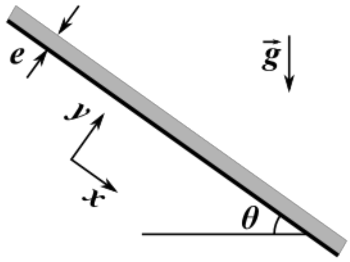
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3238 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE 2ª PROVA 08/05/2016

Duração: 120 minutos

<u>1ª Questão (3,0 pontos)</u>

Um filme com espessura e de óleo, cuja massa específica é ρ e viscosidade dinâmica é μ, escoa em regime permanente e laminar sobre uma placa plana inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, sob a ação exclusiva da gravidade, g, conforme ilustrado na figura. A resistência do ar pode ser desprezada e o escoamento tratado como unidimensional. Obtenha, em função das variáveis mencionadas no enunciado,



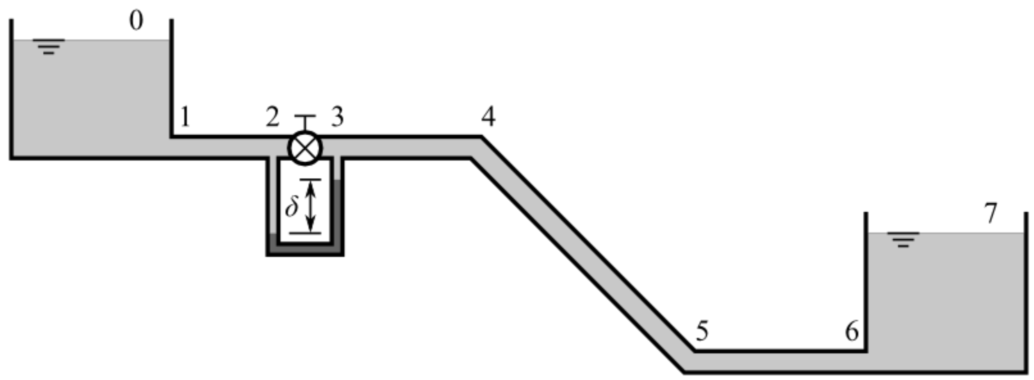
(a) Uma expressão do perfil de velocidades, $u(y)$; (***2,0 pontos***)

(b) A vazão volumétrica por unidade de largura da placa; (***0,5 ponto***)

(c) A tensão de cisalhamento na placa. (***0,5 ponto***)

<u>2ª Questão (4,0 pontos)</u>

A figura mostra esquematicamente uma tubulação que conduz água ($\rho = 1000$ kg/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s) de um reservatório num nível superior (ponto 0) até um outro reservatório num nível inferior (ponto 7). Para regular a vazão no sistema, há uma válvula com tomadas de pressão nas seções de entrada e saída ligadas a um manômetro em U, cujo fluido manométrico é mercúrio ($\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3). Há dois cotovelos de 45°, localizados nos pontos 4 e 5. A tubulação tem diâmetro interno igual a 100 mm e é feita de um material que tem rugosidade média igual a 0,1 mm. Os comprimentos dos trechos da tubulação, elevações de alguns pontos de interesse e coeficientes de perda localizada são dados abaixo. Sabendo que a aceleração da gravidade no local vale 9,8 m/s^2, e considerando uma condição onde a deflexão do manômetro é $\delta = 90$ mm, determine:



$L_{1,2} = 5$ m	$L_{3,4} = 20$ m
$L_{4,5} = 42$ m	$L_{5,6} = 15$ m
$z_0 = 40$ m	$z_4 = 30$ m
$z_5 = 0$ m	$z_7 = 8$ m
$K_1 = 0,5$	$K_4 = 0,4$
$K_5 = 0,4$	$K_6 = 1,0$

(a) A perda de carga na válvula; (***0,5 ponto***)

(b) A vazão no tubo; (***1,5 ponto***)

(c) A força aplicada pelos trechos de tubo adjacentes no cotovelo localizado no ponto 4, desprezando o peso do cotovelo e da água nele contida. (***2,0 pontos***)

3ª Questão (3,0 pontos)

A potência consumida por uma bomba, $\dot{W}$, é função do aumento de pressão que ocorre entre a sucção e a descarga, Δp, do diâmetro do seu rotor, D, da sua frequência de rotação do rotor, ω, da massa específica do fluido bombeado, ρ, e da vazão bombeada, Q.

(a) Determine uma relação funcional adimensional entre a potência consumida e os demais parâmetros relevantes do processo? (***1,5 ponto***)

(b) Deseja-se estimar qual será a potência consumida por uma bomba d'água que operará com uma rotação de 1500 rpm, fornecendo um aumento de pressão de 250 kPa e uma vazão de 15 L/s. Para isso, será utilizada um modelo de bomba geometricamente semelhante, em escala 1:3, operando também com água e com uma rotação de 2700 rpm. Quais devem ser a vazão e o aumento de pressão nos testes com o modelo para reproduzir as condições dinâmicas da operação do protótipo? (***1,0 ponto***)

(c) No ensaio nas condições determinadas no item (b), a potência consumida pela bomba modelo foi de 360 W. Qual então será a potência consumida no protótipo? (***0,5 ponto***)

Formulário geral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\vec{V}\rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g} + z_2\right) - h_m = h_{L_T} \qquad h_L = f\,\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad h_s = K\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad f = \frac{64}{Re} \qquad h_m = \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}$$

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0 \qquad \tau_{yx} = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho g_z$$

PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2016 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 2

1ª Questão (3,0 pontos)

(a) Escoamento unidimensional: $v = w = 0$; incompressível (ρ constante); regime permanente ($\partial u/\partial t = 0$); escoamento exposto à atmosfera (p constante); placa muito grande, tal que $\partial u/\partial z = 0$.

Equação da continuidade: $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ **0,3 pt**

Equação de Navier–Stokes na direção x:

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right) + \rho g_x$$

$$0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} \qquad \textbf{0,3 pt}$$

Integrando esta equação em relação y: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} y + C_1$ **0,3 pt**

Integrando mais uma vez em relação a y: $u = -\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$ **0,3 pt**

Aplicamos então as condições de contorno para determinar as constantes de integração. Junto à parede, a velocidade é nula, isto é

$$u = 0 \text{ para } y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad \textbf{0,3 pt}$$

Como a resistência do ar é desprezível, a tensão de cisalhamento na superfície livre é nula, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ para } y = e \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\mu} e \qquad \textbf{0,3 pt}$$

A forma final do perfil é: $u = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{2\mu} (2ey - y^2)$ **0,2 pt**

(b) $$\frac{Q}{b} = \int_0^e u \, \mathrm{d}y = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{2\mu} \int_0^e (2ey - y^2) \, \mathrm{d}y \qquad \textbf{0,3 pt}$$

$$\frac{Q}{b} = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{2\mu} \left[\frac{2ey^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^e = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{2\mu} \left(e^3 - \frac{e^3}{3} \right) = \frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{3\mu} e^3 \qquad \textbf{0,2 pt}$$

(c) $$\tau_p = \mu \left. \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right|_{y=0} = \cancel{\mu} \left[\frac{\rho g \operatorname{sen} \theta}{\cancel{\mu}} (e - 0) \right] = \rho g e \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{0,5 pt}$$

2ª Questão (4,0 pontos)

(a) A diferença de pressão entre os pontos 2 e 3 pode ser determinada a partir da leitura do manômetro,

$$p_2 - p_3 = (\rho_{\text{Hg}} - \rho) g \delta \qquad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Aplicando a equação da energia entre os mesmos pontos,

$$\left(\frac{p_2}{\gamma} + \cancel{\frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g}} + \cancel{z_2}\right) - \left(\frac{p_3}{\gamma} + \cancel{\frac{\alpha_3 \bar{V}_3^2}{2g}} + \cancel{z_3}\right) = \Delta h_{\text{valv}} \quad \Rightarrow \quad \Delta h_{\text{valv}} = \frac{(\rho_{\text{Hg}} - \rho)\cancel{g}\delta}{\rho \cancel{g}} = \frac{(\rho_{\text{Hg}} - \rho)\delta}{\rho}$$

$$\Delta h_{\text{valv}} = \frac{(13600 - 1000) \times 0{,}09}{1000} = 1{,}134\,\text{m} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

(b) Este é um exercício do tipo II, que necessita de um processo iterativo para a sua solução. Equação da energia entre 0 e 7:

$$\left(\cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_0 \bar{V}_0^2}{2g}} + z_0\right) - \left(\cancel{\frac{p_7}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_7 \bar{V}_7^2}{2g}} + z_7\right) = h_{L_T} = \left(f \frac{L_{1,6}}{D} + K_1 + K_4 + K_5 + K_6\right) \frac{\bar{V}^2}{2g} + \Delta h_{\text{valv}}$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{(z_0 - z_7 - \Delta h_{\text{valv}})2g}{K_1 + K_4 + K_5 + K_6 + f\frac{L_{1,6}}{D}}} = \sqrt{\frac{605}{2{,}3 + 820f}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}} \qquad (1)$$

Começaremos com uma estimativa inicial para o valor de f considerando o valor do mesmo para o regime completamente rugoso:

$$f_0 = f_{cr} = \left[-2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)\right]^{-2} = 0{,}0196$$

Calculamos então o valor de $\bar{V}$ com a equação (**??**), e com este valor calculamos o número de Reynolds,

$$Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \bar{V}10^5$$

Tendo o número de Reynolds e a rugosidade relativa, ε/D, podemos calcular uma nova estimativa de f utilizando a equação dde Colebrook,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Os resultados das iterações até a convergência estão abaixo:

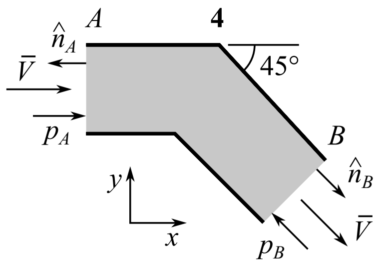
i	f_i	$\bar{V}$ (m/s)	Re	f_{i+1}
0	0,0196	5,73	$5{,}73 \times 10^5$	0,0202
1	0,0202	5,67	$5{,}67 \times 10^5$	0,0202

Assim, a velocidade média é $\bar{V} = 5{,}67\,\text{m/s}$. $\boxed{\textbf{0,8 pt}}$

A vazão pode ser então calculada a partir do valor da velocidade média,

$$Q = \bar{V}A = \bar{V}\frac{\pi D^2}{4} = 5{,}67 \times \frac{\pi \times 0{,}1}{4} = 0{,}0445\,\text{m}^3/\text{s} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

(c) A figura ilustra o volume de controle utilizado, englobando o cotovelo.



Como o escoamento é incompressível e permanente, a equação da continuidade fornece $\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}$.

Aplicando a equação da quantidade de movimento,

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, \mathrm{d}V\!\!\!\!-} + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Decompondo nas direções x (horizontal) e y (vertical),

$$x: \qquad -\rho\frac{\pi D^2}{4}\bar{V}^2 + \rho\frac{\pi D^2}{4}\bar{V}^2\cos\theta = p_A\frac{\pi D^2}{4} - p_B\frac{\pi D^2}{4}\cos\theta + R_x \qquad \boxed{\textbf{0,8 pt}}$$

$$y: \qquad -\rho\frac{\pi D^2}{4}\bar{V}^2\,\mathrm{sen}\,\theta = p_B\frac{\pi D^2}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta + R_y \qquad \boxed{\textbf{0,4 pt}}$$

Para determinar o valor de p_A, aplicamos a equação da energia entre os pontos 0 e A (imediatamente antes do ponto 4):

$$\left(\cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_0\bar{V}_0^2}{2g}} + z_0\right) - \left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{\alpha\bar{V}^2}{2g} + z_4\right) = \left(f\frac{L_{1,4}}{D} + K_1\right)\frac{\bar{V}^2}{2g} + \Delta h_{\text{valv}}$$

$$p_A = \gamma\left[z_0 - z_4 - \Delta h_{\text{valv}} - \left(\frac{L_{1,4}}{D} + K_1 + \alpha\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}\right]$$

$$p_A = 9800\times\left[40 - 30 - 1{,}134 - \left(0{,}0202\times\frac{25}{0{,}1} + 0{,}5 + 1\right)\times\frac{5{,}67^2}{2\times 9{,}8}\right] = -18155\,\text{Pa} \qquad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Para determinar o valor de p_B, aplicamos a equação da energia entre os pontos A e B, utilizando o coeficiente de perda localizada K_4 fornecido no enunciado,

$$\frac{p_A - p_B}{\gamma} = K_4\frac{\bar{V}^2}{2g} \quad\Rightarrow\quad p_B = -18155 - 0{,}4\times\frac{5{,}67^2}{2\times 9{,}8}\times 9800 = -24575\,\text{Pa} \qquad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Substituindo os valores numéricos, chegamos aos valores de R_x e R_y,

$$R_x = \frac{\pi D^2}{4}\left[\rho\bar{V}^2(\cos\theta - 1) + p_B\cos\theta - p_A\right]$$

$$R_x = \frac{\pi\times 0{,}1^2}{4}\times\left[1000\times 5{,}67^2\times(\cos 45^\circ - 1) - 24575\times\cos 45^\circ + 18155\right] = -67{,}6\,\text{N} \qquad \boxed{\textbf{0,1 pt}}$$

$$R_y = \frac{\pi D^2}{4}\left[-\rho\bar{V}^2\,\mathrm{sen}\,\theta - p_B\,\mathrm{sen}\,\theta\right]$$

$$R_y = \frac{\pi\times 0{,}1^2}{4}\times\left[-1000\times 5{,}67^2\times\mathrm{sen}\,45^\circ + 24575\times\mathrm{sen}\,45^\circ\right] = -41{,}8\,\text{N} \qquad \boxed{\textbf{0,1 pt}}$$

3ª Questão (3,0 pontos)

(a) Parâmetros envolvidos: $\dot{W}$, Δp, D, ω, ρ, Q. Conjunto de dimensões fundamentais: MLt.

$$\dot{W} \doteq \frac{ML^2}{t^3}, \qquad \Delta p \doteq \frac{M}{Lt^2}, \qquad D \doteq L, \qquad \omega \doteq \frac{1}{t}, \qquad \rho \doteq \frac{M}{L^3}, \qquad Q \doteq \frac{L^3}{t}$$

Matriz dimensional:

	$\dot{W}$	Δp	D	ω	ρ	Q
M	1	1	0	0	1	0
L	2	-1	1	0	-3	3
t	-3	-2	0	-1	0	-1

Parâmetros repetentes:
ρ, D, ω

$6 - 3 = 3$ equações dimensionais

$$\Pi_1 = \dot{W}\rho^a D^b \omega^c \quad \Rightarrow \quad (ML^2t^{-3})(ML^{-3})^a(L)^b(t^{-1})^c = M^0L^0t^0$$

$$\begin{array}{lll} [M]: & 1 + a = 0 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ [L]: & 2 - 3a + b = 0 & \Rightarrow \quad b = -5 \\ [t]: & -3 - c = 0 & \Rightarrow \quad c = -3 \end{array} \qquad \boxed{\Pi_1 = \frac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3}}$$

0,5 pt

$$\Pi_2 = \Delta p \rho^a D^b \omega^c \quad \Rightarrow \quad (ML^{-1}t^2)(ML^{-3})^a(L)^b(t^{-1})^c = M^0L^0t^0$$

$$\begin{array}{lll} [M]: & 1 + a = 0 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ [L]: & -1 - 3a + b = 0 & \Rightarrow \quad b = -2 \\ [t]: & -2 - c = 0 & \Rightarrow \quad c = -2 \end{array} \qquad \boxed{\Pi_2 = \frac{\Delta p}{\rho D^2 \omega^2}}$$

0,5 pt

$$\Pi_3 = Q\rho^a D^b \omega^c \quad \Rightarrow \quad (L^3t^{-1})(ML^{-3})^a(L)^b(t^{-1})^c = M^0L^0t^0$$

$$\begin{array}{lll} [M]: & a = 0 & \\ [L]: & 3 - 3a + b = 0 & \Rightarrow \quad b = -3 \\ [t]: & -1 - c = 0 & \Rightarrow \quad c = -1 \end{array} \qquad \boxed{\Pi_3 = \frac{Q}{D^3 \omega}}$$

0,5 pt

$$\frac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3} = \phi\left(\frac{\Delta p}{\rho D^2 \omega^2}, \frac{Q}{D^3 \omega}\right)$$

Outras respostas possíveis dependendo da escolha de parâmetros repetentes:

Parâmetros repetentes	Resposta
ρ, D, Q	$\frac{\dot{W} D^4}{\rho Q^3} = \phi\left(\frac{\Delta p D^4}{\rho Q^2}, \frac{\omega D^3}{Q}\right)$
$\Delta p, D, \omega$	$\frac{\dot{W}}{\Delta p D^3 \omega} = \phi\left(\frac{\rho D^2 \omega^2}{\Delta p}, \frac{Q}{D^3 \omega}\right)$
$\Delta p, \omega, Q$	$\frac{\dot{W}}{\Delta p Q} = \phi\left(\frac{D\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{Q}}, \frac{\rho\sqrt[3]{\omega^4}\sqrt[3]{Q^2}}{\Delta p}\right)$
$\rho, \Delta p, Q$	$\frac{\dot{W}}{\Delta p Q} = \phi\left(\frac{D\sqrt[4]{\Delta p}}{\sqrt[4]{\rho}\sqrt[2]{Q}}, \frac{\omega\sqrt[4]{\rho^3}\sqrt[2]{Q}}{\sqrt[4]{\Delta p^3}}\right)$
$\Delta p, D, \rho$	$\frac{\dot{W}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\Delta p^3} D^2} = \phi\left(\frac{\omega D\sqrt{\rho}}{\sqrt{\Delta p}}, \frac{Q\sqrt{\rho}}{\sqrt{\Delta p} D^2}\right)$

(b)

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m D_m^2 \omega_m^2} = \frac{\Delta p_p}{\rho_p D_p^2 \omega_p^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_m = \Delta p_p \left(\frac{\rho_m}{\rho_p}\right)\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^2\left(\frac{\omega_m}{\omega_p}\right)^2$$

$$\Delta p_m = 250 \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2700}{1500}\right)^2 = 90\,\mathrm{kPa} \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$\frac{Q_m}{D_m^3 \omega_m} = \frac{Q_p}{D_p^3 \omega_p} \quad \Rightarrow \quad Q_m = Q_p \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^3\left(\frac{\omega_m}{\omega_p}\right)$$

$$Q_m = 15 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2700}{1500}\right) = 1\,\mathrm{L/s} \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

(c)

$$\frac{\dot{W}_p}{\rho_p D_p^5 \omega_p^3} = \frac{\dot{W}_m}{\rho_m D_m^5 \omega_m^3} \quad \Rightarrow \quad \dot{W}_p = \dot{W}_m \left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^5\left(\frac{\omega_p}{\omega_m}\right)^3$$

$$\dot{W}_p = 360 \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2700}{1500}\right)^3 = 15\,\mathrm{kW} \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$