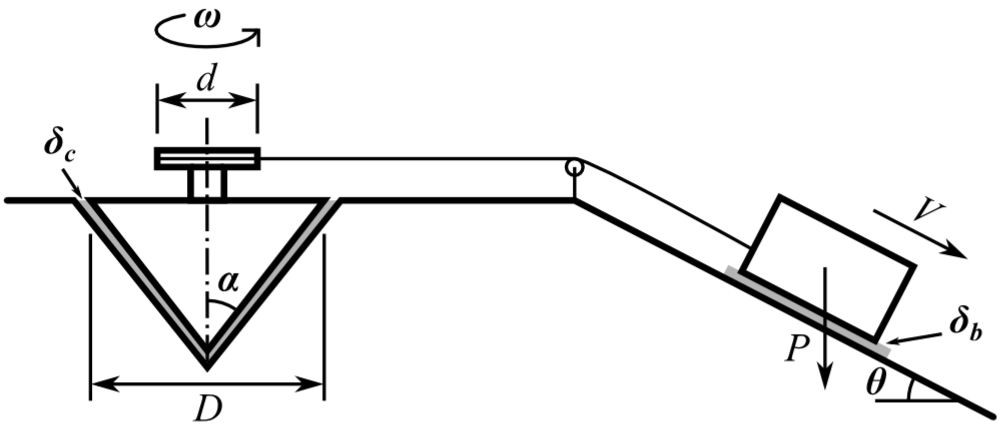
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3238 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE 1ª PROVA 28/03/2016

Duração: 120 minutos

<u>1ª Questão (3,5 pontos)</u>

A figura mostra uma montagem na qual um bloco de peso P e base com área A desliza com uma velocidade constante V sobre um filme de óleo de espessura δ_b num plano inclinado de um ângulo θ com relação à horizontal. O bloco está ligado à extremidade de um fio inextensível e de peso desprezível que está enrolado numa polia de diâmetro d, rigidamente ligada a um cone reto, cuja base tem diâmetro D e cujo ângulo entre a geratriz e a vertical vale α. O cone gira com velocidade angular ω, deslizando sobre um filme de espessura δ_c do mesmo óleo do filme sob o bloco. Este óleo tem viscosidade dinâmica μ.



(a) Desenvolva uma expressão da força de tração no fio, T, em função de V, P, A, θ, δ_b e μ. (***1,0 ponto***)

(b) Desenvolva uma expressão do momento aplicado no cone pela polia, M, em função de ω, D, α, δ_c e μ. (***1,5 ponto***)

(c) Determine o módulo da velocidade do bloco quando D = 200 mm, d = 75 mm, α = 45°, δ_c = 0,8 mm, P = 35 N, δ_b = 1 mm, θ = 30°, A = 70 cm^2 e μ = 0,08 kg/(m·s)? (***1,0 ponto***)

<u>2ª Questão (3,0 pontos)</u>

Um campo de velocidades plano é dado por

$$u = \frac{U_0}{L}x, \quad v = -\frac{U_0}{L}y,$$

com U_0 e L constantes em m/s e m, respectivamente, e as coordenadas x e y em metros.

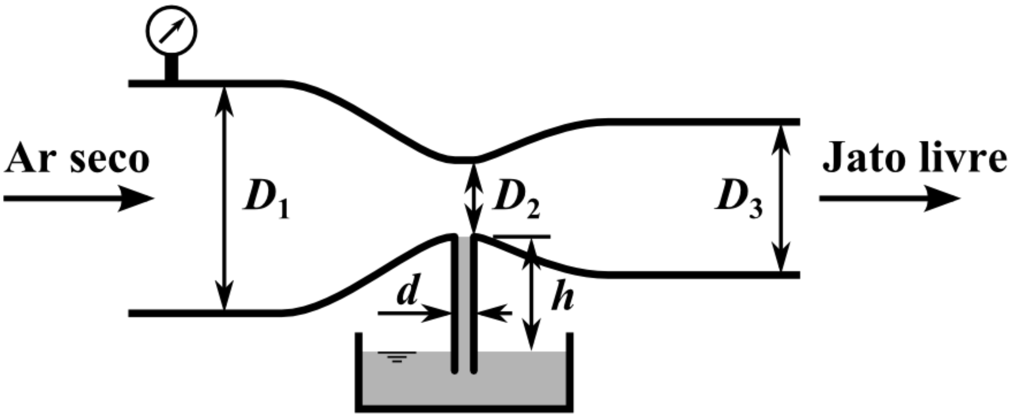
(a) Determine o campo de aceleração deste escoamento. (***1,0 ponto***)

(b) Obtenha as equações das linhas de corrente, das linhas de emissão e das trajetórias. Esboce graficamente as linhas de corrente. (***1,0 ponto***)

(c) Uma partícula passa pelo ponto (1, 0) no instante t = 0. Neste instante, a pressão estática sobre ela é de 100 Pa. Determine a pressão estática sobre esta mesma partícula no instante t = 2 s, sabendo que U_0 = 3 m/s, L = 10 m e que a massa específica do fluido escoando é 1200 kg/m^3. Despreze os efeitos viscosos. (***1,0 ponto***)

3ª Questão (3,5 pontos)

O bocal de um sistema de insuflação de ar com gotículas de água é mostrado na figura. Ar seco (ρ_{ar} = 1,2 kg/m^3) é conduzido por uma tubulação principal até a entrada do bocal, que tem diâmetro D_1 = 300 mm, chegando com uma pressão p_1, lida no manômetro ilustrado. O bocal é constituído por uma contração suave, seguida de uma expansão, formando uma garganta como num tubo de Venturi, que tem diâmetro D_2 = 200 mm. À parede inferior desta garganta se acopla um tubo vertical de diâmetro d = 10 mm que termina num reservatório de água ($\rho_{água}$ = 998 kg/m^3). A distância entre o acoplamento na garganta e o nível do reservatório é h = 150 mm. A mistura de ar com gotículas de água deixa o bocal como um jato livre, saindo por uma seção de diâmetro D_3 = 250 mm.



Sabendo que no local a aceleração da gravidade vale g = 9,8 m/s^2 e desconsiderando perdas por atrito e efeitos de compressibilidade, pergunta-se:

(a) Qual a vazão mínima de ar pela tubulação para a qual a água do reservatório chega até a garganta? (***1,5 ponto***)

(b) Qual o valor da pressão p_1 na situação do item (a)? (***0,5 ponto***)

(c) Se o valor de p_1 for o dobro daquele calculado no item (b), qual será a fração mássica de água na mistura que sai do bocal? (***1,5 ponto***)

Formulário geral

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$$

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{constante}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

$$p_1 = \gamma h + p_2$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) f$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x, y, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x, y, t)$$

PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2016 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 1

1ª Questão (3,5 pontos)

(a) A aplicação da 2ª Lei de Newton no bloco na direção do movimento fornece:

$$T = P \operatorname{sen}\theta - F_v,$$

onde F_v é a força viscosa devida às tensões de cisalhamento no filme de óleo, que pode ser calculada por

$$F_v = \tau A = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} A.$$

Como o escoamento é viscoso, laminar, acontece entre superfícies paralelas planas e tem gradiente de pressão nulo na direção do escoamento, podemos admitir um perfil linear de velocidades no óleo. Sendo assim, a força viscosa é,

$$F_v = \mu \frac{V}{\delta_b} A \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

E a tração no fio,

$$T = P \operatorname{sen}\theta - \mu \frac{V}{\delta_b} A \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

(b) Como ω é constante, existe um equilíbrio de momentos, $M = M_v$, onde M_v é o momento devido às forças viscosas originadas das tensões de cisalhamento no filme de óleo. Aqui também podemos admitir perfil linear de velocidades para calcular a tensão de cisalhamento

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \mu \frac{\omega r}{\delta_c}, \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

onde r é a distância do ponto considerado na lateral do cone até o eixo de rotação, de forma que a velocidade deste ponto é ωr. A tensão é, portanto, função de r e para calcular o momento devido a esta tensão num trecho da lateral do cone de raio r, fazemos

$$\mathrm{d}M_v = \mathrm{d}F_v r = \tau \mathrm{d}A\, r = \mu \frac{\omega r}{\delta_c} 2\pi r \mathrm{d}l\, r = \frac{2\pi\mu\omega}{\delta_c \operatorname{sen}\alpha} r^3\, \mathrm{d}r \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Integrando em toda a superfície do cone,

$$M = M_v = \int_0^R \frac{2\pi\mu\omega}{\delta_c \operatorname{sen}\alpha} r^3\, \mathrm{d}r = \frac{\pi\mu\omega}{\delta_c \operatorname{sen}\alpha} \frac{R^4}{2} = \frac{\pi\mu\omega D^4}{32\delta_c \operatorname{sen}\alpha} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

(c) A velocidade angular do cone e a velocidade do bloco estão relacionadas por

$$\omega = \frac{2V}{d}. \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

O momento aplicado sobre o cone está relacionado com a tração no fio por

$$M = T\frac{d}{2}$$

Usando as expressões de T e M obtidas nos itens anteriores e substituindo os valores numéricos fornecidos ao final, com unidades consistentes, chegamos à resposta.

$$\frac{\pi\mu\omega D^4}{32\delta_c \operatorname{sen}\alpha} = \left(P \operatorname{sen}\theta - \mu\frac{V}{\delta_b}A\right)\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi\mu D^4}{32\delta_c \operatorname{sen}\alpha}\frac{2V}{d} = \left(P \operatorname{sen}\theta - \mu\frac{V}{\delta_b}A\right)\frac{d}{2}$$

$$V = \frac{P \operatorname{sen}\theta}{\mu\left(\dfrac{\pi D^4}{8\delta_c d^2 \operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{A}{\delta_b}\right)} = 1{,}07\,\mathrm{m/s} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

2ª Questão (3,0 pontos)

(a) A velocidade u é função exclusiva de x e a velocidade v função exclusiva de y, portanto,

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = u\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{U_0}{L}x\right)\left(\frac{U_0}{L}\right) = \frac{U_0^2}{L^2}x \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = v\frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{U_0}{L}y\right)\left(-\frac{U_0}{L}\right) = \frac{U_0^2}{L^2}y \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

(b) A equação da linha de corrente é obtida resolvendo

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\cancel{U_0}}{\cancel{L}}x} = \frac{\mathrm{d}y}{-\frac{\cancel{U_0}}{\cancel{L}}y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

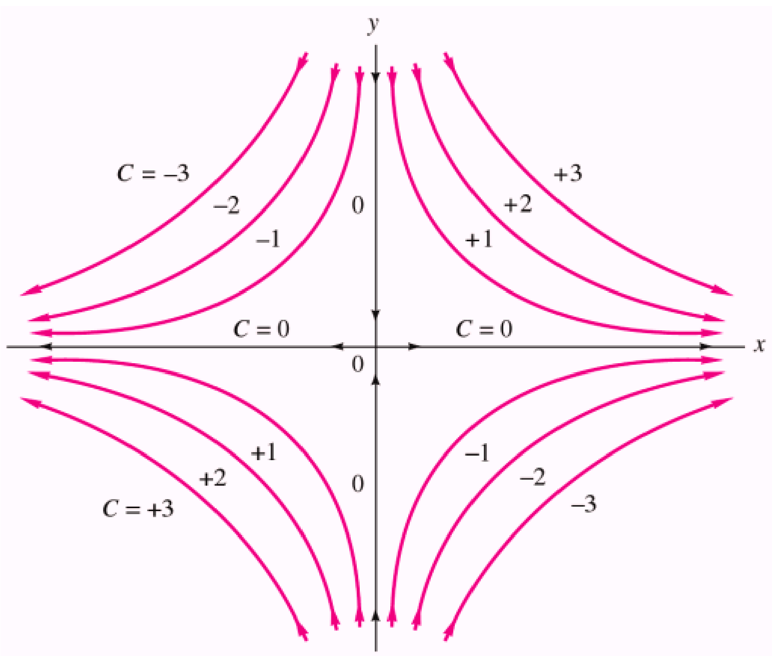
Integrando:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = -\ln|y| + C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| + \ln|y| = C_1$$

$$\ln|xy| = C_1 \quad \Rightarrow \quad xy = C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x} \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

Como o escoamento é permanente, as linhas de corrente, de emissão e as trajetórias coincidem. $\boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$

Esboço das linhas de corrente:



$\boxed{\mathbf{0{,}2\ pt}}$

(c) A partícula se encontra sobre o eixo x e se deslocará sobre ele, pois a velocidade v é zero (o que também pode ser visto no esboço feito no item anterior). Sendo assim, a trajetória da partícula neste movimento unidimensional é obtida calculando-se

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = \frac{U_0}{L}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{U_0}{L}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{U_0}{L}\int \mathrm{d}t$$

$$\ln|x| = \frac{U_0}{L}t + C_2 \quad \Rightarrow \quad x = C_3 \mathrm{e}^{\frac{U_0}{L}t}$$

Para $t = 0$, $x = 1 \;\Rightarrow\; C_3 = 1$.

Assim, a trajetória desta partícula é dada por $x = \mathrm{e}^{\frac{U_0}{L}t}$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

No instante $t_f = 2\,\mathrm{s}$, $x_f = \mathrm{e}^{\frac{3}{10}\times 2} = \mathrm{e}^{0{,}6} = 1{,}822\,\mathrm{m}$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Nesta posição, $u_f = \dfrac{U_0}{L}x_f = \dfrac{3}{10} \times 1{,}822 = 0{,}547\,\mathrm{m/s}$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Na posição inicial, $u_i = \dfrac{U_0}{L}x_i = \dfrac{3}{10} \times 1 = 0{,}3\,\mathrm{m/s}$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Podemos aplicar a equação de Bernoulli ao longo desta linha de corrente:

$$p_i + \frac{1}{2}\rho V_i^2 + \cancel{\rho g z_i} = p_f + \frac{1}{2}\rho V_f^2 + \cancel{\rho g z_f}$$

$$p_f = p_i + \frac{1}{2}\rho(u_i^2 - u_f^2) = 100 + \frac{1}{2} \times 1200 \times (0{,}3^2 - 0{,}547^2) = -25{,}3\,\mathrm{kPa} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

3ª Questão (3,5 pontos)

(a) A vazão procurada corresponde àquela para a qual a água chega ao topo do tubo vertical com velocidade nula. Aplicando a equação de Bernoulli entre as seções 2 e 3:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_2^2 + \cancel{\rho_{\text{ar}} g z_2} = \cancel{p_3} + \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_3^2 + \cancel{\rho_{\text{ar}} g z_3}$$

Lei de Stevin no tubo vertical: $p_2 = -\rho_{\text{água}} g h$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

Continuidade entre as seções 2 e 3: $Q_2 = Q_3 \;\Rightarrow\; V_2\dfrac{\pi D_2^2}{4} = V_3\dfrac{\pi D_3^2}{4} \;\Rightarrow\; V_2 = V_3\dfrac{D_3^2}{D_2^2}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

Substituindo na eq. de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}(V_2^2 - V_3^2) = \rho_{\text{água}} g h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_3^2\left(\frac{D_3^4}{D_2^4} - 1\right) = \rho_{\text{água}} g h$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{água}} g h}{\rho_{\text{ar}}\left(\frac{D_3^4}{D_2^4} - 1\right)}} = 41{,}19\,\text{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,6 pt}} \qquad Q = V_3 A_3 = V_3\frac{\pi D_3^2}{4} = 2{,}022\,\text{m}^3/\text{s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

(b) Aplicamos a eq. de Bernoulli entre as seções 1 e 3:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_1^2 + \cancel{\rho_{\text{ar}} g z_1} = \cancel{p_3} + \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_3^2 + \cancel{\rho_{\text{ar}} g z_3}$$

Continuidade entre as seções 2 e 3: $Q_1 = Q_3 \;\Rightarrow\; V_1\dfrac{\pi D_1^2}{4} = V_3\dfrac{\pi D_3^2}{4} \;\Rightarrow\; V_1 = V_3\dfrac{D_3^2}{D_1^2}$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Substituindo na eq. de Bernoulli: $p_1 = \dfrac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_3^2\left(1 - \dfrac{D_3^4}{D_1^4}\right) = 527{,}0\,\text{Pa}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

(c) A velocidade de saída do ar na nova situação ($p_1' = 2p_1 = 1054\,\text{Pa}$), é

$$V_3' = \sqrt{\frac{2p_1'}{\rho_{\text{ar}}\left(1 - \frac{D_3^4}{D_1^4}\right)}} = 58{,}25\,\text{m/s} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

A vazão volumétrica de ar para esta velocidade é

$$Q_{\text{ar}} = V_3' A_3 = V_3'\frac{\pi D_3^2}{4} = 2{,}859\,\text{m}^3/\text{s} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

A nova pressão na seção 2, p_2', pode ser obtida aplicando a eq. de Bernoulli entre 2 e 3 e usando a eq. da Continuidade, como foi feito no item (a):

$$p_2' = \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}}V_3'^2\left(1 - \frac{D_3^4}{D_2^4}\right) = -2934{,}1\,\text{Pa} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

Agora aplicamos a eq. de Bernoulli entre o nível do reservatório de água, A, e a conexão na garganta, B,

$$\cancel{p_A} + \frac{1}{2}\rho_{\text{água}}\cancel{V_A^2} + \rho_{\text{água}} g \cancel{z_A} = p_B + \frac{1}{2}\rho_{\text{água}} V_B^2 + \rho_{\text{água}} g z_B$$

Como $p_B = p_2'$, temos

$$V_B = \sqrt{\frac{2(-p_2' - \rho_{\text{água}} g h)}{\rho_{\text{água}}}} = 1{,}71\,\text{m/s} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

A vazão de água é $Q_{\text{água}} = V_B \dfrac{\pi d^2}{4} = 1{,}35 \times 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s}$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

A fração mássica de água na mistura, $f_{\text{água}}$, pode ser calculada por

$$f_{\text{água}} = \frac{\dot{m}_{\text{água}}}{\dot{m}_{\text{total}}} = \frac{\dot{m}_{\text{água}}}{\dot{m}_{\text{ar}} + \dot{m}_{\text{água}}} = \frac{\rho_{\text{água}} Q_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}} Q_{\text{ar}} + \rho_{\text{água}} Q_{\text{água}}} = 0{,}0377 \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$