,\text{conv}} = \frac{1}{hA}$$



Associação pode ser feita em série ou paralelo.



4.1.2 Resistência de contato



Imperfeições na junção

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

Exercício 4

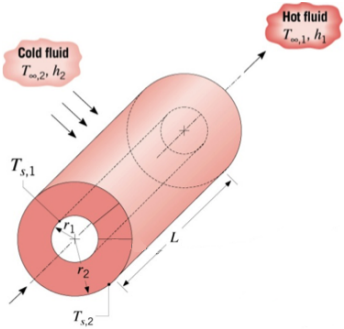
As paredes externas de um edifício são compostas por três camadas: uma placa de gesso ($k_g = 0{,}17\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$) com $10\,\mathrm{mm}$ de espessura, espuma de uretano ($k_u = 0{,}026\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$) com $50\,\mathrm{mm}$ de espessura, e uma madeira macia ($k_m = 0{,}12\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$) com $10\,\mathrm{mm}$ de espessura. Em um dia típico de inverno, as temperaturas do ar nos lados externo e interno da parede são de $-15\,°\mathrm{C}$ e $20\,°\mathrm{C}$, respectivamente, com os correspondentes coeficientes de transferência de calor por convecção iguais a $15\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$ e $5\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$.

a) Qual a carga de aquecimento necessária para um seção de $1\,\mathrm{m}^2$ da parede?

b) Qual a carga de aquecimento necessária se a parede composta for substituída por uma janela de vidro ($k_v = 1{,}4\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$) com $3\,\mathrm{mm}$ de espessura?

c) Qual a carga de aquecimento necessária se a parede composta for substituída por uma janela dupla, com duas lâminas de vidro de 3 mm de espessura separadas por um espaço de 5 mm contendo ar estagnado ($k_a = 0{,}0263\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$)?

4.2 Cilindro sem geração



Eq. do calor: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(kr\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$

$$q_r = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -k(2\pi r L)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

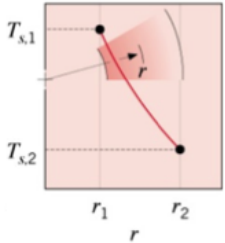
Taxa de transferência é constante, independe de r.

Para k constante: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \dfrac{C_1}{r}$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

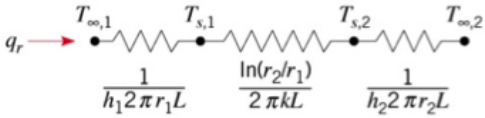
Exemplos de condições de contorno: $T(r_1) = T_{s,1}$, $T(r_2) = T_{s,2}$

Assim: $T(r) = \dfrac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\dfrac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}$



$\rightarrow$ distribuição logarítimica.

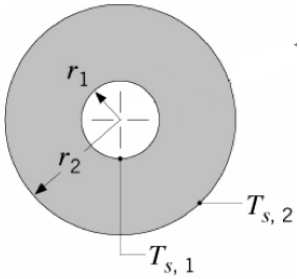
$$q_r = \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)}(T_{s,1} - T_{s,2}) \qquad R_{t,\text{cond}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k}$$



Exercício 5

Um aquecedor elétrico delgado é enrolado ao redor da superfície externa de um tubo cilíndrico longo cuja superfície interna é mantida a uma temperatura de $5\,°\mathrm{C}$. A parede do tubo possui raios interno e externo iguais a $25\,\mathrm{mm}$ e $75\,\mathrm{mm}$, respectivamente, e condutividade térmica de $10\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$. A resistência térmica de contato entre o aquecedor e a superfície externa do tubo (por unidade de comprimento do tubo) é de $R'_{t,c} = 0{,}01\,\mathrm{m \cdot K/W}$. A superfície externa do aquecedor está exposta a um fluido com $T_\infty = -10\,°\mathrm{C}$ e um coeficiente de convecção de $h = 100\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$. Determine a potência do aquecedor, por unidade de comprimento do tubo, requerida para mantê-lo a $T_o = 25\,°\mathrm{C}$.

4.3 Esfera sem geração



Eq. do calor: $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(kr^2\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$

$$q_r = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -k(4\pi r^2)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

Taxa de transferência é constante, independe de r.

Análise alternativa (k constante): $\dfrac{q_r}{4\pi}\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -k\int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}}\mathrm{d}T$

$$q_r = \frac{4\pi k}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}(T_{s,1}-T_{s,2}) \qquad R_{t,\mathrm{cond}} = \frac{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}{4\pi k}$$

Exercício 6

Uma esfera oca de alumínio, com um aquecedor elétrico no seu centro, é usada em testes para determinar a condutividade térmica de materiais isolantes. Os raios interno e externo da esfera possuem 0,15 m e 0,18 m respectivamente, e o teste é realizado em condições de regime estacionário com a superfície interna do alumínio mantida a 250 °C. Para um teste em particular, uma casca esférica de isolamento térmico é fundida sobre a superfície externa da esfera até uma espessura de 0,12 m. O sistema encontra-se em uma sala na qual a temperatura do ar é de 20 °C e o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície externa do isolamento é de $30\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$. Se 80 W são dissipados pelo aquecedor em condições de regime estacionário, qual é a condutividade térmica do isolamento testado? Dado: $k_{\mathrm{Al}} = 230\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$.