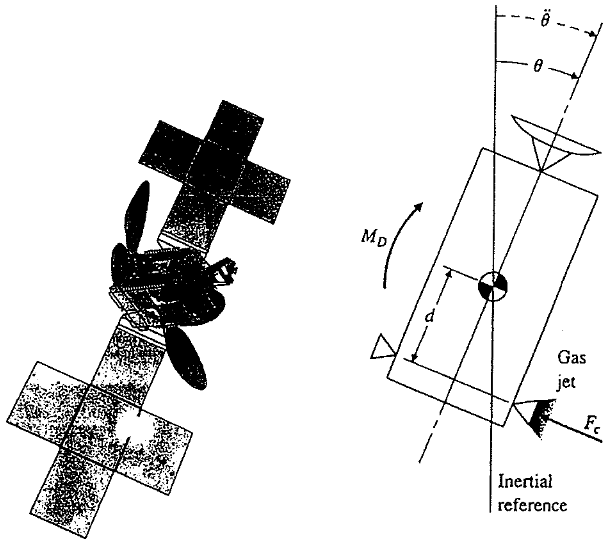
Nome: ______________________________

NUSP: ______________________________

PMR2360 - Controle e Automação I
Prova 1 - 01 de Outubro de 2010
Duração da prova - 80 minutos

Satélites (Veja figura abaixo) requerem usualmente controle de atitude de tal maneira que as antenas, sensores e painéis solares estejam orientados apropriadamente. Muitas vezes, ao invés do movimento de atitude nos três eixos, realiza-se a análise em cada eixo separado.



A figura ilustra o diagrama esquemático de um satélite que pode-se movimentar apenas no eixo perpendicular à esta folha de papel. O ângulo θ é medido em relação a um referencial inercial. O sinal de controle provêm de pequenos jatos que produzem um momento igual a $F_c \times d$ em torno do centro de gravidade.

Momentos representando distúrbios são representados por M_d.

A equação de movimento do satélite pode então ser representada por:

$$F_c(t)d + M_D(t) = I\ddot{\theta}(t) \tag{1}$$

onde I é o momento de inércia.

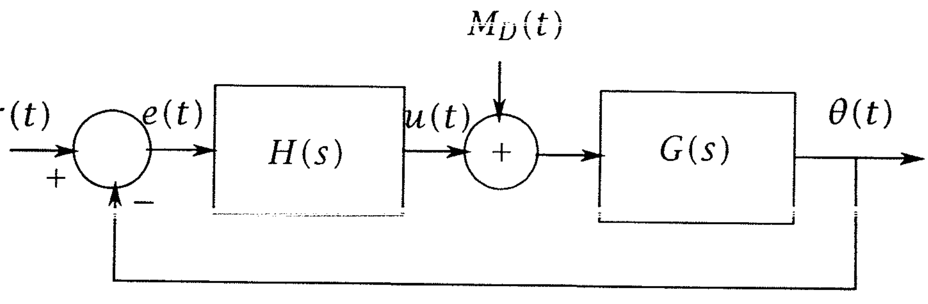
A função de transferência do sistema malha aberta pode ser escrita como:

$$\Theta(s) = \frac{1}{I}\frac{1}{s^2}U(s) + \frac{1}{I}\frac{1}{s^2}M_D(s). \tag{2}$$

onde $U(s) = F_c(s)d$

[Q. 1] (1.0pt) Considerando somente a entrada $U(s)$, calcule a resposta no domínio do tempo para uma entrada degrau $u(t) = A$.

[Q. 2] (1.0pt) Deseja-se projetar um sistema de controle em malha fechada como mostrado na figura abaixo.



As seguintes especificações são requeridas:

- Erro estacionário nulo para entrada do tipo degrau $R(s) = A/s$ e distúrbio do tipo degrau $M_D(s) = B/s$,
- Tempo de assentamento $t_s < 4seg$,
- Máximo sobresinal $M_P < 5\%$.

Desenhe o lugar geométrico no plano s que contenham os pólos do sistema de 2a. ordem padrão que satisfaçam os requisitos de tempo de assentamento t_s e máximo sobresinal M_P. (OBS: sistema de 2a. ordem padrão é dado por $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$)

[Q. 3] (3.0pt) Inicialmente, deseja-se projetar um sistema de controle proporcional $H(s) = K_p$.

(a) (0.5pt) Qual a faixa de valores de K_P em que o sistema é estável ?

(b) (0.5pt) Utilizando este controlador é possível fazer com que o erro estacionário seja nulo para uma entrada degrau $R(s) = A/s$ e para um distúrbio do tipo degrau $M_D(s) = B/s$?

(c) (1.0pt) Desenhe o lugar das raízes em função de K_p. Considere $I = 1$.

(d) (1.0pt) Qual a faixa de valores de K_P que satisfazem as especificações de controle desejadas.

[Q. 4] (3.0pt) Deseja-se agora utilizar um controlador proporcional derivativo $H(s) = (K_P + K_D s)$.

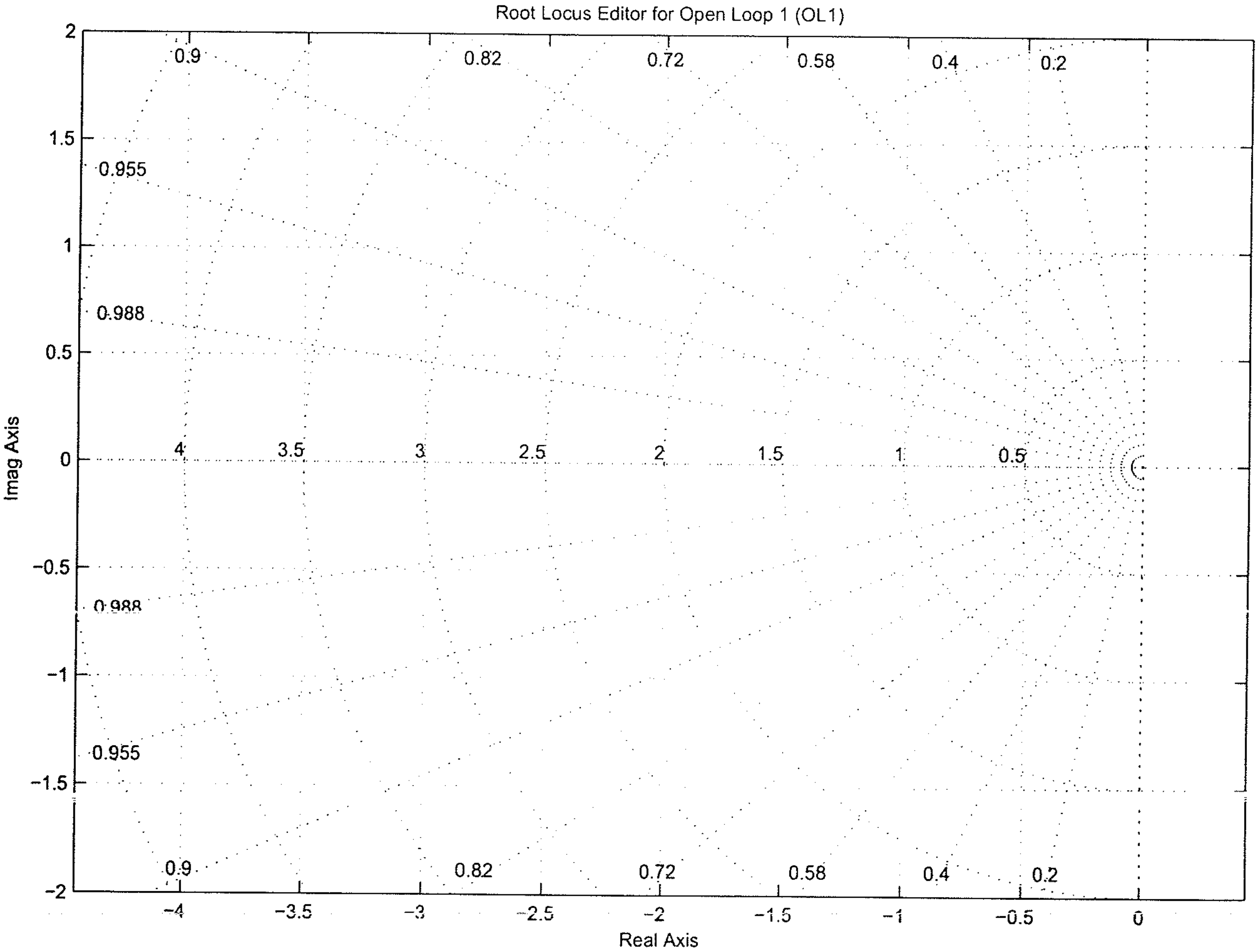
(a) (0.5pt) Qual a faixa de valores de K_P (em função de K_D e I) em que o sistema é estável ?

(b) (0.5pt) Utilizando este controlador é possível fazer com que o erro estacionário seja nulo para uma entrada degrau $R(s) = A/s$ e para um distúrbio do tipo degrau $M_D(s) = B/s$?

(c) (1.0pt) Desenhe o lugar das raízes em função de K_P. Considere $I = 1$ e $K_P/K_D = 1$. Dica: o LR possui uma circunferência.

(d) (1.0pt) Determine a faixa de valores de K_P e K_D (considerando $K_P/K_D = 1$) que satisfazem as especificações desejadas.

[Q. 5] (2.0pt) Considere agora que haja uma variação paramétrica no momento de inércia $I = [1, 2]$. Determine a faixa de valores de K_P e K_D (considerando $K_P/K_D = 1$) que satisfazem as especificações desejadas.



[Q.1] (1.0pt) Considerando $U(s)$ calcule $\Theta(t)$ para $u(t) = A$

$$\Theta(s) = \frac{1}{I}\frac{1}{s^2}U(s) \qquad U(s) = \frac{A}{s}$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{I}\frac{A}{s^3}$$

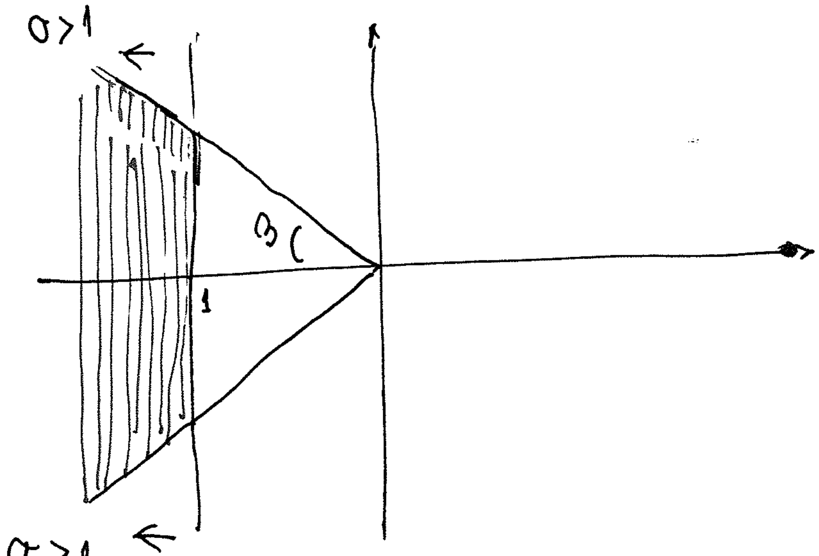
$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 \iff F(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$\Theta(t) = \frac{A}{I}\frac{1}{2}t^2$$

[Q.2] (1.0pt) O lugar geométrico só depende das especificações transitórias

$$t_s < 4 \text{ seg} \Rightarrow |\sigma| > 1$$

$$M_p < 5\% \Rightarrow \beta < 46.37°$$



[Q3] (3.0pt) Controlador Proporcional K_p, $H(s) = K_p$

(a) (0.5pt) Qual a faixa de valores de K_p em que o sistema é estável?

Equação característica $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + K_p \cdot \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{s^2} =$

$$= \frac{K_p + I s^2}{I s^2} = 0$$

$$s^2 = -\frac{K}{I} \Rightarrow s = \pm\sqrt{\frac{K_p}{I}}\, j$$

raízes imaginárias

Desta forma, para qualquer valor de $K > 0$ o sistema é oscilatório, ou seja, marginalmente estável.

(b) (0.5pt)

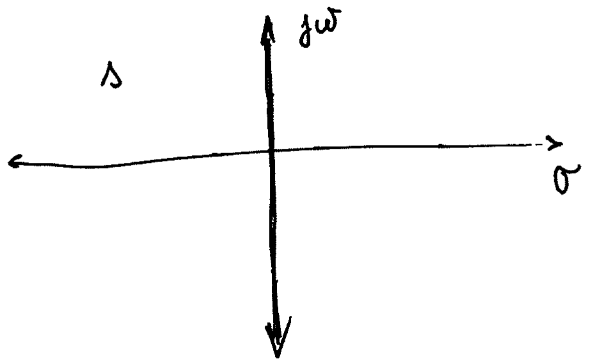
Como o sistema é marginalmente estável o resposta é negativa

(c) (1.0pt)

O Lugar das Raízes pode ser deduzido através da equação deduzida no ítem (a) $s = \pm\sqrt{\frac{K_p}{I}}\, j$ com $I = 1$

$s = \pm\sqrt{K_p}\, j$

Ou seja, o Lugar das Raízes é o eixo imaginário



(d) (1.0pt) Para qq valor de $K_p > 0$ o sistema é marginalmente estável, ou seja, não existe nenhum valor de $K_p > 0$ que satisfaça

[Q4] (3.0pt) Controlador Proporcional Derivativo

$$H(s) = (K_P + K_D s)$$

(a) (0.5pt) Faixa de valores de K_P (em função de K_D e I) em que o sistema é estável?

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (K_P + K_D s) = \frac{Is^2 + K_D s + K_P}{Is^2}$$

ou $F(s) = Is^2 + K_D s + K_P$

Tabulação de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{lll} s^2 & I & K_P \\ s^1 & K_D & 0 \\ s^0 & \frac{K_P K_D - I \times 0}{K_D} = \frac{K_P . K_D}{K_D} = K_P & 0 \end{array}$$

O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de trocas de sinal na 1ª coluna na tabulação indica ~~que~~ o número de pólos no semi-plano direito

Se $K_P, K_D > 0$ não haverá trocas de sinal na primeira coluna.

Desta forma, o sistema é estável para $K_P, K_D > 0$

(b) (0.5pt) Erro estacionário nulo para entrada degrau $R(s) = \frac{A}{s}$

Erro estacionário para ~~entrada~~ distúrbio degrau $M_D(s) = \frac{B}{s}$

• Para $R(s) = \frac{A}{s}$ $\quad E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s) = \frac{Is^2}{Is^2 + K_D s + K_P}$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{Is^2}{Is^2 + K_D s + K_P} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

para o distúrbio $M_D(s) = \frac{B}{s}$

$$\Theta(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot M_D(s) = \frac{1}{Is^2+K_Ds+K_p} \cdot M_D(s)$$

$$E(s) = -\Theta(s)$$

$$E(s) = -\frac{1}{Is^2+K_Ds+K_p} \cdot M_D(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = -s \cdot \frac{1}{Is^2+K_Ds+K_p} \cdot \frac{B}{s} = -\frac{1}{K_p}$$

não consegue anular o distúrbio

(c) (1.0pt) Lugar das Raízes $I=1$, $K_p/K_D = 1$

O sistema em malha aberta é dado por:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{I}\frac{1}{s^2} \cdot (K_p + K_D s) \quad \text{com} \quad I=1 \quad K_p/K_D = 1 \Rightarrow K = K_p = K_D$$

$$G(s)H(s) = K \cdot \frac{1}{s^2}(1+s)$$ zero $s=-1$

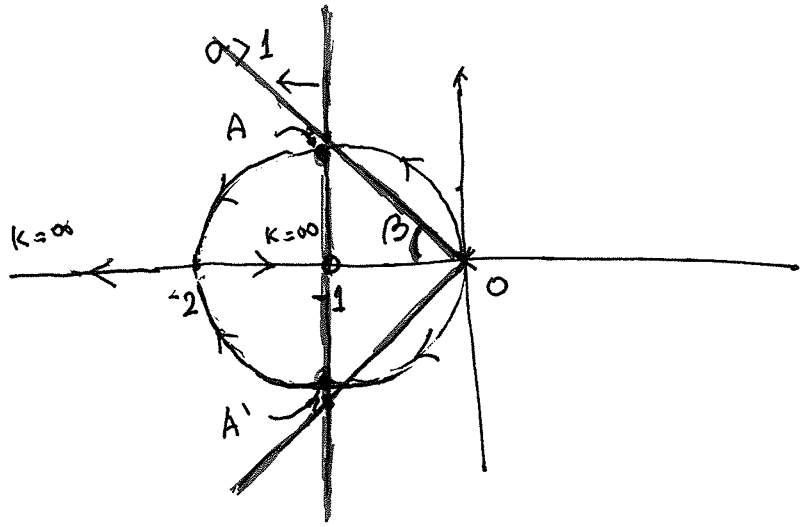
pólos duplos em $s=0$

Os ponto de saída (breakway point) e de chegada podem ser definidos pela equação $\frac{dK}{ds} = 0$ utilizando a equação característica $F(s) = 1 + G(s)H(s)$

Neste caso $F(s) = 1 + \frac{K}{s^2}(1+s) = 0 \Rightarrow K_p = \frac{-s^2}{s+1} \Rightarrow$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-2s(s+1)+s^2 \cdot 1}{(s+1)^2} = \frac{-2s^2-2s+s^2}{(s+1)^2} = \frac{s(2-s)}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

Solução $s=0$, $s=-2$



A circunferência tem centro em -1 e raio $=1$

d-) (1.0pt) Determine a faixa de valores de K_p e K_D $\left(\frac{K_p}{K_D}=1\right)$ que satisfazem as especificações desejadas

Houve um erro na especificação estática dos requisitos de controle já que o controlador PD não consegue anular o erro estático para $M_0(s) = \frac{B}{s}$

Desta forma a resposta: não existe valores de K_p e K_D é a mais correta.

Se for desconsiderado a parte estática a solução corresponde a valores de K cujo limite inferior são os pontos A e A' na figura acima

Os pontos A e A' correspondem ao cruzamento da reta vertical correspondente a $\sigma = 1$ e a circunferência

$A \cong -1 + 1j$
$A' \cong -1 - 1j$ o que corresponde a $K = K_p = K_D \cong 1.97$

ou seja a solução completa seria

$$K = K_p = K_D > 1.97$$

[Q5] (2.0pt) Variação paramétrica $I = [1.0, 2.0]$

Se o valor de I variar o formato do lugar das raízes não varia apenas os valores de K variam

Se for utilizado os requisitos estáticos não haverá obviamente nenhum valor de $K = K_P = K_D$ que satisfaça os requisitos

Se for utilizado somente os requisitos de resposta transitória os pontos que definem o limite inferior de K que satisfaçam os requisitos de resposta transitória são os mesmos pontos A e A'

Para $I = 1 \Rightarrow K = 1.97$
Para $I = 2 \Rightarrow K = 3.94$

ou seja a solução seria dada por

$$K = K_P = K_D > 3.94$$