Transferência de Calor por Condução

PME3398

Prof. Antonio Luiz Pacífico

1° Semestre de 2019

Conteúdo da Aula

Lei de Fourier

Já foi apresentado no Capítulo 10 que a Lei de Fourier estabelece que o fluxo de calor numa direção genérica n, $\dot{q}''_n$, é diretamente proporcional ao gradiente de temperatura nesta direção, $\partial T/\partial n$, sendo que a constante de proporcionalidade entre estas duas grandezas é a condutividade térmica, k. Assim,

$$\dot{q}''_n = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial n}$$

O fluxo de calor é uma grandeza vetorial. Assim, em coordenadas cartesianas, é escrito como (para um meio isotrópico):

$$\vec{\dot{q}}'' = -k\vec{\nabla} T = -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \right)$$

Lei de Fourier

O fluxo de calor, $\vec{\dot{q}}''$, é sempre normal à linha de temperatura constante (isoterma).

$$\vec{\dot{q}}'' = \dot{q}_x''.\vec{i} + \dot{q}_y''.\vec{j} + \dot{q}_z''.\vec{k}$$

$$\dot{q}_x'' = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \; ; \; \dot{q}_y'' = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \; ; \; \dot{q}_z'' = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

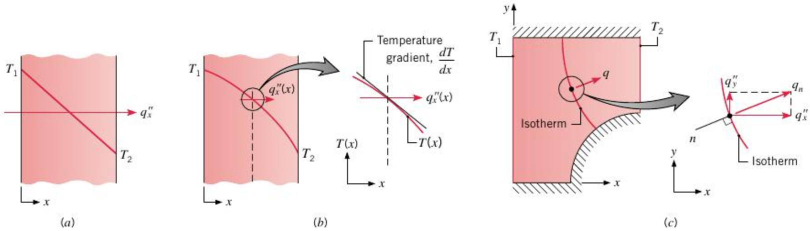


Figura: Na figura acima: $q'' \equiv \dot{q}''$.

Condutividade Térmica

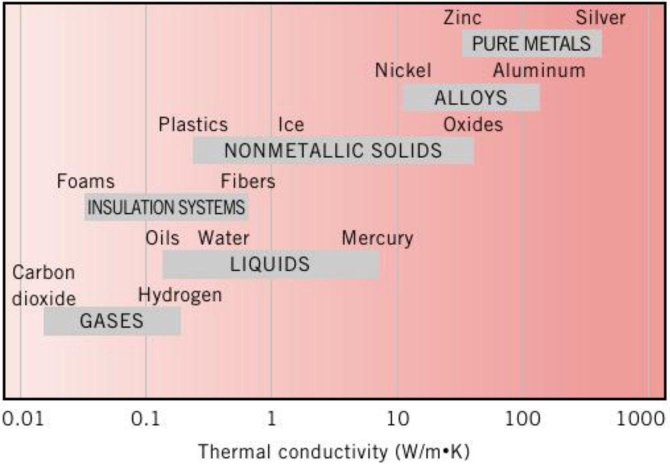
A condutividade térmica indica a taxa com a qual a energia é transferida através da matéria pelo processo de difusão de calor. Depende da estrutura física da matéria e, portanto, do seu estado.

Para um material isotrópico $k_x = k_y = k_z \equiv k$.

Em geral $k_{\text{sólido}} > k_{\text{líquido}} > k_{\text{gás}}$. Esta diferença é devida, principalmente, pelo aumento no espaçamento intermolecular (sequência sólido $\rightarrow$ líquido $\rightarrow$ gás).

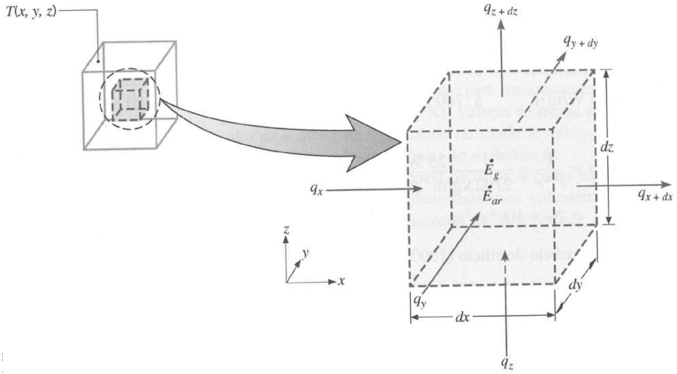
Define-se, ainda, a *capacidade calorífica volumétrica* como o produto $\rho.C_p$ (J/m^3.K), e a *difusividade térmica*, α, tal que $\alpha = k/(\rho.C_p)$ (m^2/s). A difusividade térmica é uma medida da capacidade que o material tem em conduzir calor (energia térmica) em relação à sua capacidade de armazenar esta energia.

Condutividade Térmica



Equação da Difusão do Calor

Considere o volume de controle diferencial, em coordenadas cartesianas, mostrado na figura onde há geração interna de energia, $\dot{E}_g$, armazenamento de energia, $\dot{E}_{ar}$ e entradas e saídas de taxas de calor nas três direções (na figura $q \equiv \dot{Q}$).



Equação da Difusão do Calor

As taxas de transferência de calor nas três direções para as faces de saída podem ser escritas utilizando expansão em série de Taylor, considerando somente termos de primeira ordem:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} \cdot dy$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} \cdot dz$$

A taxa de geração de energia térmica, $\dot{E}_g$, pode ser escrita em função da geração volumétrica de energia, $\dot{q}'''$:

$$\dot{E}_g = \dot{q}'''.dx.dy.dz$$

Equação da Difusão do Calor

Quando o material não sofre mudança de fase, a taxa de acúmulo de energia no VC (armazenamento) pode ser escrita como:

$$\dot{E}_{ar} = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

onde $\rho.C_p.(\partial T/\partial t)$ representa a taxa de variação de energia (sensível) do meio por unidade de volume.

Conforme visto no capítulo 10, o balanço de energia na forma de taxas para VC fornece:

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_{ar}$$

Assim, substituindo as equações encontradas para cada um dos 4 termos acima, resulta:

Equação da Difusão do Calor

$$-\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}\cdot dx - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y}\cdot dy - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z}\cdot dz + \dot{q}'''.dx.dy.dz = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}\cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

As taxas de transferência de calor podem ser escritas a partir da Lei de Fourier da seguinte forma genérica:

$$\dot{Q}_{x_i} = -k \cdot dx_j \cdot dx_k \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Substituindo as taxas assim escritas na equação de balanço e dividindo-a pelo elemento de volume, $dx.dy.dz$, resulta na forma geral do balanço de energia para VC conhecida como Equação da Difusão do Calor:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}''' = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Equação da Difusão do Calor

Para meio material isotrópico, condição simplificadora que será adotada neste capítulo, a equação da difusão reduz-se para:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou,

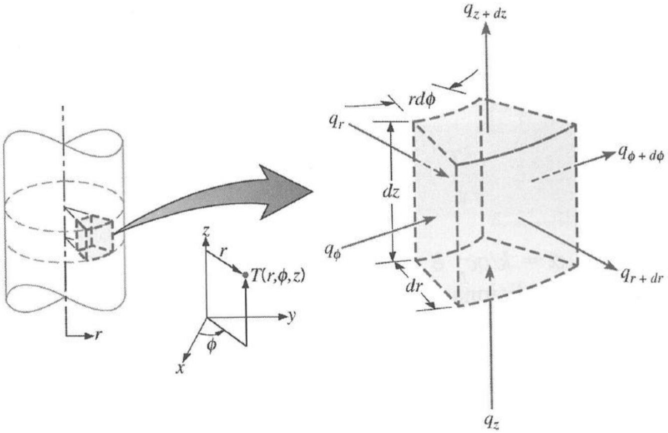
$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para transferência de calor em regime permanente, $\partial T / \partial t = 0$, assim,

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0 \; (\bigstar)$$

Equação da Difusão do Calor

Em coordenadas cilíndricas ($q \equiv \dot{Q}$, na figura abaixo):



Equação da Difusão do Calor

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\dot{q}}'' = -k\vec{\nabla}T = -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \right)$$

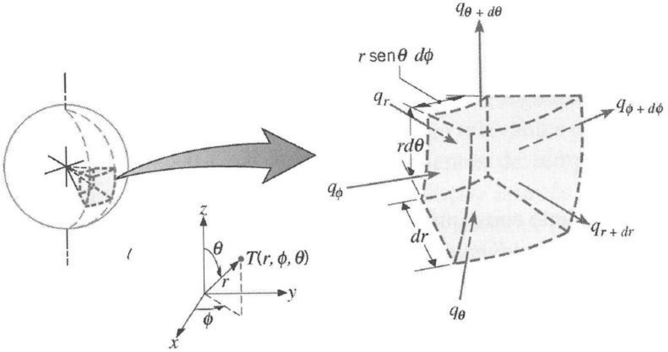
$$\dot{q}''_r = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \; ; \dot{q}''_\phi = -k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \; ; \dot{q}''_z = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

Equação da difusão (completa):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}''' = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Equação da Difusão do Calor

Em coordenadas esféricas ($q \equiv \dot{Q}$, na figura abaixo):



Equação da Difusão do Calor

Coordenadas esféricas:

$$\vec{q}'' = -k\vec{\nabla}T = -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{1}{r.\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi}\vec{k} \right)$$

$$\dot{q}''_r = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \; ; \; \dot{q}''_\theta = -k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \; ; \; \dot{q}''_\phi = -k \cdot \frac{1}{r.\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

Equação da difusão (completa):

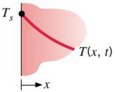
$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(k \cdot r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2.\text{sen}^2\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) +$$
$$\frac{1}{r^2.\text{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(k \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q}''' = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condições Iniciais e de Contorno

A equação da difusão é de segunda ordem no espaço e necessita portanto de duas condições de contorno espaciais; e é de primeira ordem em relação ao tempo, necessitando, portanto, de uma condição de contorno inicial.

1. Constant surface temperature

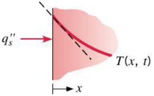
$$T(0, t) = T_s$$



2. Constant surface heat flux

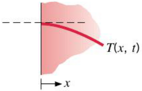
(a) Finite heat flux

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q_s''$$



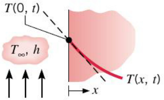
(b) Adiabatic or insulated surface

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$



3. Convection surface condition

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$



Na figura acima, $q_s'' \equiv \dot{q}_s''$.

Parede Plana

A equação da difusão do calor, para condução unidimensional (direção x), em regime permamente ($\partial T/\partial t = 0$), sem geração de energia ($\dot{q}''' = 0$), para um meio isotrópico ($k =$ constante) resume-se a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

cuja solução é uma reta, dada por:

$$T(x) = C_1.x + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas a partir de adequadas condições de contorno.

Parede Plana

Considere a figura abaixo mostrando a transferência de calor através de uma parede plana em contato com fluidos, a diferentes temperaturas, em ambos os lados (na figura, $q \equiv \dot{Q}$).

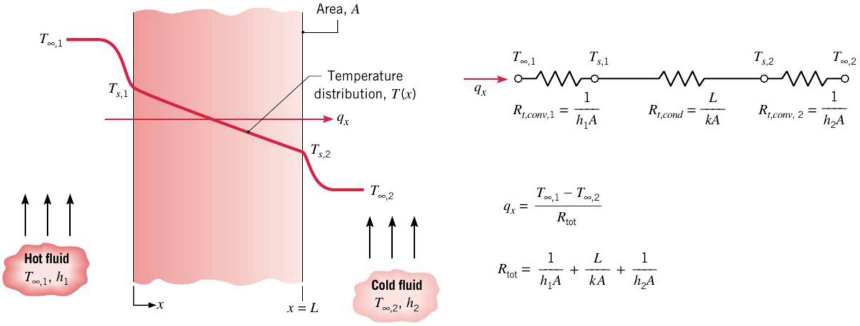


Figura: A

Parede Plana

As condições de contorno são: $T(x=0) = T_{s,1}$; e $T(x=L) = T_{s,2}$
Assim,

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \text{ ; e } C_2 = T_{s,1}$$

$$T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1}) \cdot \frac{x}{L} + T_{s,1}$$

$$\dot{Q}_x = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{k.A}{L} \cdot (T_{s,1} - T_{s,2})$$

$$\dot{q}''_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = \frac{k}{L} \cdot (T_{s,1} - T_{s,2})$$

Parede Plana

Existe uma analogia entre a taxa de transferência de calor num meio e a corrente elétrica num circuito elétrico. Neste segundo, a corrente elétrica, I, é dada pela razão entre a diferença de potencial elétrico, ΔV, e a resistência elétrica, R. De modo análogo, a taxa de transferência de calor que atravessa um meio material, $\dot{Q}$, é dada pela razão entre a diferença de potencial térmico, ΔT, e resistência térmica, R_t.

$$I = \frac{\Delta V}{R} \Longleftrightarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_t}$$

Assim, para a condução de calor na parede, entre as temperaturas $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$:

$$R_{t,cond} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\dot{Q}_x} = \frac{L}{k.A}$$

Parede Plana

O conceito de resistência térmica também está associado com a transferência de calor por convecção. Uma vez que a lei de resfriamento de Newton estabelece que:

$$\dot{Q} = h.A.\left(T_s - T_\infty\right)$$

segue-se que,

$$R_{t,conv} = \frac{T_s - T_\infty}{\dot{Q}} = \frac{1}{h.A}$$

Assim, pode-se montar circuitos térmicos associando resistências em série e/ou em paralelo conforme ilustram as Figuras A, B e C.

Parede Plana

A figura abaixo mostra uma parede composta, com todos os meios materiais em série para a taxa de transferência de calor que as atravessa (na figura, $q \equiv \dot{Q}$).

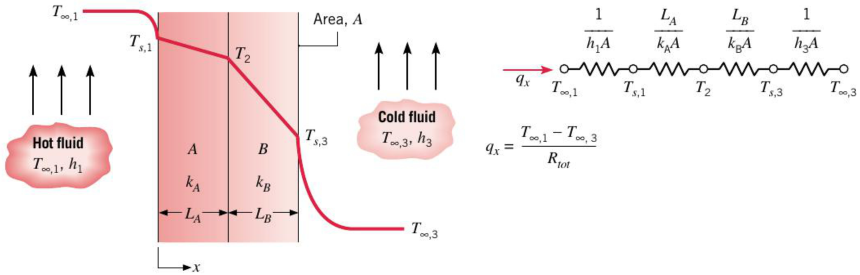


Figura: B

Parede Plana

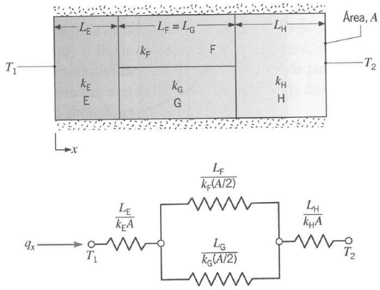
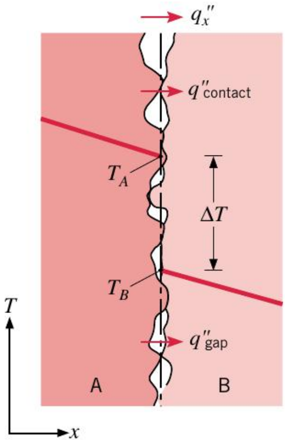


Figura: C

A figura ao lado é uma parede composta com materiais em série e paralelo. Na mesma figura é representado o circuito térmico equivalente para o cálculo da resistência térmica total, R_{tot}.

O cálculo de R_{tot} segue as mesmas regras de circuitos elétricos: para resistência em série ela é dada pela somas das resistências; e para resistências em paralelo seu inverso é dado pela somas dos inversos de cada resistência.

Resistência Térmica de Contato



As superfícies de materiais sólidos em contato não são perfeitas. Isto causa uma resistência à transferência de calor de uma superfície para a outra que é conhecida como **resistência térmica de contato**, $R_{t,c}$ (K/W). Para o desenho esquemático da figura ao lado, a resistência térmica de contato associada ao fluxo de calor que atravessa a interface entre os dois meios, $R''_{t,c}$, vale:

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q}''_x}$$

cuja unidade é K.m^2/W.

Parede Cilíndrica

A equação da difusão do calor, para condução unidimensional (direção r), em regime permamente ($\partial T/\partial t = 0$), sem geração de energia ($\dot{q}''' = 0$), para um meio isotrópico ($k =$ constante) resume-se a:

$$\frac{k}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

cuja solução é dada por:

$$T(r) = C_1 . \ln r + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas a partir de adequadas condições de contorno.

Parede Cilíndrica

Considere a figura abaixo mostrando a transferência de calor através de uma parede cilíndrica em contato com fluidos, a diferentes temperaturas, dentro e fora da parede cilíndrica (na figura, $q_r \equiv \dot{Q}_r$).

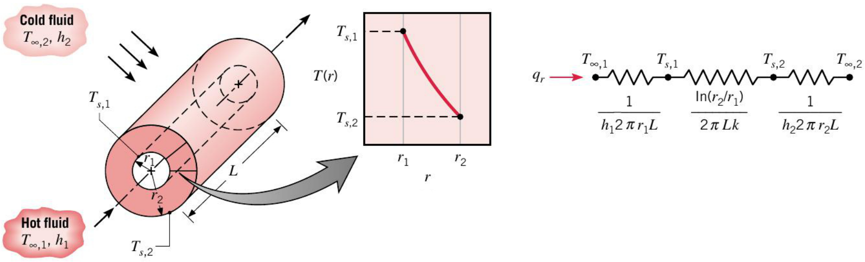


Figura: D

Parede Cilíndrica

As condições de contorno são: $T(r = r_1) = T_{s,1}$; e $T(r = r_2) = T_{s,2}$. A solução geral obtida é mostrada a seguir.

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}$$

A equação para a taxa de transferência de calor na direção radial é:

$$\dot{Q}_r = \frac{2.\pi.L.k\,(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

e, a partir desse resultado, a resistência térmica condutiva em paredes cilíndricas é dada por:

$$R_{t,cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2.\pi.L.k}$$

Parede Cilíndrica

Para mais de uma camada cilíndrica em contato, a figura E mostra um desenho esquemático e o circuito térmico equivalente (na figura, $q_r \equiv \dot{Q}_r$).

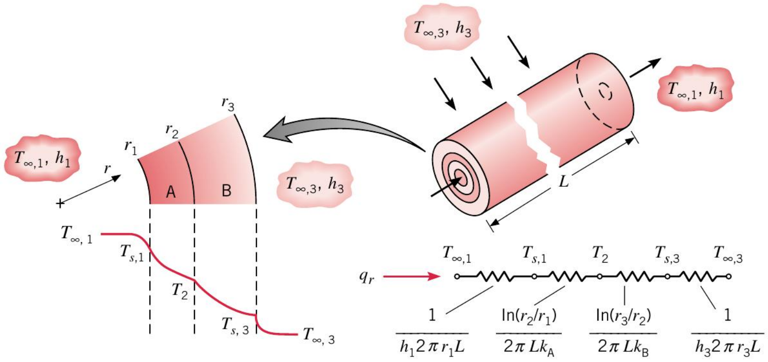


Figura: E

Parede Esférica

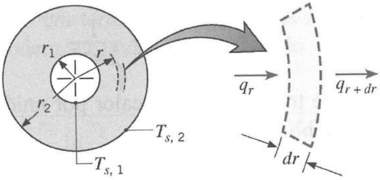


Figura: F

A Figura F apresenta uma esfera oca para a qual a equação da difusão do calor, para condução unidimensional (direção r), em regime permamente ($\partial T/\partial t = 0$), sem geração de energia ($\dot{q}''' = 0$), para um meio isotrópico ($k =$ constante) resume-se a:

$$\frac{k}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

cuja solução genérica é:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Parede Esférica

As condições de contorno são: $T(r = r_1) = T_{s,1}$; e $T(r = r_2) = T_{s,2}$. A solução geral obtida é mostrada a seguir.

$$T(r) = \frac{r_1 . r_2}{r.(r_2 - r_1)} \cdot (T_{s,1} - T_{s,2}) + \frac{r_2 . T_{s,2} - r_1 . T_{s,1}}{r_2 - r_1}$$

A equação para a taxa de transferência de calor na direção radial é:

$$\dot{Q}_r = \frac{4.\pi.k.(T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

e, a partir desse resultado, a resistência térmica condutiva em paredes esféricas (cascas) é dada por:

$$R_{t,cond} = \frac{1}{4.\pi.k} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Resumo para condução: 1D, RP, $\dot{q}''' = 0$, k =constante

Para a figura abaixo: $q'' \equiv \dot{q}''$; e $q \equiv \dot{Q}$.

	Plane Wall	Cylindrical Wall	Spherical Wall
Heat equation	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) = 0$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$
Temperature distribution	$T_{s,1} - \Delta T\frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T\frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T\left[\frac{1-(r_1/r)}{1-(r_1/r_2)}\right]$
Heat flux, q''	$k\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k\Delta T}{r\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k\Delta T}{r^2[(1/r_1)-(1/r_2)]}$
Heat rate, q	$kA\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk\Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k\Delta T}{(1/r_1)-(1/r_2)}$
Conduction thermal resistance, $R_{t,\text{cond}}$	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1)-(1/r_2)}{4\pi k}$
Convection thermal resistance, $R_{t,\text{conv}}$	$\frac{1}{hA}$	$\frac{1}{h(2\pi r_2 L)}$	$\frac{1}{h(4\pi r_2^2)}$

Sistemas com Geração Interna de Energia

Até agora considerou-se o problema da condução de calor para sistemas nos quais a distribuição de temperatura no meio (sólido) era determinada somente pelas condições na sua fronteira. Agora inclui-se o efeito adicional, nesta distribuição de temperatura, ocasionado por algum processo que ocorre no *interior* do meio. Em particular, devido à *geração* interna de energia, ocasionada por alguma forma de *conversão* de energia.

As principais geometrias abordadas neste tópico são: parede plana e sistemas radiais (cilindro e esfera).

Parede Plana com Geração Interna de Energia

A Figura G apresenta as principais condições de condução de calor em parede plana: (a) CC assimétricas; (b) CC simétricas; e (c) Sup. adiabática no plano médio (na Figura, $\dot{q} \equiv \dot{q}'''$ e $q'' \equiv \dot{q}''$).

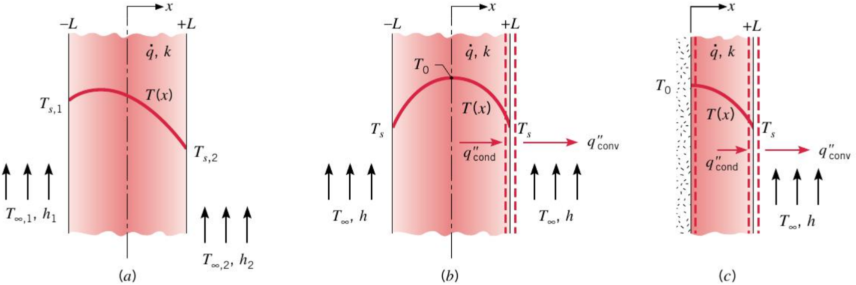


Figura: G

Parede Plana com Geração Interna de Energia

A equação da difusão de calor para meio isotrópico, em regime permanente, com geração interna de energia e unidimensional é:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0$$

cuja solução geral tem a forma:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}'''}{2.k} \cdot x^2 + C_1.x + C_2$$

As condições de contorno são (Figura G, a): $T(x = -L) = T_{s,1}$ e $T(x = L) = T_{s,2}$. Assim,

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2.L} \text{ ; e } C_2 = \frac{\dot{q}'''}{2.k} \cdot L^2 + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

Parede Plana com Geração Interna de Energia

A distribuição de temperatura, então, será dada por:

$$T(x) = \frac{\dot{q}'''.L^2}{2.k} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \cdot \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

Note que, neste caso, o fluxo de calor (calculado a partir da Lei de Fourier) não é mais independente de x. O mesmo para a taxa de transferência de calor.

Quando $T_{s,1} = T_{s,2} \equiv T_s$, o resultado acima é simplificado e tem-se uma condição de simetria em relação ao plano médio (Figura G, b). Neste caso,

$$T(x) = \frac{\dot{q}'''.L^2}{2.k} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

Parede Plana com Geração Interna de Energia

Neste caso simétrico a temperatura máxima ocorre em $x = 0$ e é dada por:

$$T_{max} = T(x = 0) = T_0 = \frac{\dot{q}'''.L^2}{2.k} + T_s$$

resultado que permite escrever a distribuição de temperatura, $T(x)$, para o caso simétrico, como:

$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

Note que, no caso simétrico, $(dT/dx)_{x=0} = 0$, o que significa que não há transferência de calor através do plano médio. Assim, o plano médio pode ser tratado como uma superfície adiabática (Figura G, c).

Parede Plana com Geração Interna de Energia

Uma conseqüência prática deste resultado é que paredes planas com geração de energia e isoladas em um dos lados podem ser tratadas com os resultados obtidos para o caso simétrico.

Quando não se conhece os valor de T_s (ou $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ no caso assimétrico), deve-se impor na superfície da parede que:

$$-k \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h.\left(T_s - T_\infty\right)$$

Utilizando, então, a equação para distribuição de temperatura no caso simétrico, obtém-se:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}'''.L}{h}$$

o caso assimétrico é deixado como exercício!

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

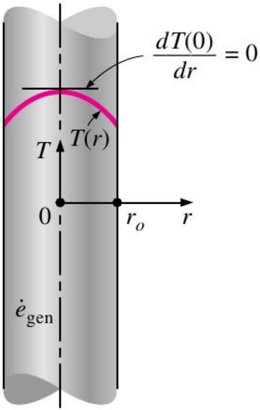


Figura: H

Para cilindros maciços, a equação da difusão de calor para meio isotrópico, em regime permanente, com geração interna de energia e unidimensional é:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0$$

cuja solução geral é dada por:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}'''}{4.k} \cdot r^2 + C_1 . \ln r + C_2$$

OBS: na Figura H, $\dot{e}_{gen} \equiv \dot{q}'''$.

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

As condições de contorno são (para caso simétrico, ou seja, geração de energia no eixo axial do cilindro):

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0 \text{ ; e } T(r = r_0) = T_s$$

Aplicando estas condições de contorno, resulta:

$$C_1 = 0 \text{ ; e } C_2 = T_s + \frac{\dot{q}'''}{4.k} \cdot r_0^2$$

E a distribuição de temperatura radial é dada por:

$$T(r) = \frac{\dot{q}'''.r_0^2}{4.k} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s$$

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

Outra forma de expressar $T(r)$, como feito no caso da parede plana, é:

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

onde T_0 é a temperatura na linha de centro, $r = 0$ ($T_0 = T_{max}$). Nesta linha, recorda-se, o fluxo de calor é nulo.

A relação da temperatura superficial, T_s, e a do fluido ao redor do cilindro é obtida, por exemplo, a partir do balanço de energia (considerando o caso onde $T_s > T_\infty$):

$$\dot{E}_s = \dot{E}_g \Rightarrow \dot{q}'''.\pi.r_0^2.L = h.2.\pi.r_0.L.(T_s - T_\infty) \therefore T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}'''.r_0}{2.h}$$

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

Para esferas maciças, a equação da difusão de calor para meio isotrópico, em regime permanente, com geração interna de energia e unidimensional é:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}'''}{k} = 0$$

cuja solução geral é dada por:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}'''}{6.k} \cdot r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

As condições de contorno são:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0 \text{ ; e } T(r = r_0) = T_s$$

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

Aplicando estas condições de contorno, resulta:

$$C_1 = 0 \text{ ; e } C_2 = T_s + \frac{\dot{q}'''}{6.k} \cdot r_0^2$$

E a distribuição de temperatura radial é dada por:

$$T(r) = \frac{\dot{q}'''.r_0^2}{6.k} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s$$

Outra forma de expressar $T(r)$, como feito no caso da parede plana, é:

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

onde T_0 é a temperatura no centro da esfera, $r = 0$ ($T_0 = T_{max}$).

Sistemas Radiais com Geração Interna de Energia

A relação da temperatura superficial, T_s, e a do fluido ao redor do cilindro é obtida, por exemplo, a partir do balanço de energia (considerando o caso onde $T_s > T_\infty$):

$$\dot{E}_s = \dot{E}_g \Rightarrow \dot{q}''' \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 = h.4.\pi.r_0^2.(T_s - T_\infty) \therefore T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}'''.r_0}{3.h}$$

OBS: O Apêndice C do livro *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*, de F. P. Incropera e D. P. DeWitt, apresenta soluções para distribuição de temperatura, fluxo de calor e taxa de transferência de calor para os casos assimétricos (temperaturas diferentes) para as três geometrias: parede plana, parede cilíndrica e parede esférica.

Exercício de Aula 1

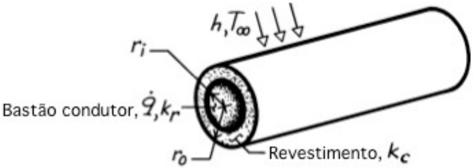
Enunciado: As temperaturas das superfícies interna e externa de uma janela de vidro, com espessura de 5 mm, são de 15 °C e 5 °C respectivamente. Qual é a perda de calor através de uma janela com dimensões de 1 m de largura por 3 m de altura? Assuma que a distribuição de temperaturas ao longo da espessura da janela é linear e que a condutividade térmica do vidro é constante e igual a 1,4 W/(m.K).

Exercício de Aula 2

Enunciado: Observa-se que a distribuição de temperatura, em estado estacionário, no interior de uma parede unidimensional com condutividade térmica de 50 W/(m.K) e espessura de 50 mm tem a forma $T = a + bx^2$, com T em °C; $a = 200$ °C; $b = -2000$ °C/m^2; e x em metros.
(a) Qual a taxa de geração de calor na parede?
(b) Determine os fluxos de calor nas duas faces da parede. De que forma esses fluxos de calor estão relacionados com a taxa de geração de calor?

Exercício de Aula 3

Enunciado: A passagem de uma corrente elétrica através de um longo bastão condutor de raio r_i e condutividade térmica k_r resulta em um aquecimento volumétrico uniforme a uma taxa $\dot{q}'''$. O bastão condutor é coberto por um revestimento de material não-condutor elétrico, com raio externo r_0 e condutividade térmica k_c. A superfície externa é resfriada pelo contato com um fluido em escoamento. Para condições de estado estacionário, escreva as formas apropriadas da equação do calor para o bastão e para o revestimento. Enuncie as condições de contorno apropriadas para a solução dessas equações.



Exercício de Aula 4

Enunciado: As paredes externas de um edifício são compostas por três camadas: uma placa de gesso [$k_g = 0,17$ W/(m.K)] com 10 mm de espessura, espuma de uretano [$k_u = 0,026$ W/(m.K)] com 50 mm de espessura, e uma madeira macia [$k_m = 0,12$ W/(m.K)] com 10 mm de espessura. Em um dia típico de inverno, as temperaturas do ar nos lados externo e interno da parede são de –15 °C e 20 °C, respectivamente, com os correspondentes coeficientes de transferência de calor por convecção iguais a 15 W/(m^2.K) e 5 W/(m^2.K).

(a) Qual a carga de aquecimento necessária para um seção de 1 m^2 da parede?

(b) Qual a carga de aquecimento necessária se a parede composta for substituída por uma janela de vidro [$k_v = 1,4$ W/(m.K)] com 3 mm de espessura?

(c) Qual a carga de aquecimento necessária se a parede composta for substituída por uma janela dupla, com duas lâminas de vidro de 3 mm de espessura separadas por um espaço de 5 mm contendo ar estagnado [$k_a = 0,0263$ W/(m.K)]?

Exercício de Aula 5

Enunciado: Um aquecedor elétrico delgado é enrolado ao redor da superfície externa de um tubo cilíndrico longo cuja superfície interna é mantida a uma temperatura de 5 °C. A parede do tubo possui raios interno e externo iguais a 25 mm e 75 mm, respectivamente, e condutividade térmica de 10 W/(m.K). A resitência térmica de contato entre o aquecedor e a superfície externa do tubo (por unidade de comprimento do tubo) é de $R'_{t,c} = 0,01$ m.K/W. A superfície externa do aquecedor está exposta a um fluido com $T_\infty = -10$ °C e um coeficiente de convecção de $h = 100$ W/(m^2.K). Determine a potência do aquecedor, por unidade de comprimento do tubo, requerida para mantê-lo a $T_o = 25$ °C.

Exercício de Aula 6

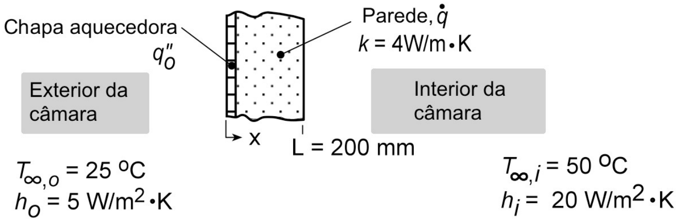
Enunciado: Uma esfera oca de alumínio, com um aquecedor elétrico no seu centro, é usada em testes para determinar a condutividade térmica de materiais isolantes. Os raios interno e externo da esfera possuem 0,15 m e 0,18 m respectivamente, e o teste é realizado em condições de regime estacionário com a superfície interna do alumínio mantida a 250 °C. Para um teste em particular, uma casca esférica de isolamento térmico é fundida sobre a superfície externa da esfera até uma espessura de 0,12 m. O sistema encontra-se em uma sala na qual a temperatura do ar é de 20 °C e o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície externa do isolamento é de 30 W/(m^2.K). Se 80 W são dissipados pelo aquecedor em condições de regime estacionário, qual é a condutividade térmica do isolamento testado? Dado: $k_{Al} = 230$ W/(m.K).

Exercício de Aula 7

Enunciado: Ar no interior de uma câmara a $T_{\infty,i} = 50$ °C é aquecido por convecção, com $h_i = 20$ W/(m^2.K), através de uma parede com 200 mm de espessura, condutividade térmica de 4 W/(m.K) e com geração uniforme de calor a uma taxa de 1000 W/m^3. Para evitar que o calor gerado no interior da parede seja perdido para o lado de fora da câmara, a $T_{\infty,o} = 25$ °C e com $h_o = 5$ W/(m^2.K), um aquecedor elétrico delgado é colocado sobre a superfície externa da parede para fornecer um fluxo térmico uniforme, $\dot{q}''_o$.
(a) Esboce a distribuição de temperatura na parede, em um sistema de coordenadas T–x, para a condição em que nenhum calor gerado no seu interior é perdido para o lado de fora da câmara.
(b) Quais são as temperaturas nas superfícies da parede, $T(0)$ e $T(L)$, para as condições da parte (a)?
(c) Determine o valor de $\dot{q}''_o$ que deve ser fornecido pelo aquecedor elétrico de modo que todo o calor gerado no interior da parede seja transferido para o interior da câmara.

Exercício de Aula 7: Continuação

(d) Se a geração de calor na parede for interrompida e o fluxo fornecido pelo aquecedor elétrico permanecer constante, qual será a temperatura em regime estacionário, $T(0)$, na superfície externa da parede.



Exercício de Aula 8

Enunciado: Um cabo de cobre, com 30 mm de diâmetro e resistência elétrica de 5×10^{-3} Ω/m, conduz uma corrente elétrica de 250 A. O cabo está exposto ao ar ambiente a 20 °C, onde o coeficiente de transferência de calor por convecção é 25 W/(m^2.K). Quais são as temperaturas na superfície e no centro do cabo de cobre?

Exercício de Aula 9

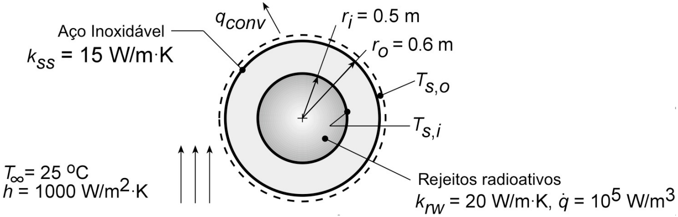
Enunciado: Rejeitos radioativos [$k_{rw} = 20$ W/(m.K)] são armazenados em um recipiente esférico de aço inoxidável [$k_{ss} = 15$ W/(m.K)], com raios interno e externo iguais a $r_i = 0,5$ m e $r_o = 0,6$ m. Calor é gerado no interior dos rejeitos a uma taxa volumétrica uniforme de $\dot{q}''' = 10^5$ W/m^3, e a superfície externa do recipiente está exposta a uma corrente de água na qual $h = 1000$ W/(m^2.K) e $T_\infty = 25$ °C.

(a) Calcule a temperatura da superfície externa do recipiente, $T_{s,o}$, em condições de regime estacionário.

(b) Calcule a temperatura da superfície interna do recipiente, $T_{s,i}$, em condições de regime estacionário.

(c) Obtenha uma expressão para a distribuição de temperatura, $T(r)$, nos rejeitos radioativos. Represente o seu resultado em termos de r_i, $T_{s,i}$, k_{rw} e $\dot{q}'''$. Calcule a temperatura em $r = 0$.

Exercício de Aula 9: Continuação



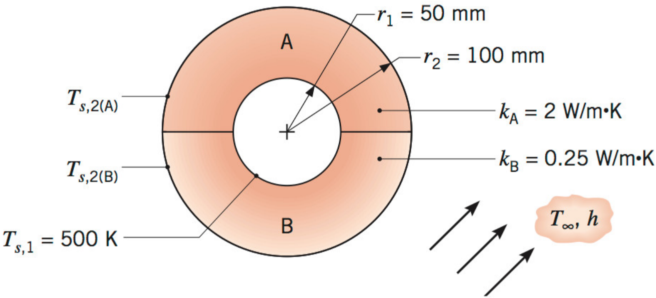
Exercício de Aula 10

Enunciado: Vapor escoando em um tubo longo, com paredes delgadas, mantém a sua parede a uma temperatura uniforme de 500 K. O tubo é coberto por uma manta de isolamento térmico composto por dois materiais diferentes, A e B. Suponha existir na interface entre os dois materiais uma resistência térmica de contato infinita. A superfície externa está exposta ao ar, onde $T_\infty = 300$ K e $h = 25$ W/(m^2.K).

(a) Esboce o circuito térmico para o sistema.

(b) Para as condições fornecidas, qual é a perda de calor total para o ambiente? Quais são as temperaturas na superfície externa, $T_{s,2(A)}$ e $T_{s,2(B)}$?

Exercício de Aula 10: Continuação



Exercício de Aula 11

Enunciado: Considere uma parede plana de espessura $L = 0,05$ m. A superfície da parede em $x = 0$ é isolada, enquanto a superfície em $x = L$ é mantida a uma temperatura de 30 °C. A condutividade térmica da parede vale $k = 30$ W/(m.K) e calor é gerado à uma taxa de $\dot{q}''' = \dot{q}_0'''.\exp\left(-0,5.x/L\right)$ W/m^3, sendo $\dot{q}_0''' = 8 \times 10^6$ W/m^3. Assumindo que a transferência de calor é unidimensional e em regime permanente:

(a) Expresse a equação diferencial e as condições de contorno para a condução de calor através da parede;

(b) Obtenha a equação para a distribuição de temperatura na parede, $T(x)$;

(c) Determine a temperatura da superfície isolada da parede.

Exercício de Aula 12

Enunciado: Vapor d'água superaquecido a 575 °C é conduzido de uma caldeira para a turbina de uma usina de geração de potência elétrica através de tubos de aço [$k = 35$ W/(m.K)], com diâmetro interno igual a 300 mm e 30 mm de espessura de parede. Para reduzir a perda térmica para a vizinhança e para manter a temperatura externa segura para o toque, uma camada de isolante de silicato de cálcio [$k = 0,10$ W/(m.K)] é aplicada nos tubos. A degradação do isolante é reduzida ao cobri-lo com uma folha fina de alumínio que possui uma emissividade $\varepsilon = 0,20$. A temperatura do ar e das paredes da planta de potência é igual a 27 °C. Considerando que a temperatura da superfície interna do tubo de aço seja igual à do vapor e que o coeficiente convectivo externo à folha de alumínio seja igual a 6 W/(m^2.K), qual é a espessura mínima de isolante necessária para garantir que a temperatura do alumínio não seja superior a 50 °C? Qual é a perda de calor correspondente, por metro de comprimento de tubo?

Exercício de Aula 13

Enunciado: Um aquecedor elétrico, capaz de gerar 10 kW, deve ser projetado. O elemento de aquecimento deve ser um fio de aço inoxidável apresentando resistividade elétrica de 80×10^{-6} Ω.cm. A temperatura operacional do aço inoxidável não deve exceder 1260 °C. O coeficiente mínimo de transferência de calor previsto na superfície externa é de 1720 W/(m^2.K), em um meio cuja temperatura máxima será de 93 °C. Um transformador capaz de libertar corrente elétrica a 12 V está disponível. Determine o tamanho adequado do fio e a corrente necessária. Sugestão: demonstre primeiro que a queda de temperatura entre o centro e a superfície do fio é independente do seu diâmetro e determine o seu valor.