Revisão de Alguns Conceitos Básicos da Física Experimental

Marcelo Gameiro Munhoz

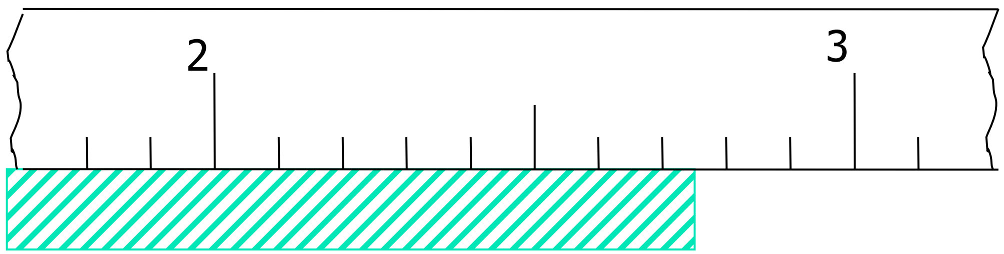
munhoz@if.usp.br

Ed. HEPIC, sala 202, r. 916940

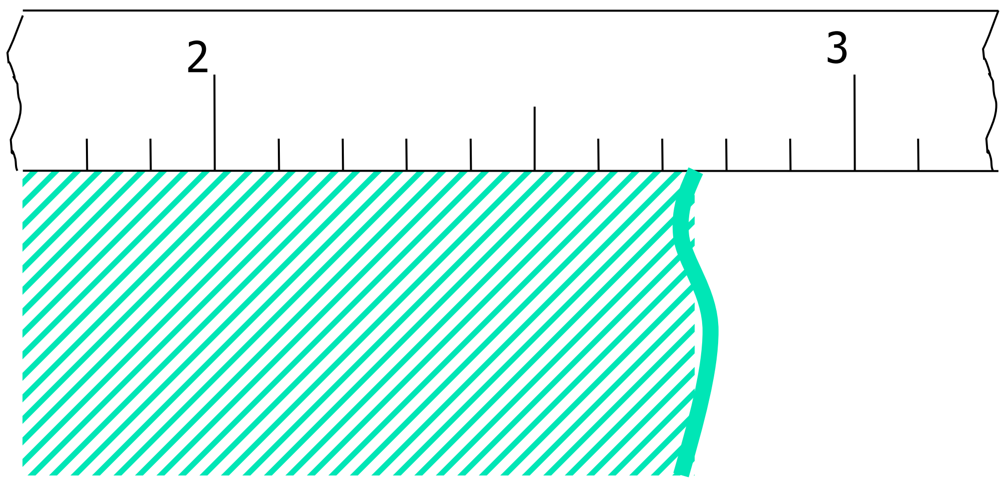
O que é uma medida?

- Medir significa quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade;
- Por exemplo, ao medir o tamanho de um objeto com uma régua, estamos comparando a marcação **calibrada** da régua com o objeto sendo medido.

Uma medida pode ser feita sem deixar dúvidas?



Por exemplo, medida da largura da folha de sulfite



Por exemplo, medida da espessura da mesa

O que isso significa?

- A cada medida repetida, ou cada experimentador diferente que realizar a medida ou cada instrumento diferente que usarmos, o resultado da medida pode ser **diferente** !
- Mas, o que isso significa?

Conceitos envolvidos em uma medida experimental

- Supondo que existe um **valor verdadeiro** associado à grandeza que está sendo medida, **nunca** iremos obter esse valor em nossas medições.
- Isso ocorre devido a características da própria grandeza sendo medida ou limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida.

Conceitos envolvidos em uma medida experimental

Definindo:

- **Erro** = *valor verdadeiro - valor medido*

  pode-se afirmar que **toda medida experimental apresenta um erro**, que precisa ser estimado e compreendido.

- **Incerteza** = *estimativa **estatística** do valor do erro*

- Portanto:

  Uma medida **sempre** terá uma **incerteza.**

Como representar uma medida?

- Toda medida deve ser representada com sua incerteza:

  (Valor ± incerteza)

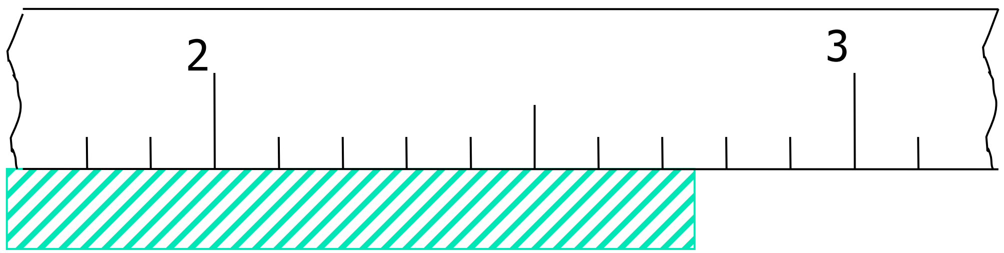
  onde:

  - a incerteza terá apenas um ou dois algarismos significativos. **Por que?**
  - a incerteza determina o número de algarismos significativos do valor medido da grandeza. **Como?**

Algarismos significativos

- Regra geral:
  - Só faz sentido colocar **um ou dois algarismos significativos** na incerteza.
  - E a incerteza **é que determina** o número de algarismos significativos da medida.
  - Forma correta: (2,74 ± 0,05) cm

Por que temos dúvidas sobre o valor desta medida?



- Se eu repetir várias vezes esta medida, devo encontrar valores diferentes?
- Provavelmente, NÃO.
- Porém, quanto podemos confiar na marcação da régua? Ela é "perfeita"? Qual seria uma boa estimativa para sua "imperfeição"?

Incerteza instrumental

- Quando a menor divisão do meu equipamento de medida é muito maior do que a definição da grandeza que estou medindo (por exemplo, largura e espessura da folha sulfite), a incerteza da medida reside na incerteza do equipamento.
- Qual é uma boa **estimativa** para a incerteza do equipamento?

  Incerteza = Metade da menor divisão
- Por que usar essa fórmula? Quais os fatores que determinam a incerteza instrumental?

Incerteza instrumental

- A incerteza instrumental tem origem na fabricação e qualidade do instrumento.
- Sua avaliação também é **estatística**.

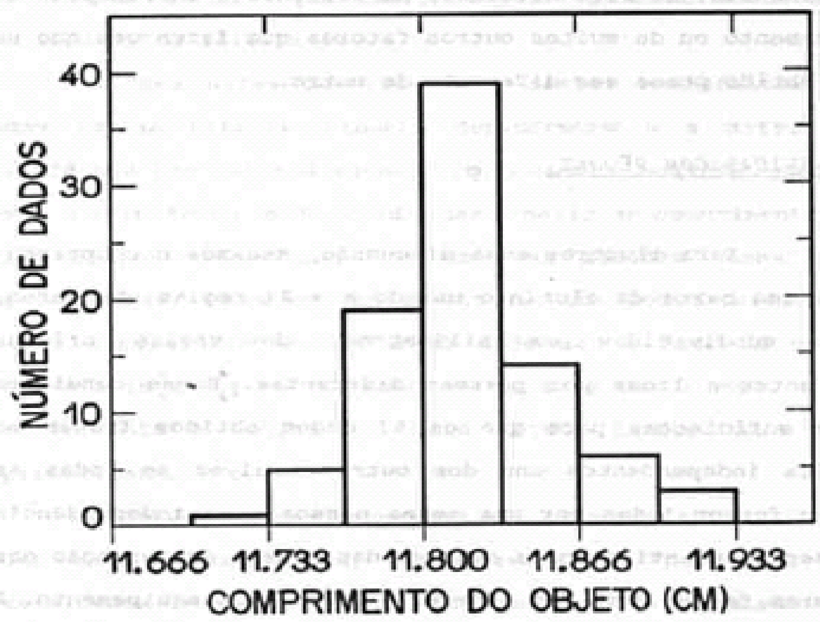
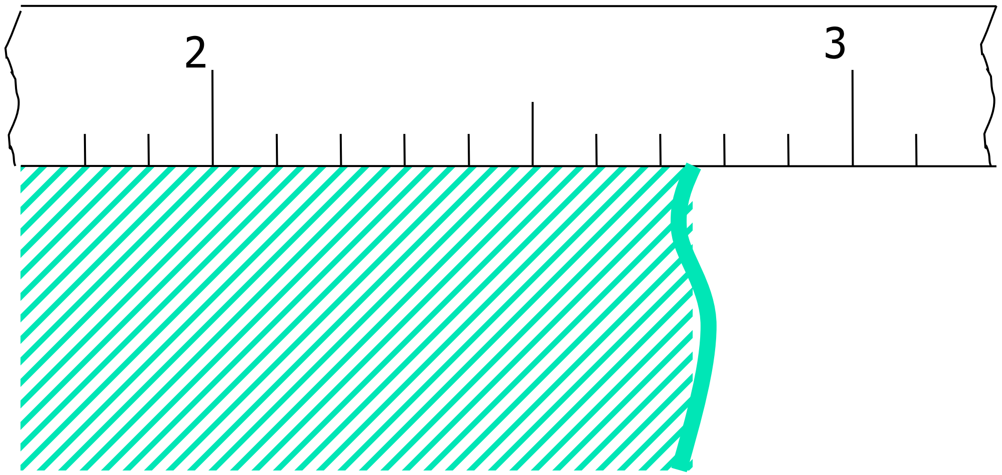


Figura 1 - Histograma dos 87 dados da medida do comprimento da barra de alumínio.

Média = 11,814 cm
Desvio padrão = 0,039 cm

Por que temos dúvidas sobre o valor desta medida?



- Se eu repetir várias vezes esta medida, devo encontrar valores diferentes?
- Provavelmente, SIM.
- Como estimar a incerteza neste caso?

Incerteza Estatística

- Quando a menor divisão do equipamento é muito menor que variações na medida devido a dificuldade de se definir a própria grandeza que estamos medindo (por exemplo, altura da mesa) ou limitações no procedimento experimental, a incerteza deve ser determinada a partir de várias medidas da grandeza.
- A variação nas medidas deve refletir a incerteza intrínseca da própria grandeza e/ou do procedimento experimental usado.

Incerteza Estatística

- **Erros Estatísticos ou Aleatórios**:
  - Resultam de variações aleatórias no resultado da medição devido a fatores que não podem ser controlados;
  - A estimativa desse erro é chamada de **incerteza estatística**;
  - Essa incerteza é obtida por métodos estatísticos, como o desvio padrão da média.

Incerteza Estatística

- Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo?
- **Quantitativamente**, precisamos:
  - do valor que representa o resultado da medida e
  - da incerteza da medida.
- Como calcular esses valores a partir de um conjunto de medidas?

Incerteza Estatística

- Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo?
- Quantitativamente:
  - Resultado da medida → Média:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

onde N medidas x_i foram realizadas

Incerteza Estatística

- Quantitativamente:
  - Incerteza → Flutuação dos dados

    Desvio Padrão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N-1}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas

  - Representa a “média” do módulo da diferença entre as medidas e a média das medidas.

Incerteza Estatística

- Mas, ao aumentar o número de medidas, nosso resultado não deveria ser melhor? Será que o desvio padrão é a incerteza da medida?
  - Incerteza da média – **Desvio Padrão da Média**:

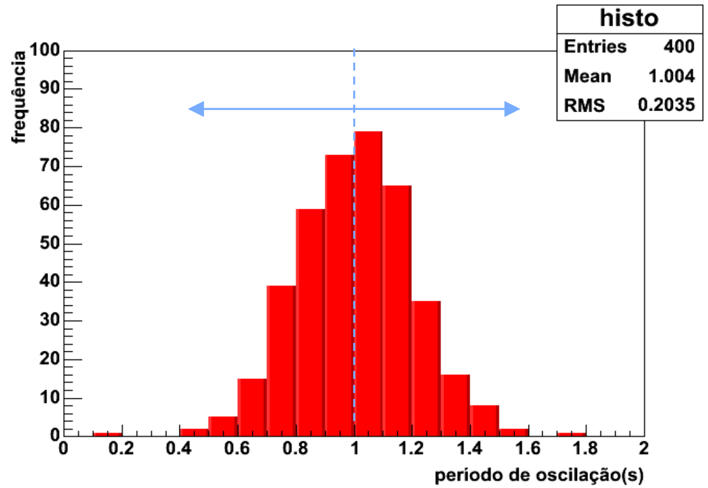
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas

Erros Estatísticos ou Aleatórios

- Inicialmente, que características devemos esperar para a **distribuição** dos dados obtidos?

- Simétrica em torno de um certo valor, e decresce ao se afastar desse valor.



Incerteza Instrumental e Estatística

- Medida do período de oscilação do pêndulo usando um relógio analógico;
- Neste caso, todas as medidas (ou quase todas) resultaram no mesmo valor. Por quê?
- Isso ocorre pois a precisão do equipamento de medida (1 s) é maior que as flutuações dos dados (~0,2 s).
- Portanto, neste caso, devemos usar a incerteza instrumental (0,5 s).

Incertezas Instrumental e Estatística

- E se as incertezas instrumental e estatística tiverem valores próximos, qual das duas devemos considerar?
- Por exemplo, na medida do período de oscilação do pêndulo com o relógio analógico:

  incerteza relógio ($s_{instrumental}$) = 0,5 s ;

  incerteza estatística ($s_{estatistico}$) .
- Nesse caso, combinamos as duas com uma soma quadrática:

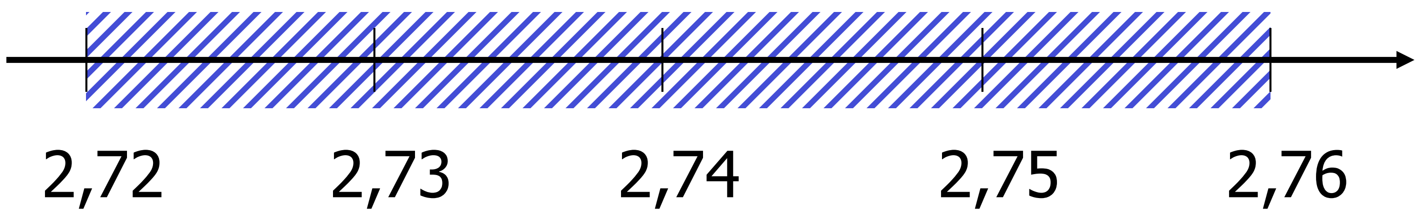
$$\boxed{s = \sqrt{\left(s_{estatistico}\right)^2 + \left(s_{instrumental}\right)^2}}$$

Incertezas Sistemáticas

- Incertezas sistemáticas são aquelas que, ao invés de causar uma flutuação nos dados, elas alteram os dados **sempre para a mesma direção;**
- Por exemplo, se o zero do micrômetro estiver deslocado de 0,5 mm, todas as suas medidas estarão 0,5 mm maior;
- Incertezas sistemáticas, quando encontradas, podem ser usadas para corrigir os dados.

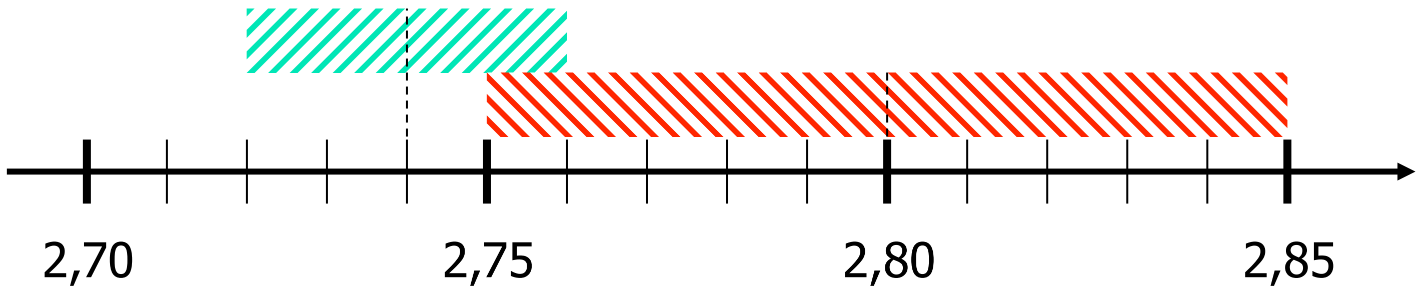
Como interpretar o significado da incerteza?

- O que significa dizer que minha medida, é 2,74 ± 0,02 mm?
- Eu tenho **confiança** que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre (2,74 - 0,02) e (2,74 + 0,02):

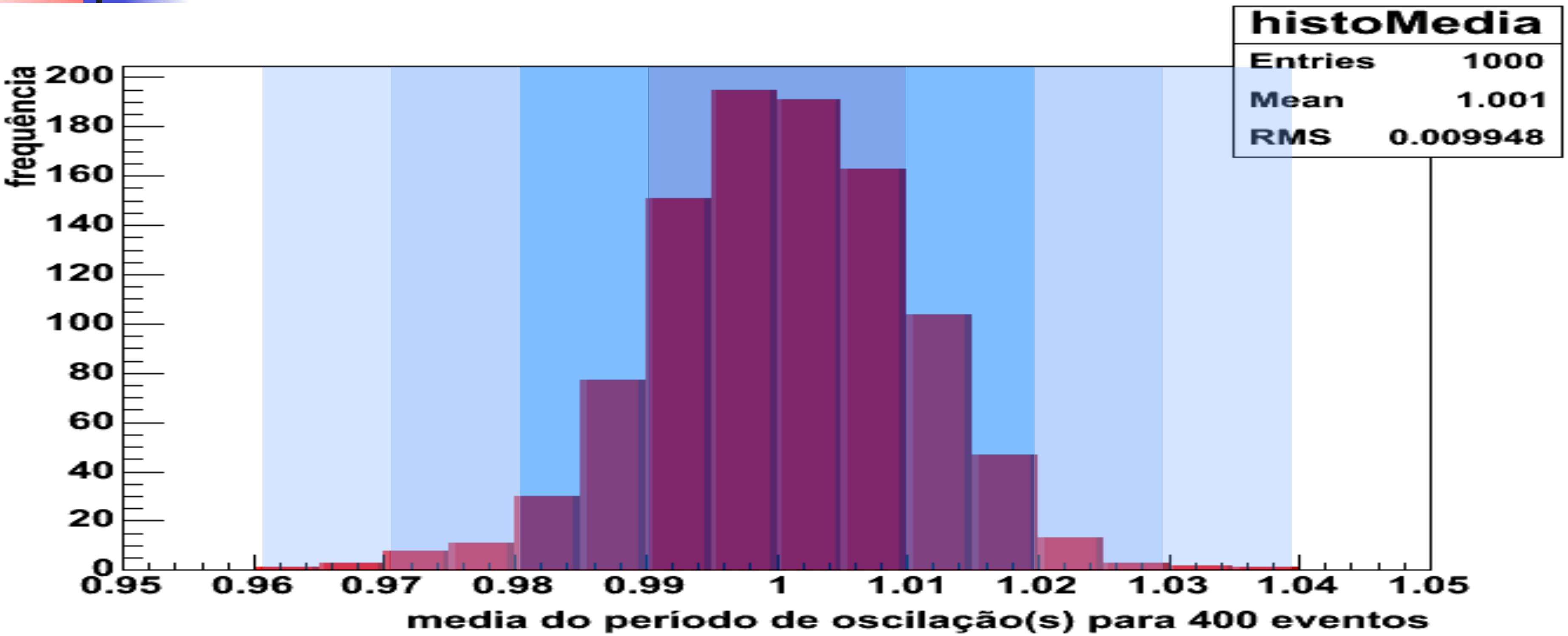


Como comparar os resultados de duas medidas?

- É preciso se levar em consideração **sempre** a incerteza de medida.
- Como devemos considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de "iguais";
- Por exemplo, 2,74 ± 0,02 mm é compatível com 2,80 ± 0,05 mm ?



Média (Valor da Medida) e Desvio Padrão da Média (Incerteza)



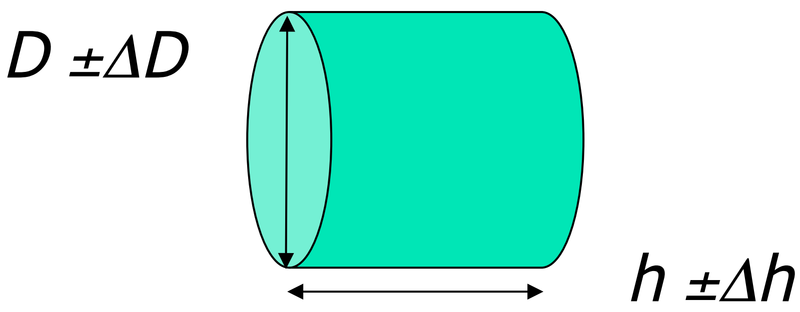
Quase Impossível	Muito Pouco Provável	Pouco Provável	Provável	Muito Provável	Provável	Pouco Provável	Muito Pouco Provável	Quase Impossível

Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- SIM !!!
- A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se **propaga** para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).
- O volume de um cilindro é dado por:

  $V = \pi\,(D/2)^2 h$

  onde, D é o diâmetro do cilindro e h a sua altura.



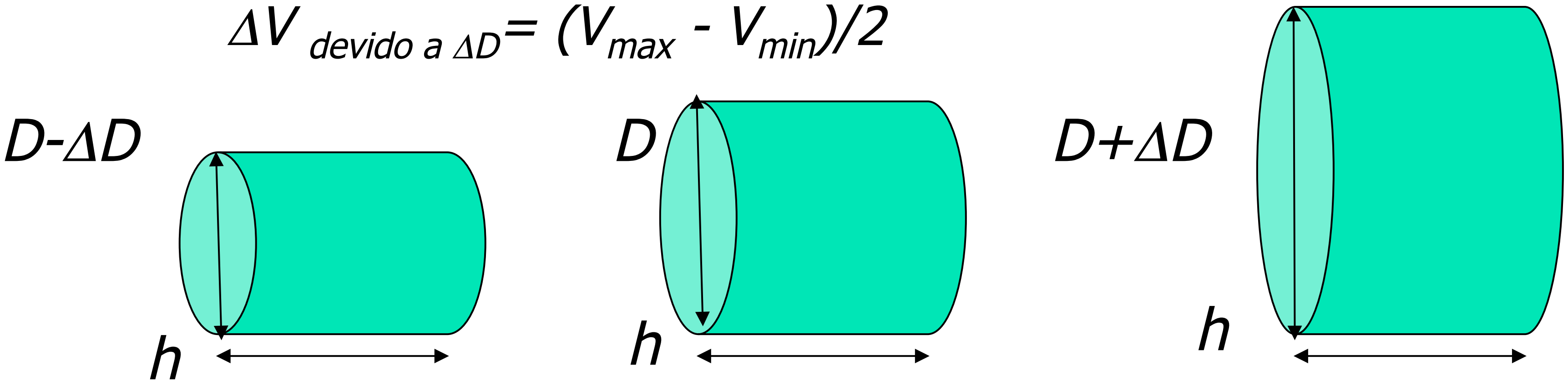
Propagação de incerteza

- Neste caso iremos calcular a incerteza no volume **devido** a incerteza no raio e a incerteza no volume **devido** a incerteza na altura e depois **combinar** as duas incertezas.
- Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

V_{max} (devido a ΔD) $= \pi[((D+\Delta D)/2)]^2 h$

V_{min} (devido a ΔD) $= \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$

$\Delta V_{\text{devido a } \Delta D} = (V_{max} - V_{min})/2$



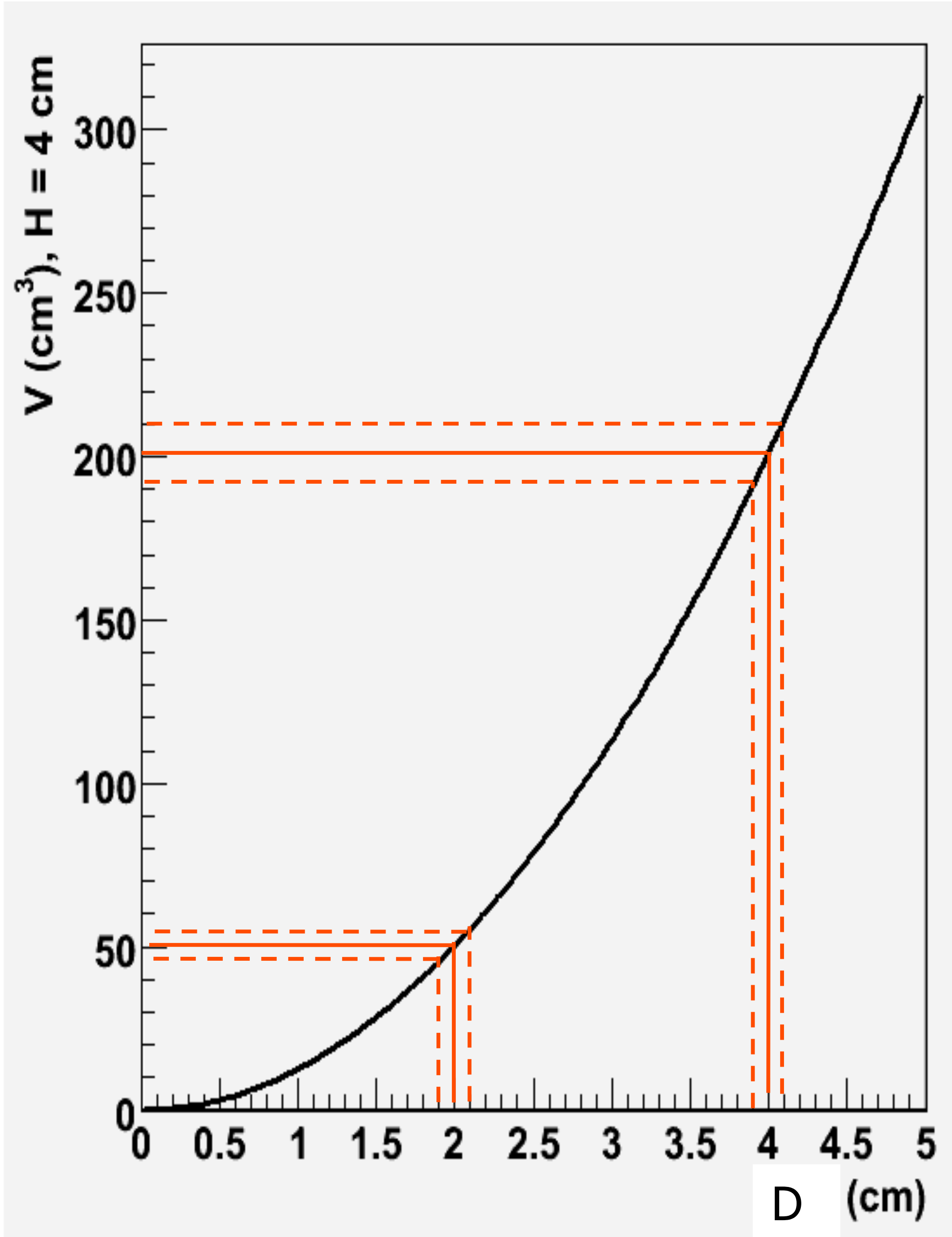
Propagação de incertezas

- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot h$$

é fácil perceber que:

$$s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$



Propagação de incerteza

Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x' \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x') - f(x-\Delta x')}{2\cdot \Delta x'}\right)$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D) - V(D-s_D)}{2}\right]\cdot \frac{s_D}{s_D}$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D) - V(D-s_D)}{2\cdot s_D}\right]\cdot s_D \quad \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D}\cdot s_D$$

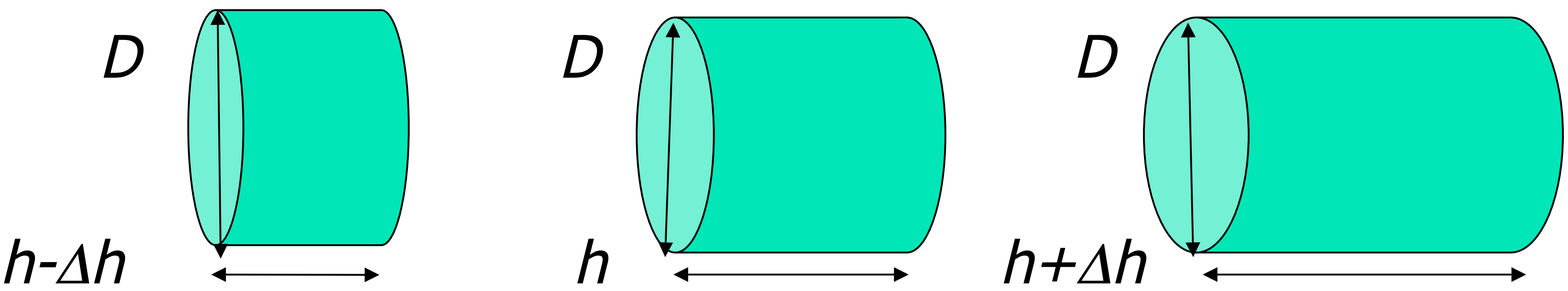
Propagação de incerteza

- Neste caso iremos calcular a incerteza no volume **devido** a incerteza no raio e a incerteza no volume **devido** a incerteza na altura e depois **combinar** as duas incertezas.
- Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max}\,(devido\ a\ \Delta h) = \pi(D/2)^2(h+\Delta h)$$

$$V_{min}\,(devido\ a\ \Delta h) = \pi(D/2)^2(h-\Delta h)$$

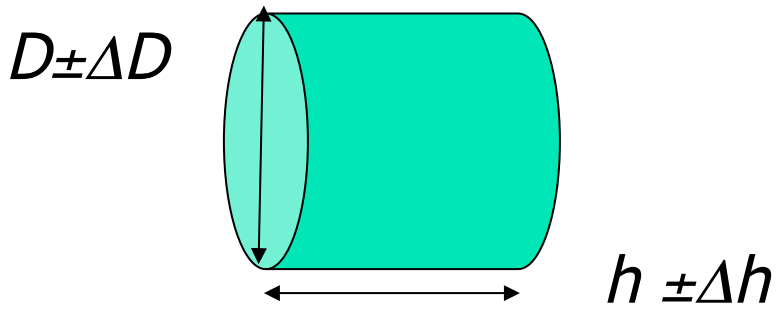
$$\Delta V_{devido\ a\ \Delta h} = (V_{max} - V_{min})/2$$



Propagação de incerteza

- E combinamos as duas incertezas **com uma soma quadrática**. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é **independente** da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$



Propagação de incerteza

- A incerteza do volume do cilindro *(s_V)* é dada pela **propagação** das incertezas do diâmetro *(s_V^D)* e da altura *(s_V^h)*, ou seja, a incerteza em *V* devido a incerteza em *D* e a incerteza em *V* devido a incerteza em *h*:

$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2}$$

- E como calcular s_V^D e s_V^h ?

Propagação de incerteza

$$s_V^h = \left[\frac{V(h+s_h)-V(h-s_h)}{2\cdot s_h}\right]\cdot s_h \quad \Rightarrow s_V^h = \frac{\partial V}{\partial h}\cdot s_h$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D+s_D)-V(D-s_D)}{2\cdot s_D}\right]\cdot s_D \quad \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D}\cdot s_D$$

Portanto:

$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \cdot s_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot s_h^2}$$

Propagação de incerteza

- Expressão geral:
- Dada uma grandeza *f* que depende de outras grandezas *x*, *y*, ..., *z*, tem-se que:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot {s_x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot {s_y}^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot {s_z}^2}$$

Representação Gráfica

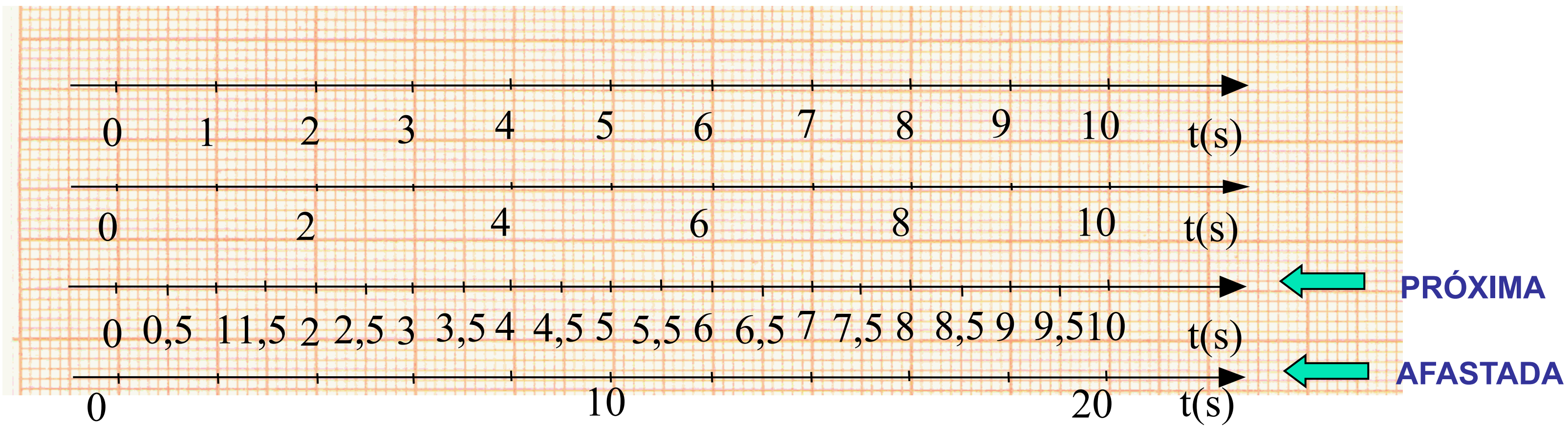
- A representação gráfica de dados é uma ferramenta muito poderosa durante a análise de um experimento
- Vamos tomar como exemplo o estudo de um corpo em queda livre.
- Medimos a posição em função do tempo, obtendo a velocidade do objeto em queda em função do tempo.

Representação Gráfica

- Representaremos graficamente a velocidade (eixo-y ou variável dependente) em função do tempo (eixo-x ou variável independente).
- Não se esqueça ao fazer o gráfico de:
  - Escolher uma escala adequada para os eixos, isto é, a relação entre *segundos* (no caso do eixo-x) ou *cm/s* (no caso do eixo-y) e os centímetros do papel devem facilitar a leitura do gráfico;
  - Não esquecer de colocar legenda e unidade nos eixos;
  - Represente a incerteza na velocidade (como?).

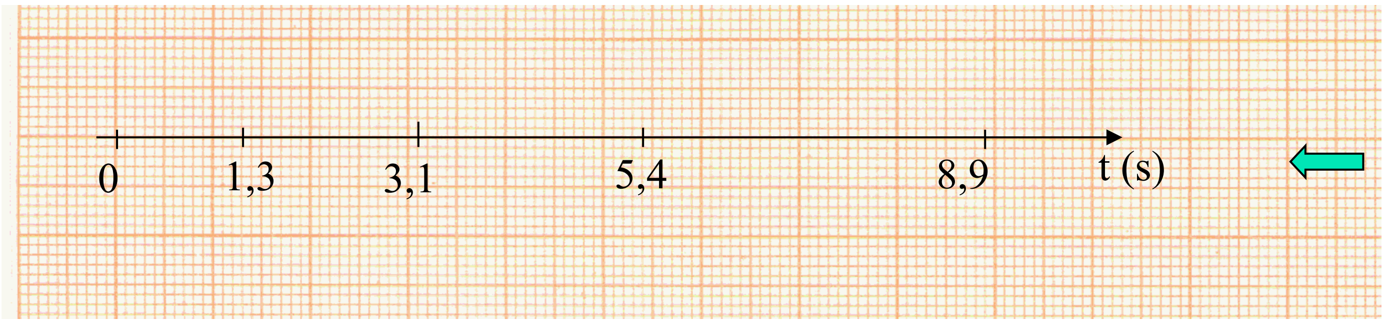
Eixos em um gráfico

- Deve-se escolher a escala que melhor se adapte ao tamanho do papel utilizado
  - **IMPORTANTE: Não use escalas difíceis de se compreender. Sempre utilize escalas "múltiplas" de 1, 2 ou 5**
- Gradue os eixos de 1 em 1 cm (ou 2 em 2). **Evite** escalas muito espaçadas ou muito comprimidas



Eixos em um gráfico

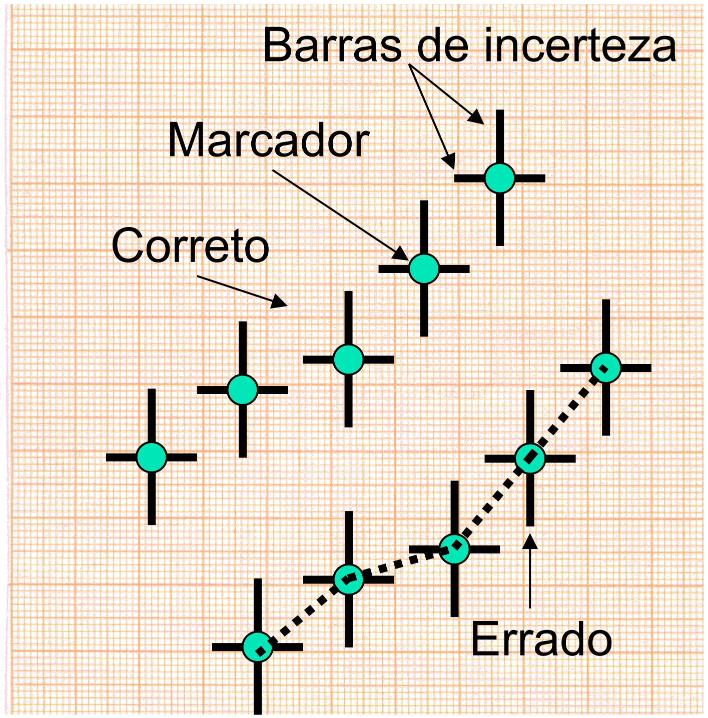
- Desenhe os eixos. Não utilize os eixos e escalas pré-desenhadas no papel
- Coloque legendas em cada um dos eixos
- **NUNCA escreva os valores dos pontos nos eixos nem desenhe traços indicando os pontos**



Não !

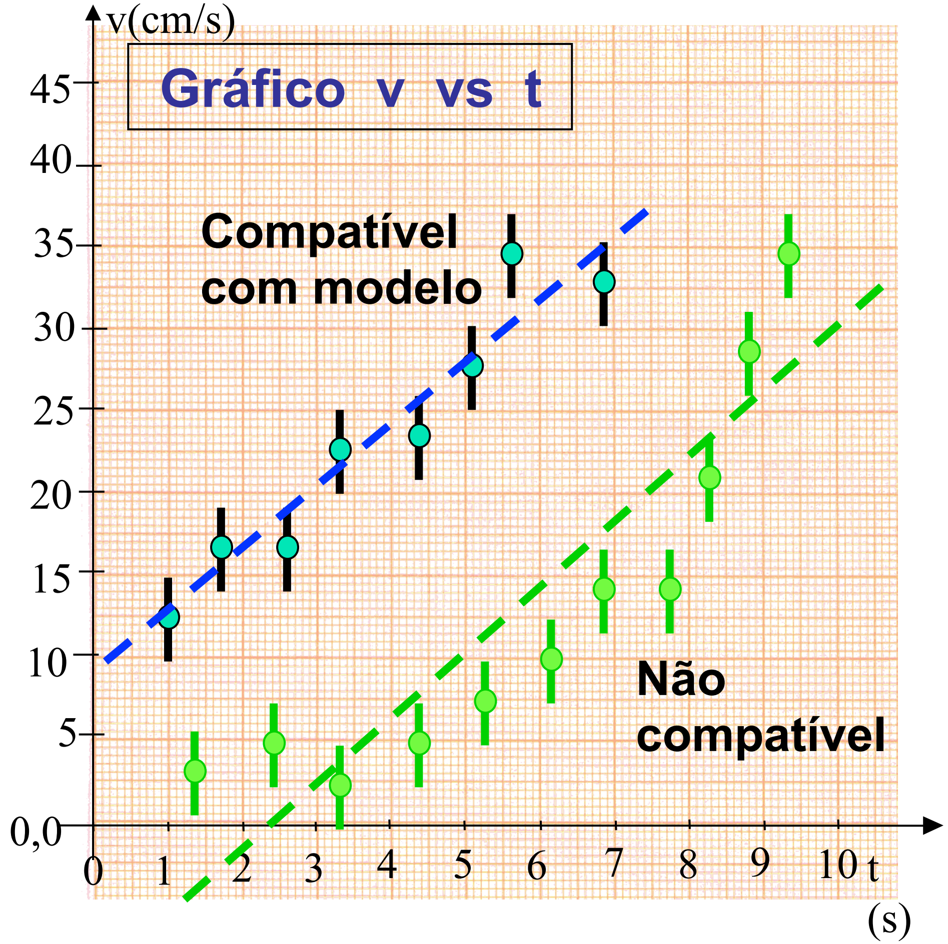
Representação dos pontos no gráfico

- Utilize marcadores visíveis
- Represente as barras de incerteza em y e x (quando houver) de forma clara
- **NUNCA LIGUE OS PONTOS**
- Conjunto de dados diferentes devem ser representados com símbolos (ou cores) diferentes.



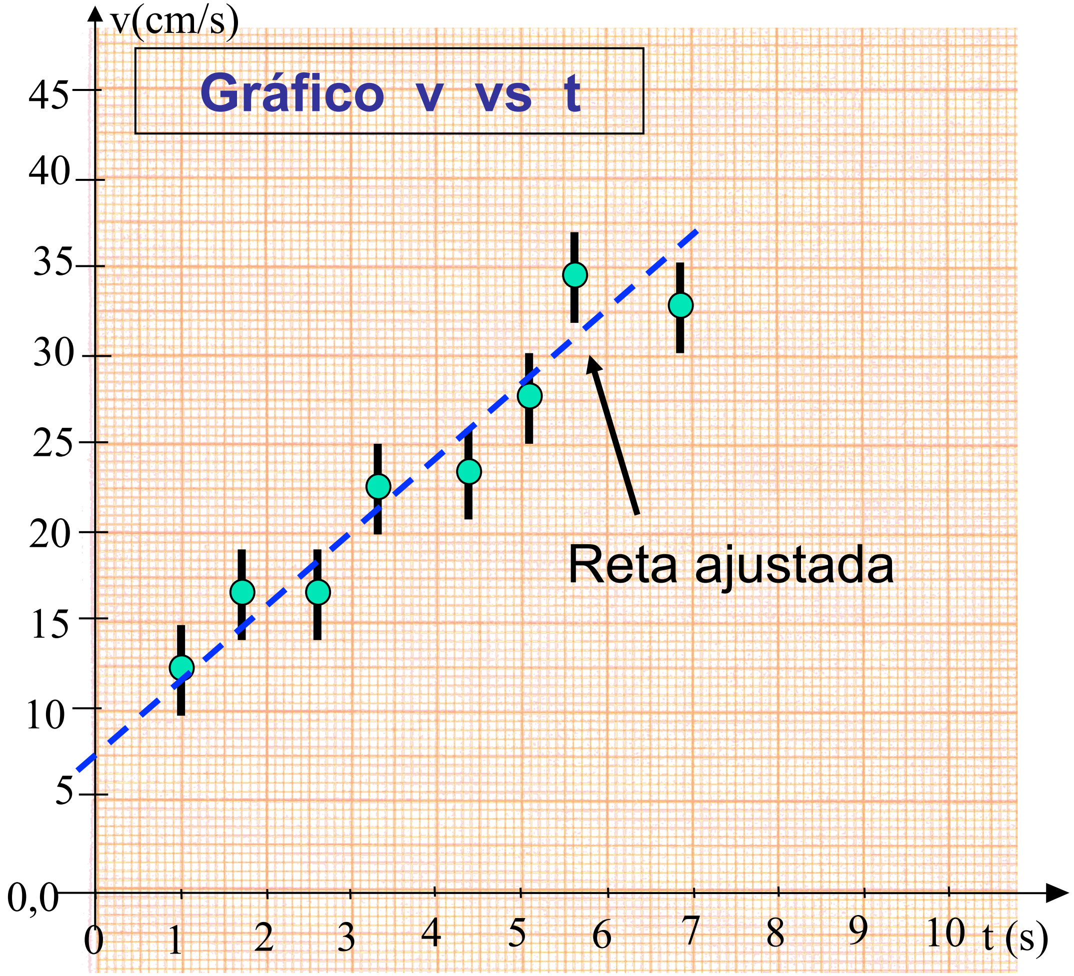
Ajuste de função

- Uma vez com o gráfico, como podemos verificar se a velocidade (*v(t)*) apresenta uma dependência linear com o tempo (*t*), isto é, $v(t)=v_0+g \cdot t$?
- Podemos tentar **ajustar** uma reta aos dados, isto é, nos perguntar se pode existir uma reta que **descreva bem** os nossos dados.



Ajuste de função

- Em caso afirmativo, como encontrar a reta que descreve bem os dados?
- Ela será a reta que **mais se aproxima** de todos os pontos experimentais considerando-se as incertezas como "peso"



Representação Gráfica

- Utilizando o gráfico de $v(t) \times t$, podemos encontrar a reta que mais se aproxima dos pontos, ou seja, a reta que **se ajusta** aos nossos dados;
- Uma vez encontrada a reta, podemos extrair os seus **parâmetros**:

  $y = a + b \cdot x$

  onde, a é o coeficiente linear da reta e

  b é o coeficiente angular da reta

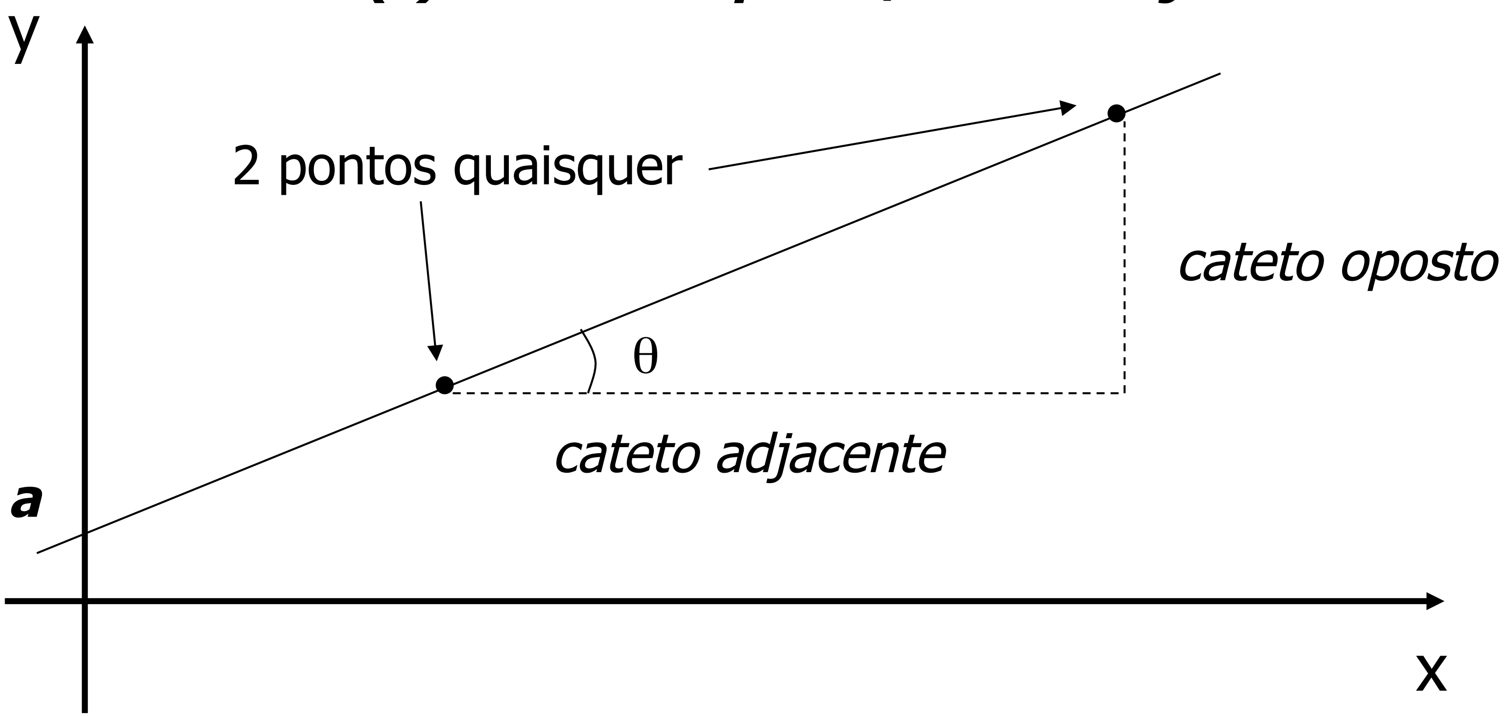
Análise Gráfica

- Como extrair esses parâmetros da reta ajustada?
- O coeficiente linear (*a*) será o ponto em *y* que a reta cruza o eixo vertical ($x=0$);
- O coeficiente angular (*b*) é dado pela inclinação da reta ($tan(\theta)$):

  $b = tan(\theta) = cateto\ oposto/cateto\ adjacente$

Análise Gráfica

b = tan(θ) = cateto oposto/cateto adjacente



Análise Gráfica

- Qual é a interpretação que podemos dar aos parâmetros da reta?
- Se os pontos se comportam de maneira linear, isso será uma indicação que o modelo da queda livre é bom para representar nossos dados;
- Portanto, a interpretação dos parâmetros é:

$$y = a + b \cdot x$$

$$v(t) = v_0 + g \cdot t$$

Análise Gráfica

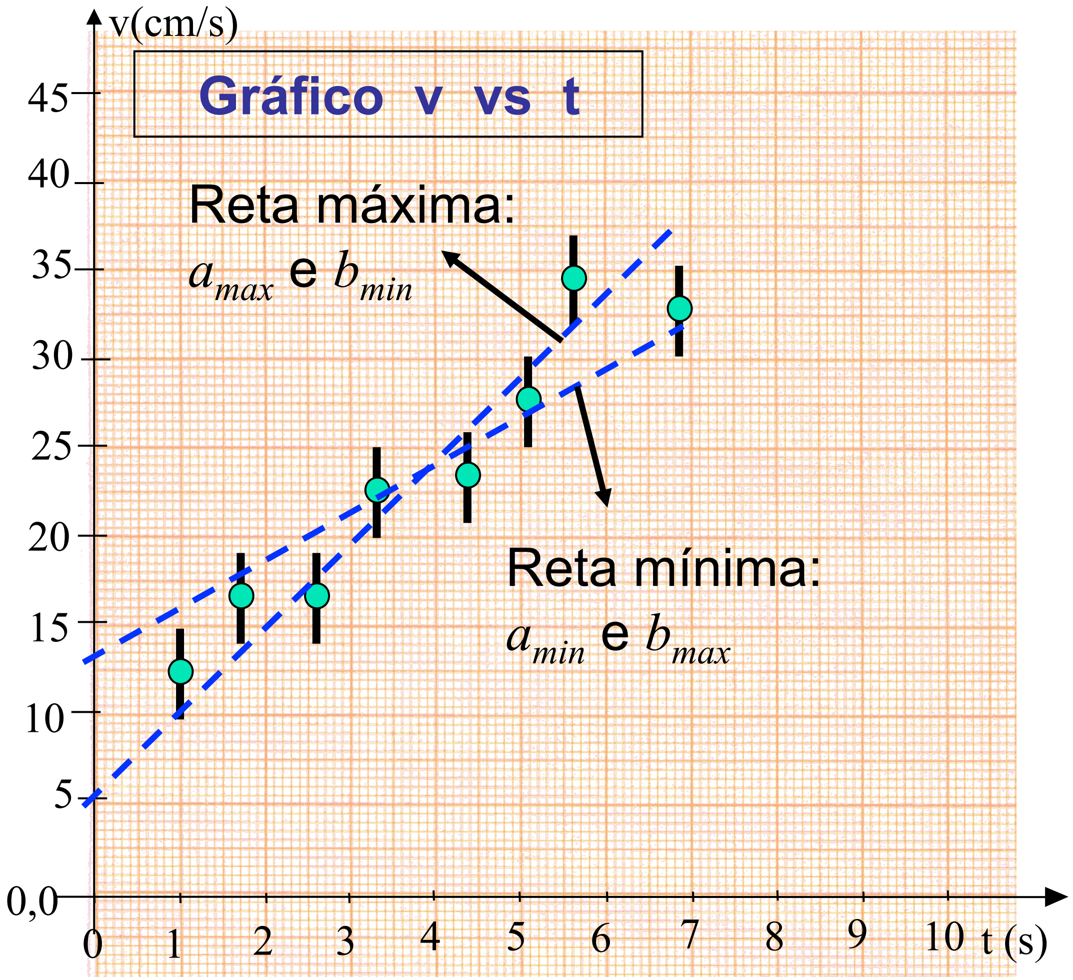
- Se o modelo de queda livre é adequado, e $y = v(t)$, $x = t$, temos:

  $a = v_0$ e $b = g$
- Será que os valores obtidos são razoáveis? Como avaliar isso?
- Precisamos das incertezas de a (v_0) e b (g).

Análise Gráfica

- Qual é a incerteza de a (v_0) e b (g)? Como podemos estimá-la?
- Também o faremos graficamente:
  - tomando a reta de maior inclinação possível que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros máximo a_{max} e mínimo b_{min};
  - e a reta de menor inclinação possível que ainda descrevem os pontos , o que determina os parâmetros mínimo a_{min} e máximo b_{max};

Análise Gráfica



Análise Gráfica

- As incertezas de a (v_0) e b (g) são dadas por:
  $\Delta a = (a_{max} - a_{min})/2$ e
  $\Delta b = (b_{max} - b_{min})/2$
- Uma vez com as incertezas calculadas, podemos avaliar se o resultado está de acordo com o modelo da queda livre, isto é, se os valores dos parâmetros estão compatíveis com os valores esperados segundo o modelo.