

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE

MECÂNICA DOS FLUIDOS

APOSTILA 8

Escoamento em Condutos Forçados

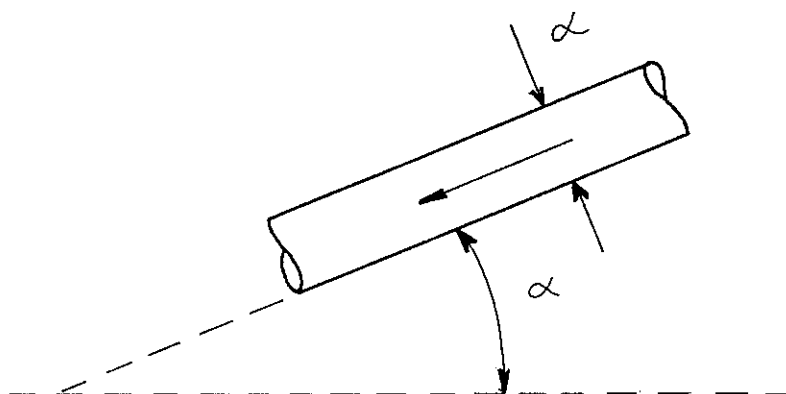
Paulo Basílio Fernandes  
Prof. Colaborador de  
Mecânica dos Fluidos  
EPUSP - 1988

Esta publicação é uma revisão do Capítulo VIII da Co-  
letânea de Exercícios de Mecânica dos Fluidos, publi-  
cada em 1978.

Em relação à publicação anterior foram acrescentados  
novos exercícios.

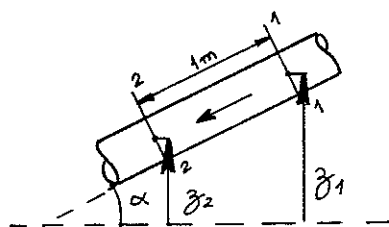
Ex. 8.1 - Óleo de viscosidade cinemática  $\nu = 1,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  e peso específico  $\gamma = 900 \text{ kgf/m}^3$ , à temperatura ambiente, escoam no interior de um tubo inclinado, diâmetro  $0,0127 \text{ m}$ . Sabendo-se que o escoamento é laminar e que a vazão é  $0,142 \text{ m}^3/\text{h}$ , determinar:

- Para um ângulo  $\alpha = 30^\circ$ , qual a variação da pressão interna, a cada metro, entre dois pontos quaisquer?
- Se a pressão interna é constante ao longo do comprimento, qual seria o valor do ângulo  $\alpha$ ?



Solução:

a) Consideremos duas seções quaisquer, 1 e 2, distantes  $1 \text{ m}$ . Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre esses pontos teremos:



$$H_1 = H_2 + \frac{W_a}{\gamma Q} \Bigg|_1^2$$

$$\text{Assim: } \frac{\alpha V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \Delta p \Bigg|_1^2,$$

onde  $\Delta p = \frac{W_a}{\gamma Q} = \text{perda de carga.}$

$$p_1 - p_2 = 158,9 \text{ Kgf/m}^2 = 1557,1 \text{ Pa.}$$

b) Utilizando-se a mesma figura do item anterior e sabendo-se que a pressão interna é constante neste caso, temos, de (A):

$$z_1 = z_2 + \Delta p \left| \frac{2}{1} \right., \text{ mas } \sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{1}$$

$$\text{ou seja: } \sin \alpha = \Delta p \left| \frac{2}{1} \right. \text{ e } \alpha = \text{arc. sen} \left( \Delta p \left| \frac{2}{1} \right. \right)$$

$$\alpha = \text{arc. sen} \left( \frac{64 \nu L V}{2g D^2} \right) =$$

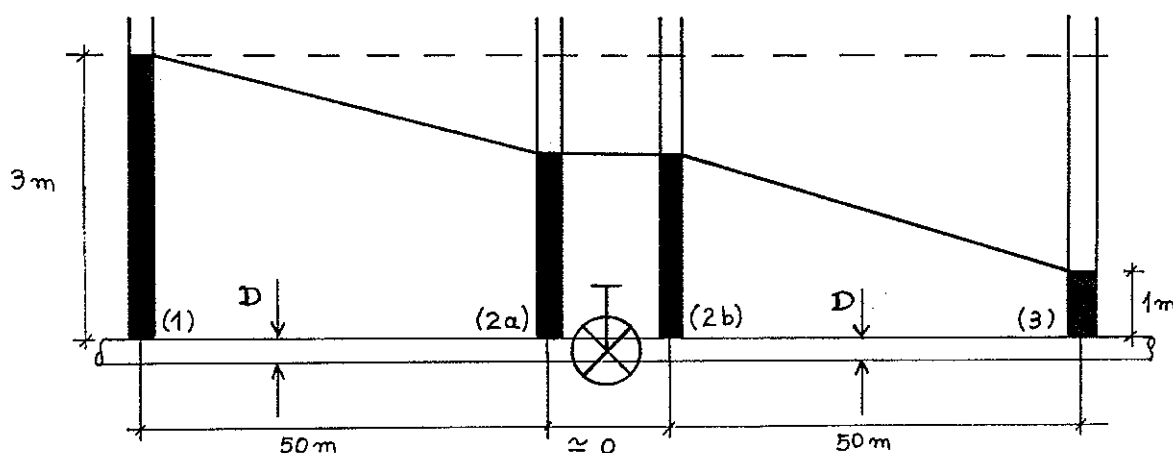
$$= \text{arc sen} \left( \frac{64 \cdot 1,1 \times 10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,31}{2 \cdot 10 \cdot (0,0127)^2} \right) = 42,6$$

$$\alpha = 42,6$$

Ex. 8.2 - O escoamento no trecho da figura é laminar. Com a válvula totalmente aberta a linha piezométrica é praticamente uma reta ( $k_s \approx 0$ ), conforme a figura.

Determinar o coeficiente de perda de carga singular da válvula, quando esta é acionada, fazendo com que a vazão na tubulação seja a metade que no caso da válvula totalmente aberta. Sabe-se que na segunda situação o desnível marcado pelos manômetros extremos é o mesmo da primeira situação.

Dados:  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma = 1000 \text{ Kgf/m}^3$ ,  $D = 2 \text{ cm}$



Como foi dado que o escoamento é laminar, então  $\alpha = 2$ , e o coeficiente da perda de carga distribuída, para esse regime, vale:

$$f = \frac{64}{R} = \frac{64 \nu}{V D}$$

Como no problema não existem perdas de carga devido a singularidades, teremos:

$$\Delta p \Big|_1^2 = \frac{64 \nu}{V D} \cdot \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{64 \nu \cdot L V}{D^2 \cdot 2g};$$

temos, então:

$$\frac{2 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{64 \nu L V}{D^2 \cdot 2g} \quad (A).$$

Aplicando-se a equação da continuidade entre os pontos 1 e 2, teremos:

$$Q_1 = Q_2 \text{ (regime permanente, fluido incompressível, homogêneo).}$$

$$\text{Ou seja: } V_1 S_1 = V_2 S_2 \rightarrow V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \rightarrow V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2,$$

$$\text{como } D_1 = D_2 = d \rightarrow V_1 = V_2 \text{ mas } Q = V S \rightarrow V = \frac{Q}{S} =$$

$$= \frac{0,142}{3600} \cdot \frac{4}{\pi (0,0127)^2} \rightarrow V = 0,31 \text{ m/s.}$$

$$\text{Pela figura: } \sin 30^\circ = \frac{z_1 - z_2}{L} = \frac{z_1 - z_2}{1} \rightarrow z_1 - z_2 = 0,5 \text{ m.}$$

Como  $V_1 = V_2$ , de (A) temos:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\gamma} &= (z_2 - z_1) + \frac{64 \nu L V}{D^2 \cdot 2g} = \\ &= -0,5 + \frac{64 \cdot 1,1 \times 10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,31}{(0,0127)^2 \cdot 2 \cdot 10} = \\ &= +0,18 \text{ m,} \end{aligned}$$

Solução:

Na primeira condição do problema, teremos uma vazão  $Q_0$  e a velocidade  $V_0$  para o escoamento. Escrevendo-se a Equação da Energia Cinética entre os pontos (1) e (3):

$$H_1 = H_3 + \Delta p \Big|_1^3.$$

Aplicando-se a Eq. da Continuidade no mesmo trecho te remos:

$$Q_1 = Q_3 \text{ (regime permanente, fluido homogêneo e incompressível)}$$

$$V_1 S_1 = V_3 S_3 \rightarrow V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_3 \frac{\pi D_3^2}{4} \rightarrow V_1 D_1^2 = V_3 D_3^2;$$

$$\text{como } D_1 = D_3 \rightarrow V_1 = V_3 = V_0,$$

$$\text{assim: } \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \Delta p \Big|_1^3.$$

Mas  $\frac{P_1}{\gamma} + z_1$  é a linha piezométrica, ou seja, a altura de fluido atingida no piezômetro.

Assim pela figura:

$$3 = 1 + \Delta p \Big|_1^3 + 2 = \Delta p \Big|_1^3 = \Sigma hf_{1,3} + \Sigma hs_{1,3}.$$

Daí

$$2 = f \frac{L_{1,3}}{D} \frac{V_0^2}{2g} + k_{s,2} \frac{V_0^2}{2g}.$$

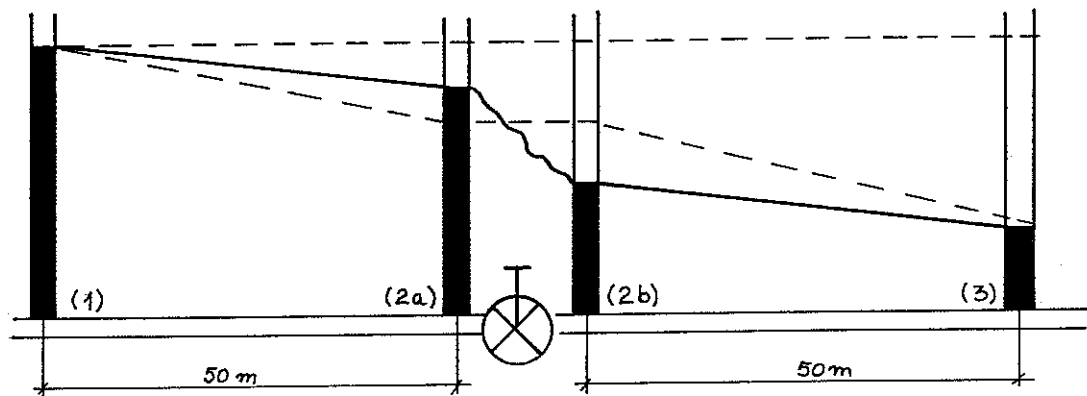
Mas na primeira condição  $k_{s,2} = 0$

e sendo o regime laminar:

$$f = \frac{64}{R} = \frac{64 \nu}{V_0 D} = \frac{64 \nu}{\frac{Q_0 \cdot D}{S}} = \frac{64 \nu}{\frac{Q_0 \cdot D}{\pi D^2}} = \frac{16\pi D \nu}{Q_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } 2 &= \frac{16\pi D v}{Q_0} \cdot \frac{L_{1,3}}{D} \cdot \frac{V_0^2}{2g} = \frac{16\pi D v}{Q_0} \frac{L_{1,3}}{D} \left(\frac{Q_0^2}{S_0^2}\right) \frac{1}{2g} = \\ &= \frac{16\pi D v}{Q_0} \cdot \frac{L_{1,3}}{D} \left(\frac{Q_0^2}{\pi^2 D^4}\right) \frac{1}{2g} \rightarrow Q_0 = \frac{\pi D^4 g}{64 v L_{1,3}} \end{aligned}$$

Na segunda condição temos uma vazão que é metade da vazão na condição inicial, ou seja a velocidade do fluido é também menor. Como a perda de carga é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade teremos uma altura de líquido no piezômetro (2a) maior que no caso inicial, ou seja a reta da linha piezométrica será menos inclinada.



Para este caso temos a vazão  $Q = \frac{Q_0}{2}$  e a velocidade  $V$ .

$$\text{Como } Q = V S \text{ e } Q_0 = V_0 S \rightarrow Q = V \cdot \frac{Q_0}{V_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{Q_0}{2} = V \cdot \frac{Q_0}{V_0} \rightarrow V = \frac{V_0}{2}$$

Assim, aplicando-se a Eq. da Energia Cinética entre (1) e (3) teremos:

$$2 = hf_{1,3} + h_{s,2} = f \frac{L_{1,3}}{D} \frac{V^2}{2g} + k_{s,2} \frac{V^2}{2g},$$

$$\text{onde } f = \frac{64}{R} = \frac{64 v}{\frac{Q_0}{\pi D}} = 32 \frac{\pi D v}{Q_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim: } 2 &= \frac{32\pi D v}{Q_0} \frac{L_{1,3}}{D} \frac{v_0^2}{4 \cdot 2g} + k_{s,2} \frac{v_0^2}{4 \cdot 2g} \quad + \\ + 2 &= \frac{32\pi D v L_{1,3}}{Q_0 D} \left( \frac{Q_0^2}{\pi^2 D^4} \right) \frac{1}{8g} + \frac{k_{s,2}}{8g} \left( \frac{Q_0^2}{\pi^2 D^4} \right) \quad + \\ + 2 &= \frac{64 v L_{1,3} Q_0}{\pi D^4 g} + \frac{k_{s,2} \cdot 2 Q_0^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D^4} \end{aligned}$$

Substituindo  $Q_0$  na equação:

$$2 = 1 + \frac{k_{s,2} \cdot Q_0^2 \cdot 2}{g \pi^2 D^4} \quad * \quad k_{s,2} = \frac{g \pi^2 D^4}{2 Q_0^2};$$

mas comparando essa equação e a equação anterior, temos que:

$$\frac{64 v L_{1,3} Q_0}{\pi D^4 g} = 1,$$

$$\text{ou: } Q_0 = \frac{\pi D^4 g}{64 v L_{1,3}} = \frac{\pi \cdot (2 \times 10^{-2})^4 \cdot 10}{64 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = 7,854 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s};$$

$$\text{logo: } k_{s,2} = \frac{10 \cdot \pi^2 \cdot (2 \times 10^{-2})^4}{2 \times (7,854 \times 10^{-4})^2} = 12,80.$$

**Ex. 8.3** - Na instalação da figura o sistema que interliga os reservatórios A e B é constituído por uma tubulação de diâmetro constante e pela máquina M. Admitindo-se desprezíveis as perdas de carga singulares na tubulação e sendo conhecida, no trecho CD, a inclinação da linha de energia (LE) e linha piezométrica (LP), pede-se:

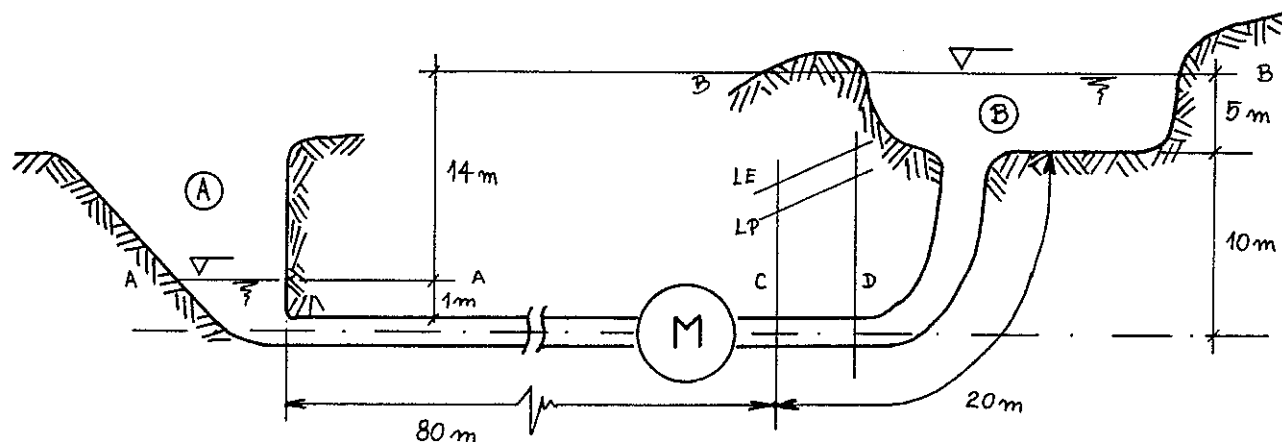
- O tipo de máquina M.
- A potência em CV da máquina, cujo rendimento é 75%
- A cota  $z$  da LP na seção C.

Dados:  $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$ , tubo de ferro fundido ( $k = 2,6 \times 10^{-4} \text{ m}$ ).



$$D = 0,1 \text{ m}$$

$$(LE - LP)_c = 0,2 \text{ m}$$



### Solução:

- a) Existem quatro hipóteses possíveis para o escoamento:
- a.1) O fluido esco da direita para a esquerda e a máquina é bomba.
  - a.2) O fluido esco da direita para a esquerda e a máquina é turbina.
  - a.3) O fluido esco da esquerda para a direita e a máquina é bomba.
  - a.4) O fluido esco da esquerda para a direita e a máquina é turbina.

Vemos que a hipótese a.4) não é possível uma vez que o reservatório B está com o nível de água mais alto que o do reservatório A.

Como foi dada a LE entre os pontos C e D e a cota em C é menor que a cota em D, vemos que o fluido esco de D para C u ma vez que a energia sempre diminui no sentido do escoamento de vido as perdas de carga. Assim, eliminamos a hipótese a.3).

Podemos, então, escrever a equação da Energia Cinética entre B-B e A-A. Ao escrever a fórmula imaginaremos que a máquina é uma bomba. Assim, ao resolver a equação, se o sinal do termo da máquina for positivo, estivamos corretos e a máquina é uma bomba; se for negativo, significa que a máquina é na verdade um turbina.

$$H_B + \frac{W_m}{\gamma Q} = H_A + \frac{W_a}{\gamma Q} \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. \rightarrow H_B + H_m = H_A + \Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right.$$

$$H_m = H_A - H_B + \Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{cases} (H_A - H_B) + \Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. > 0 \rightarrow \text{bomba.} \\ (H_A - H_B) + \Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. < 0 \rightarrow \text{turbina.} \end{cases}$$

$$H_A = \frac{\alpha V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + z_A \quad (\text{reservatório de grandes dimensões, aberto para atmosfera}).$$

$$H_B = \frac{\alpha V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + z_B \quad (\text{idem}).$$

$$\Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{pois as perdas de cargas singulares são desprezíveis, } L = 100 \text{ m} = \text{comprimento de toda a tubulação})$$

$$\Delta p \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. = f \cdot \frac{100}{0,1} \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Para calcular V, temos a informação que  $(LE - LP)_C = 0,2 \text{ m}$  ou seja:

$$\left( \frac{\alpha V_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} + z_C \right) - \left( \frac{P_C}{\gamma} + z_C \right) = 0,2 \text{ m, ou seja, com } \alpha \approx 1,0,$$

$$\frac{V_C^2}{2g} = 0,2 \text{ m.}$$

Como o diâmetro é constante, V é constante em qualquer seção,  $\frac{V^2}{2g} = 0,2$  ou  $V = \sqrt{0,4g} = 2 \text{ m/s}$ .

Para calcular f:

f.1) Utilizando a Equação de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{k}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right),$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{2 \times 0,1}{10^{-6}} = 2 \times 10^5,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \times \frac{2,6 \times 10^{-4}}{0,1} + \frac{2,51}{2 \times 10^5 \sqrt{f}} \right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 7,02 \times 10^{-4} + \frac{1,255 \times 10^{-5}}{\sqrt{f}} \right).$$

Método iterativo:

valor estimado	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10} (\dots)$	$\Delta$
0,02	7.0711	6,2039	14%
0,025	6.3246	6,2143	1,8%
0,026	6.2017	-	-
0,0255	6.2622	6.2152	0,8%

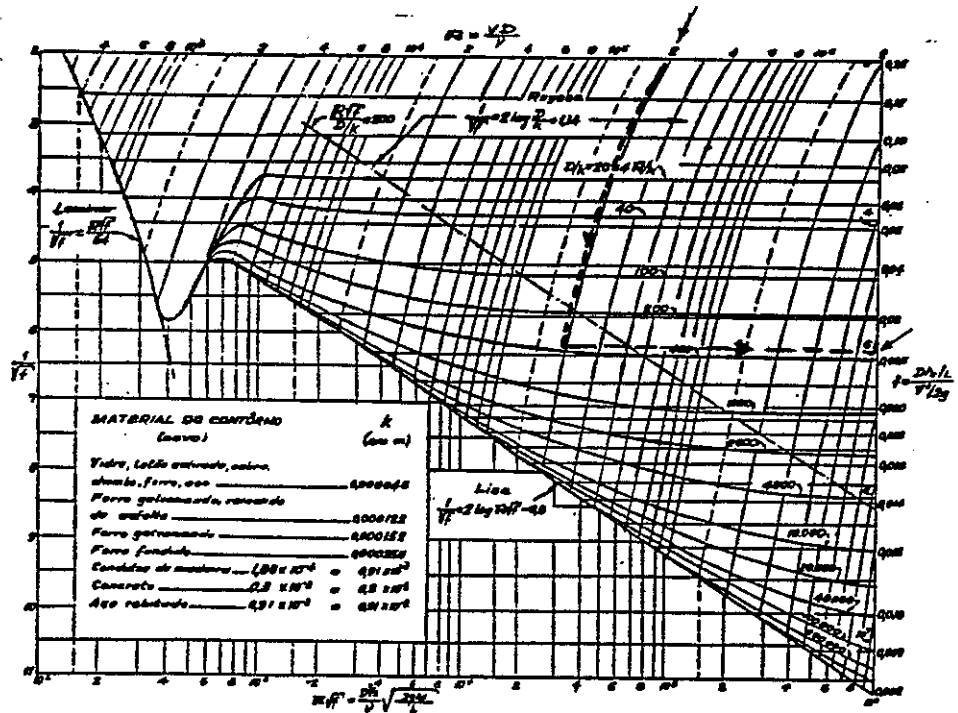
$$f = 0,0255.$$

f.2) Utilizando o diagrama de Moody-Rouse

$$\text{Número de Reynolds: } R = \frac{V D}{\nu} = 2 \times 10^5$$

$$\frac{D}{k} = \frac{0,1}{2,6 \times 10^{-4}} = 384,62$$

Entrar no diagrama pela parte superior com o número de Reynolds até encontrar a linha do  $D/k$ . Do ponto de encontro levar uma horizontal até encontrar o valor de  $f$  na direita.



Assim, voltando à equação da Energia Cinética, teremos:

$$H_m = H_A - H_B + \Delta p \left| \frac{A}{B} = 1 - 15 + 0,0255 \cdot \frac{100}{0,1} \cdot 0,2 = -8,9 \text{ m.} \right.$$

Logo a máquina é uma turbina

b) Cálculo da potência da máquina:

$$H_T = 8,9 \text{ m (carga que o fluido fornece a turbina)}$$

$$W_T = \gamma \cdot Q \cdot H_T \cdot \eta = \gamma \cdot V \cdot S \cdot H_T \cdot \eta = 1000 \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot (0,1)^2}{4} \cdot 8,9 \cdot 0,75 = 104,85 \text{ Kgm,}$$

$$W_T = \frac{104,85}{75} = 1,4 \text{ CV} = 1027,5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

c) Para obter a cota  $LP_C$ , aplicaremos a equação da Energia Cinética entre B-B e C-C.

$$H_B = H_C + \Delta p \left| \frac{B}{C} \right.,$$

$$15 = \frac{\alpha V_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\gamma} + z_C + f \frac{L_{BC}}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

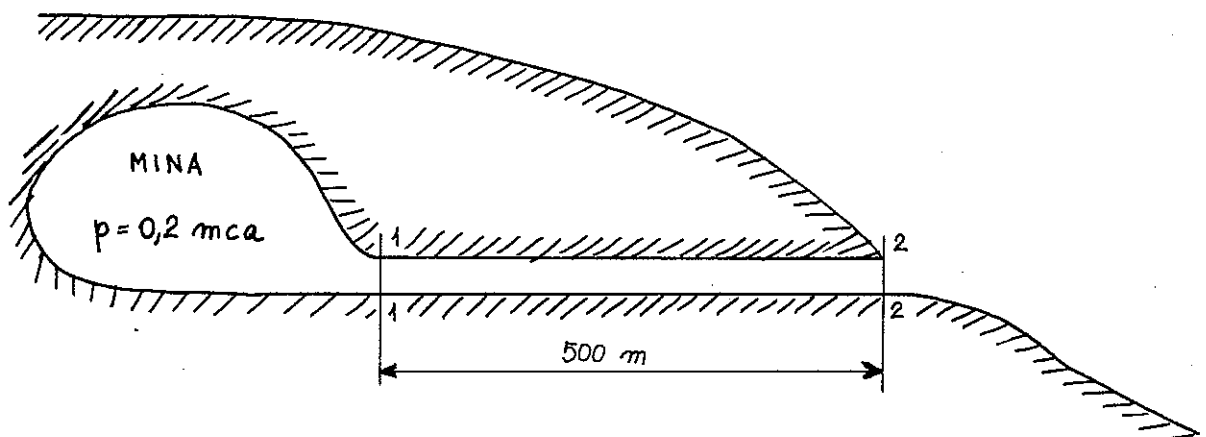
Mas  $LP_C = \frac{P_C}{\gamma} + z_C$ , logo:

$$15 = 0,2 + LP_C + 0,0255 \cdot \frac{20}{0,1} \cdot 0,2,$$

$$LP_C = \underline{13,78 \text{ m}}.$$

Ex. 8.4 - Uma galeria de seção quadrada (0.6 x 0.6 m) esgota ar de uma mina, onde a pressão é de 0,2 mca, para a atmosfera. Calcular a vazão de ar. Desprezar as perdas singulares.

Dados:  $v_{ar} = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma_{ar} = 1,3 \text{ Kgf/m}^3$ ,  $K = 10^{-3} \text{ m}$ ,  
 $\gamma_{\text{água}} = 10^3 \text{ Kgf/m}^3$ .



Solução:

Como a seção da tubulação é quadrada, para executarmos os cálculos iremos determinar o seu diâmetro hidráulico:

$$D_H = 4 R_H = 4 \frac{S}{\sigma} = \frac{4 \cdot (0,6)^2}{4 \cdot (0,6)} = 0,6 \text{ m}.$$

Aplicando-se, a Equação de Energia Cinética entre 1 e 2 temos:

$$H_1 - H_2 = \Delta p \Big|_1^2 = f \frac{L_{1,2}}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{perdas singulares desprezíveis}),$$

$$\left( \frac{\alpha V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = f \frac{L_{1,2}}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Pela Eq. da Continuidade, como as seções são iguais, temos:

$$Q_1 = Q_2 \text{ (fluido incompressível, homogêneo, movimento permanente)}$$

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \rightarrow V_1 = V_2 = V$$

A seção 2 está aberta para a atmosfera e portanto  $p_2$  efetivo = zero.

$$\text{Seção 1 e 2 estão na mesma cota: } z_1 = z_2'$$

logo:

$$\frac{P_1}{\gamma} = f \frac{L_{1,2}}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Mas

$$\frac{P_1}{\gamma} = 0,2 \text{ mca} = 0,2 \text{ metros coluna água}$$

$$= 0,2 \times \frac{\gamma_{\text{água}}}{\gamma_{\text{ar}}} \text{ metros coluna ar (que é o fluido que está escoando).}$$

$$\therefore \frac{P_1}{\gamma} = \frac{0,2 \times 1000}{1,3} = 154 \text{ m c ar}$$

$$\therefore 154 = f \cdot \frac{500 \cdot V^2}{0,6 \times 20} + 3,696 = f \cdot V^2$$

Para solucionar essa equação de duas variáveis teremos - que calcular de modo iterativo:

f1) Usando a fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \text{ onde } R = \frac{V D}{\nu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 4,5 \times 10^{-4} + \frac{4,1833 \times 10^{-5}}{V \sqrt{f}} \right)$$

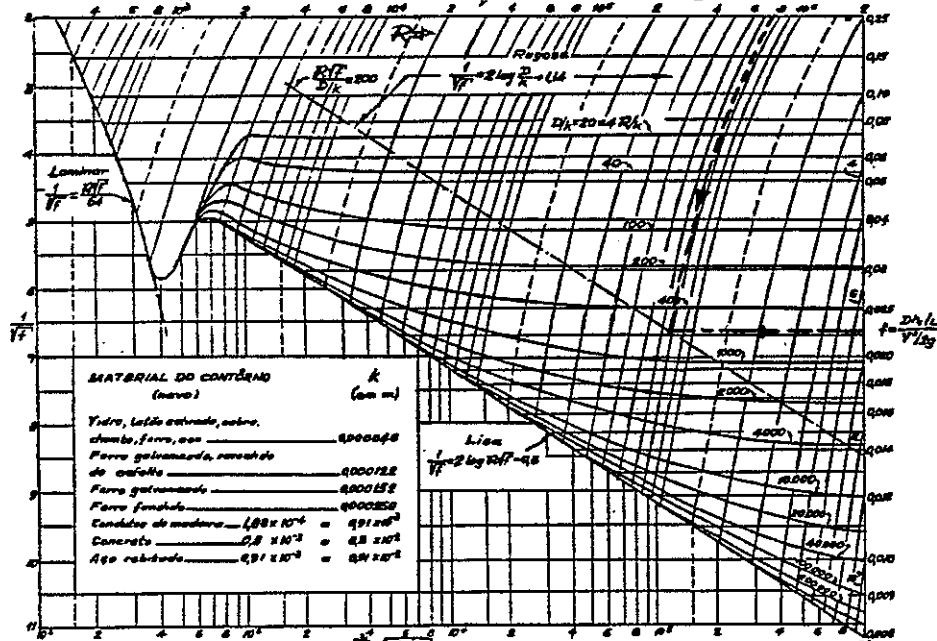
mas  $3,696 = f V^2 \rightarrow V \sqrt{f} = 1,9225$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} (4,7176 \cdot 10^{-4}) \rightarrow f = 0,0225$$

f2) Usando o diagrama de Moody-Rouse

$$\text{Cálculo de } \frac{D}{K} = \frac{0,6}{10^{-3}} = 600$$

Pelo diagrama vemos que se o número de Reynolds do escoamento for maior que  $7 \times 10^5$ , então estaremos no regime hidráulicamente rugoso e  $f$  será constante e igual a 0.0225.



Admitindo que isso ocorra (a comprovação é necessária posteriormente), temos:

$$3,696 = 0,0225 \cdot V^2 \rightarrow V = 12,82 \text{ m/s}$$

assim 
$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{12,82 \times 0,6}{10^{-5}} = 7,70 \times 10^5 > 7 \times 10^5$$

Portanto o regime está na região hidráulicamente rugosa e  $f = 0,0225$ .

Cálculo da vazão solicitada:

$$Q = V \cdot S = V \cdot (0,6) \times (0,6) = \sqrt{\frac{3,696}{0,225}} \cdot 0,36 = 4,61 \text{ m}^3/\text{s}$$

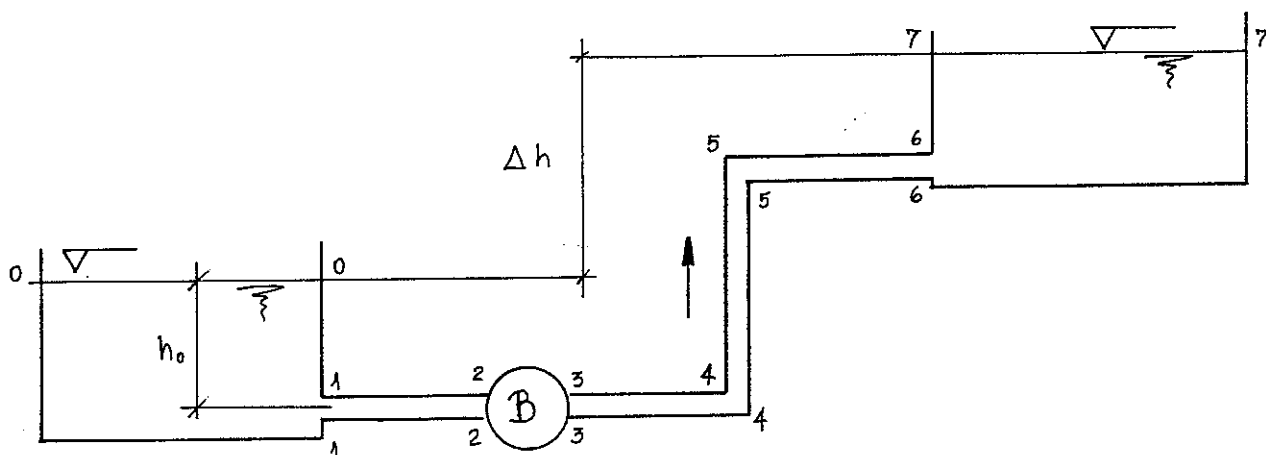
Ex. 8.5 - Na instalação da figura são dados:

- potência fornecida ao fluido: 1 CV,
- diâmetro constante da tubulação: 3 cm,
- vazão = 3 l/s,
- $ks_1 = 0,5$ ;  $ks_4 = 1,3$ ;  $ks_5 = 1,3$ ;  $ks_6 = 1,0$
- $f = 0,02$
- $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma = 1000 \text{ Kgf/m}^3$
- $L_{1,2} = 2 \text{ m}$ ;  $L_{3,6} = 10 \text{ m}$

Pede-se: a) desnível entre os reservatórios

b) rugosidade do conduto

c) altura  $h_0$  para que a pressão efetiva na entrada da bomba seja nula.



Solução:

a) Cálculo do desnível entre os reservatórios.

Aplicaremos a Equação da Energia Cinética entre as seções 0.0 e 7.7

$$H_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = H_7 + \frac{W_a}{\gamma Q} .$$

Como os reservatórios estão abertos à atmosfera e são de grandes dimensões:

$$H_0 = z_0 \text{ e } H_7 = z_7, \quad \text{logo}$$

$$H_B = H_7 - H_0 + \Delta p \Big|_0^7 = \Delta h + \Delta p \Big|_0^7 .$$

A perda da carga será dada por:



$$\Delta p \Big|_0^7 = \Sigma h_s + \Sigma h_f = ks_1 \frac{V^2}{2g} + ks_4 \frac{V^2}{2g} + ks_5 \frac{V^2}{2g} + ks_6 \frac{V^2}{2g} +$$

$$+ f \frac{L_{1,6}}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Como a seção é constante na tubulação temos, pela, Eq. da Continuidade:  $Q_1 = Q_2 = Q \rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 = V S \rightarrow V_1 = V_2 = V$ . Logo:

$$\Delta p \Big|_0^7 = (ks_1 + ks_4 + ks_5 + ks_6) \frac{V^2}{2g} + f \frac{L_{1,6}}{D} \frac{V^2}{2g} =$$

$$= (0,5 + 1,3 + 1,3 + 1,0) \frac{V^2}{20} + 0,02 \cdot \frac{12}{0,03} \cdot \frac{V^2}{20}.$$

$$\text{Mas } Q = V S \rightarrow V = \frac{3 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 0,03^2}{4}} = 4,24 \text{ m/s};$$

$$\Delta p \Big|_0^7 = 10,88 \text{ m.}$$

$$\text{Como } W_B = 1 \text{ CV} = 75 \text{ Kgm/s e } H_B = \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{75}{10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ m,}$$

$$\text{temos: } 25 = \Delta h + 10,88 \rightarrow \Delta h = 14,12 \text{ m.}$$

#### OBSERVAÇÃO:

No cálculo da perda de carga poderíamos ter utilizado o conceito de comprimento equivalente, transformando as perdas singulares em perdas distribuídas:

$$h_s = ks \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_s = h_f \rightarrow ks = f \frac{L_{eq}}{D},$$

$$\text{ou seja: } L_{eq} = \frac{D \cdot k_s}{f} = \frac{0,03}{0,02} \cdot k_s = 1,5 \cdot k_s;$$

$$\text{como } \Sigma k_s = 4,1 \rightarrow L_{eq} = 1,5 \times 4,1 = 6,15\text{m.}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim: } \Delta p \Big|_0^7 &= f \frac{L_T}{\gamma} \frac{V^2}{2g} = f \frac{(L + L_{eq})}{D} \frac{V^2}{2g} = \\ &= 0,02 \frac{(12 + 6,15)}{0,02} \cdot \frac{4,24^2}{20} = 10,88\text{m.} \end{aligned}$$

## b) Cálculo da rugosidade

### b.1) Equação Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right),$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{4,24 \cdot 0,03}{10^{-6}} = 1,272 \times 10^5,$$

$$\frac{1}{\sqrt{0,02}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{0,03} + \frac{2,51}{1,272 \times 10^5 \sqrt{0,02}} \right),$$

$$-3,5355 = \log_{10} (9k + 1,3953 \times 10^{-4}),$$

$$2,9141 \times 10^{-4} = 9k + 1,3953 \times 10^{-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow K = 1,69 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

### b.2) Diagrama de Moody-Rouse.

Calcular  $1/\sqrt{f}$ : entra-se pela esquerda do gráfico na horizontal até encontrar a linha curva do número de Reynolds que se possui. O ponto de encontro é a linha do valor de  $D/K$ . Com o valor de  $D$  obtém-se  $K$ .

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{0,02}} = 7,071;$$

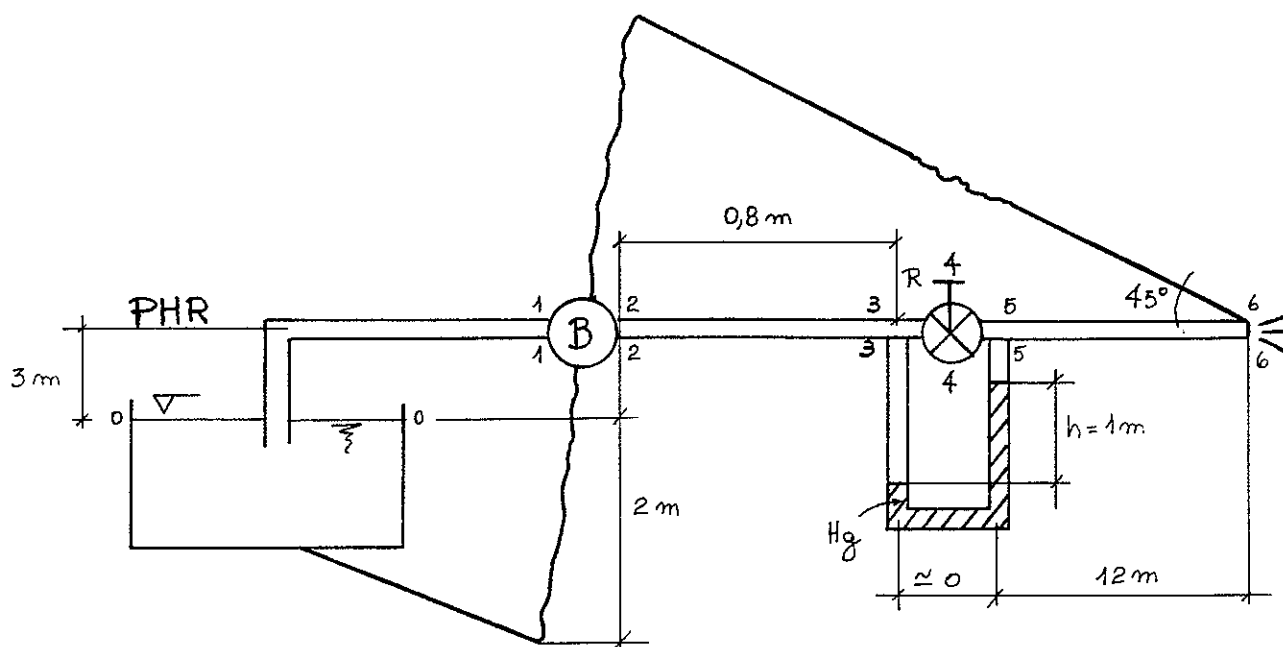
$$R = \frac{V D}{\nu} = 1,272 \times 10^5.$$



**Ex. 8.6** - Na instalação da figura, a bomba B recalca uma vazão  $Q$  e a linha de energia para tal vazão tem a configuração indicada. A tubulação tem diâmetro constante  $D = 25 \text{ mm}$  e o coeficiente de perda de carga  $f = 0,025$ . Sabendo-se que o ma nômetro diferencial conectado no registro R da forma indicada acusa um desnível  $h = 1 \text{ m}$ , determinar:

- Vazão  $Q$ .
- A potência do eixo da bomba, supondo-se um rendimento de 59%.

Dados:  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ Kgf/m}^3$ ;  $\gamma_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kgf/m}^3$ .



**Solução:**

- Vazão  $Q$

Para o cálculo da vazão é necessário conhecer a velocidade. Para tanto vemos que no trecho 5 - 6 a Linha de Energia tem inclinação de  $45^\circ$ . Como entre 5 e 6 a seção é constante, temos pela Eq. da Continuidade que  $V_5 = V_6$ , assim a L. Piezométrica é paralela à linha de energia, já que em cada seção vale:

$$LE - LP = V^2/2g = \text{constante}$$

$$\text{Assim nesse trecho: } hf = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \rightarrow \frac{hf}{L} = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Mas  $\frac{hf}{L}$  é a inclinação da linha piezométrica e é tal que:  $\text{tg } \alpha = \frac{hf}{L}$ ; com  $\alpha = 45^\circ \rightarrow \frac{hf}{L} = 1$ , ou

$$\frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = 1 \rightarrow \frac{f}{D} \frac{Q^2}{S^2 2g} = 1 \rightarrow \frac{f}{D^5} \frac{Q^2 8}{\pi^2 g} = 1,$$

$$\text{logo } Q = \sqrt{\frac{D^5 \pi^2 g}{8 f}} = 2,20 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

#### b) Potência da bomba

Para o cálculo da potência da bomba, devemos aplicar a Equação da Energia Cinética entre duas seções conhecidas, que contenham a bomba.

Na seção 1 - 1, pela figura, sabemos que a cota da linha de Energia vale -5 m. (Plano horizontal de referência passando por 1 - 1 e 6.6)

Assim, entre as seções 1 - 1 e 6 - 6, vale:

$$H_1 + \frac{W_B}{\gamma Q} = H_6 + \Delta p \Big|_1^6$$

$$-5 + \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{\alpha V_6^2}{2g} + \frac{P_6}{\gamma} + z_6 + (\Sigma h_s + \Sigma hf) \Big|_1^6,$$

$$\text{onde } \gamma Q = 10^3 \times 2,20 \times 10^{-3} = 2,20 \text{ Kgf/s}$$

$$\text{e } V_6 = \frac{Q_6}{S_6} = \frac{2,20 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 0,025^2}{4}} = 4,482 \text{ m/s}.$$

$$\therefore -5 + \frac{W_B}{2,20} = \frac{4,482^2}{20} + 0 + 0 + h_{sR} + f \frac{L_{1-6}}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Como as perdas de carga singulares cansadas pela bomba já estão inclusas no rendimento fornecido, teremos que calcu

cular apenas a perda de carga singular do registro e a perda de carga distribuída nos 12,8 m de tubulação:

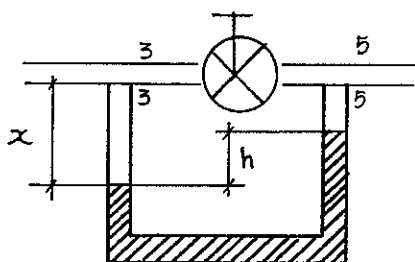
Aplicando a Eq. da Energia Cinética entre 3-3 e 5-5, temos:

$$H_3 - H_5 = \Delta p \Big|_3^5 = h_{s_R};$$

$$\frac{\alpha V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3 - \frac{\alpha V_5^2}{2g} - \frac{p_5}{\gamma} - z_5 = h_{s_R};$$

$$V_3 = V_5; \quad z_3 = z_5 \rightarrow \frac{p_3 - p_5}{\gamma} = h_{s_R}$$

Pelo manômetro tipo U, temos:



$$p_3 + x \gamma_{H_2O} - h \gamma_{Hg} - (x-h) \gamma_{H_2O} = p_5,$$

$$p_3 - h(\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}) = p_5,$$

$$p_3 - p_5 = h(\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}) = 12600 \text{ kgf/m}^2.$$

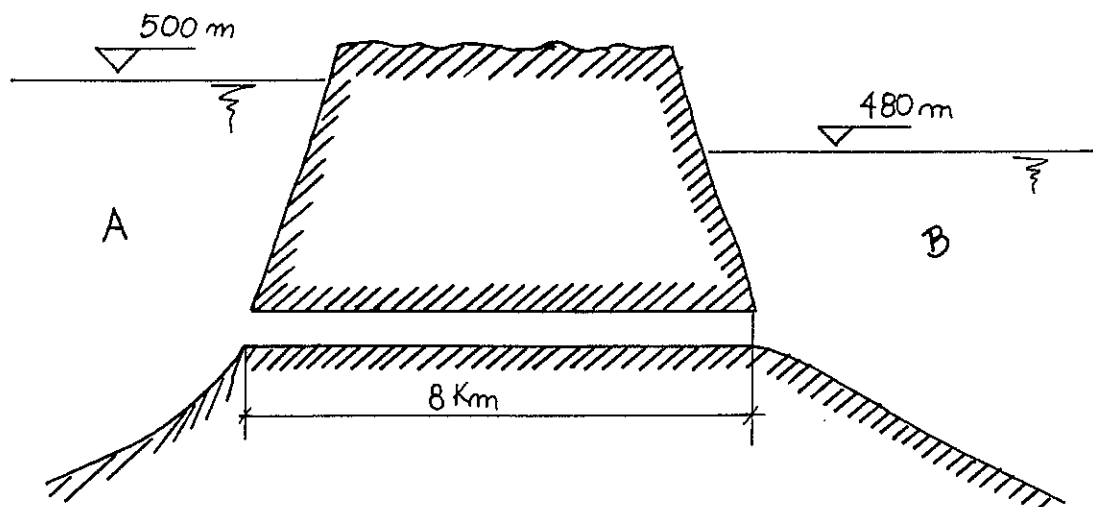
$$\text{Donde } h_{s_R} = \frac{12600}{1000} = 12,6 \text{ m.}$$

$$\text{Logo: } -5 + \frac{W_B}{2,20} = 1 + 12,6 + 0,025 \cdot \frac{12,8}{0,025} \cdot 1.$$

∴  $W_B = 2,20 \times 31,4 = 69,08 \text{ kgm/s}$  que é a potência que a bomba fornece ao fluido (útil). A potência fornecida à bomba em CV, será:

$$W_B = \frac{\gamma Q H_m}{75 \cdot \eta} = \frac{69,08}{75 \cdot 0,59} = 1,56 \text{ CV.}$$

Ex. 8.7 - Dois reservatórios cujos níveis estão nas cotas 500 m e 480 m estão ligados por uma tubulação de concreto ( $K = 10^{-3} \text{ m}$ ) de 8 km de extensão e 1 m de diâmetro. Pede-se a vazão que pode ser transportada (desprezar perdas singulares). Dado  $v_{\text{agua}} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



Solução:

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre os níveis dos reservatórios A e B, temos:

$$H_A = H_B + \frac{W_a}{\gamma Q}, \text{ uma vez que devido ao desnível a água}$$

fluirá do reservatório A para o B. Como são desprezíveis as perdas de carga singulares, e como os reservatórios são abertos para a atmosfera e de grandes dimensões ( $V = 0$  e  $p = 0$ ), temos:

$$500 = 480 + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + 20 = f \frac{8000}{1} \frac{V^2}{20}$$

ou seja:  $V^2 f = 0,05$

a) Resolução da equação pela fórmula de Colebrook.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right)$$

onde  $R = \frac{V D}{\nu}$ .

$$\text{Logo: } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{10^{-3}}{1} + \frac{2,51 \nu}{V D \sqrt{f}} \right)$$

$$\text{ou } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 2,7 \times 10^{-4} + \frac{2,51 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right)$$

Mas como  $V^2 f = 0,05 \rightarrow V \sqrt{f} = 0,2236$ ;

$$\text{logo } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 2,7 \times 10^{-4} + \frac{2,51 \times 10^{-6}}{0,2236} \right).$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} (2,8123 \times 10^{-4}) \rightarrow f = 0,0197.$$

b) Resolução da equação pelo gráfico de Moody-Rouse.

$$\text{Cálculo de } \frac{D}{k} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000 .$$

Pelo gráfico observa-se que para números de Reynolds superiores a  $1 \times 10^6$ , e  $D/k = 1000$  o escoamento encontra-se no escoamento hidraulicamente rugoso e o valor de  $f$  é constante e igual a 0,0197. (ver gráfico na próxima página).

Assumindo que  $f = 0,0197$ , teremos

$$V^2 f = 0,05 \rightarrow V = \sqrt{\frac{0,05}{f}} = \sqrt{\frac{0,05}{0,0197}} = 1,593 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e o número de Reynolds fica:

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{1,593 \times 1}{10^{-6}} = 1,6 \times 10^6 > 1 \times 10^6.$$

Logo, estamos na faixa do hidraulicamente rugoso e  $f = 0,0197$ .

A vazão fica, então:

$$Q = V \cdot S = 1,593 \times \frac{\pi D^2}{4} = 1,25 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) Resolução usando  $R\sqrt{f}$ .

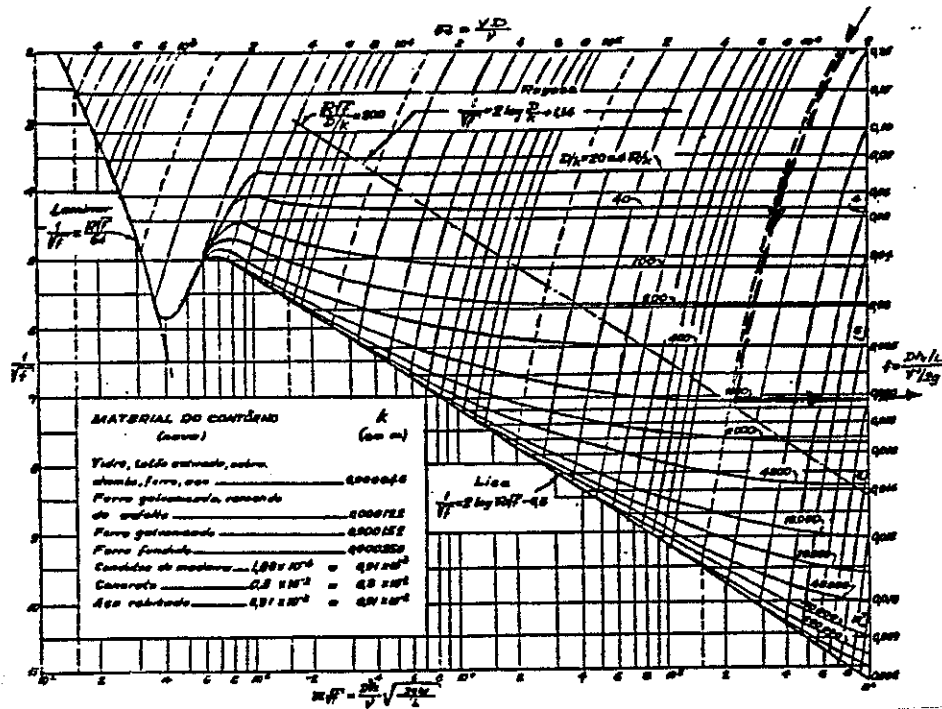
$$\text{Como } R\sqrt{f} = \frac{D^{2/3}}{\nu} \sqrt{\frac{hf \cdot 2g}{L}} \text{ (ver gráfico), temos,}$$

$$\text{no nosso caso, } R\sqrt{f} = \frac{1^{3/2}}{10^{-6}} \sqrt{\frac{20 \cdot 2 \cdot 10}{8000}} = 2,24 \times 10^5;$$

entrando na parte inferior do gráfico de Moody-Rouse até

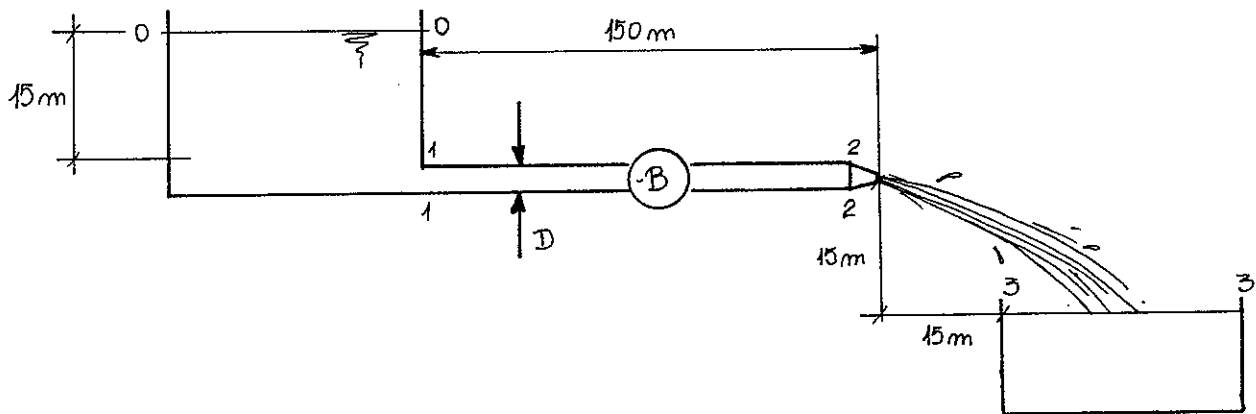


encontrar  $D/K = 1000$ , temos  $f = 0,0197$ .



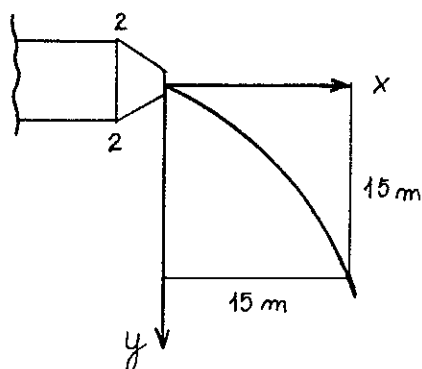
**Ex. 8.8** - Na instalação da figura a água deve ser lançada, por meio de um bocal, no tanque. Determinar a mínima potência da bomba para que isso aconteça.

Dados:  $D = 10 \text{ cm}$ ;  $k = 2,6 \times 10^{-4} \text{ m}$ ;  $D_2 = 7,5 \text{ cm}$ ;  $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\gamma = 10^3 \text{ kgf/m}^3$ ;  $ks_1 = 0,5$ ;  $\eta_B = 0,75$ .



**Solução:**

Inicialmente devemos calcular a mínima velocidade à saída do bocal 2-2 para que a água atinja o tanque. Pela figura, vê-se que, para uma queda livre de 15 m, a água deve alcançar pelo menos a borda do reservatório, distante 15 m, na horizontal.



$x = V_2 t$  (desprezando-se a resistência do ar)

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad \text{ou}$$

$$y = \frac{g x^2}{2 V_2^2} \rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}$$

$$V_2 = \sqrt{5 \cdot 15} = 8.66 \text{ m/s.}$$

Assim, aplicando-se a Equação da Continuidade entre as seções 1-1 e 2-2, temos:

$Q_1 = Q_2$  (fluido homogêneo, incompressível, movimento permanente)

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \rightarrow V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \rightarrow V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 \rightarrow$$

$$V_1 \cdot 10^2 = 8,66 \cdot 7,5^2 \rightarrow V_1 = 4.87 \text{ m/s.}$$

Aplicando-se a Eq. da Energia Cinética, entre os pontos 0-0 e 2-2, temos:

$$H_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = H_2 + \frac{W_a}{\gamma Q},$$

$$\frac{\alpha V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array} \right.,$$

$V_0 = 0$ ;  $p_0 = 0$  → reservatório de grandes dimensões,

$z_2 = 0$  (plano horizontal de referência) e  $p_2 = 0$  (aberto para a atmosfera).

$$\therefore z_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + k s_1 \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g},$$

$$15 + \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{1 \cdot 8,66^2}{20} + 0,5 \cdot \frac{4,87^2}{20} + f \cdot \frac{150}{0,1} \cdot \frac{4,87^2}{20}.$$

f.1) Cálculo de f pela fórmula de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,2 + \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right)$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{4,87 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 4,87 \cdot 10^5$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \cdot \frac{2,6 \cdot 10^{-4}}{0,1} + \frac{2,51}{4,87 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{f}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 7,02 \times 10^{-4} + \frac{5,154 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right)$$

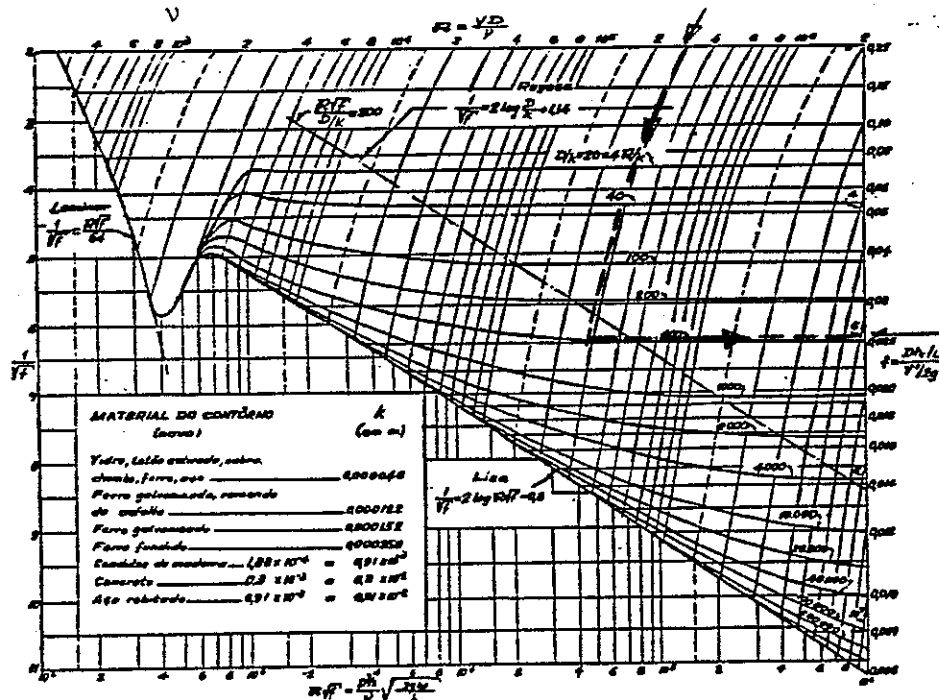
f admitido	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10} (\dots)$	$\Delta$
0,02	7,0711	6,2634	13%
0,025	6,3246	6,2679	0,9%
0,0252	6,2999	6,2681	0,5%

∴ f = 0,0252

f.2) Obtenção de f com o diagrama de Moody-Rouse.

$$\frac{D}{k} = \frac{0,1}{2,4 \times 10^{-4}} = 416,67$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = 4,87 \cdot 10^5 \text{ (ver explicação na pg. 26).}$$



Com a entrada de R pela parte superior do gráfico, em curva, até atingir a linha de  $D/k = 416,67$ . Nesse ponto, saindo na horizontal até encontrar o valor de f, obtemos:

$$f = 0,0252.$$

Assim:

$$15 + \frac{W_B}{\gamma Q} = 3,75 + 0,59 + 0,0252 \cdot \frac{150}{0,1} \cdot 1,186,$$

$$\frac{W_B}{\gamma Q} = 34,165;$$

$$Q = V S = 4,87 \times \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 38,25 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$\therefore W_B = 34,165 \times 38,25 \times 10^{-3} \times 10^3 = 1306,77 \frac{\text{kgf} \times \text{m}}{\text{s}}.$$

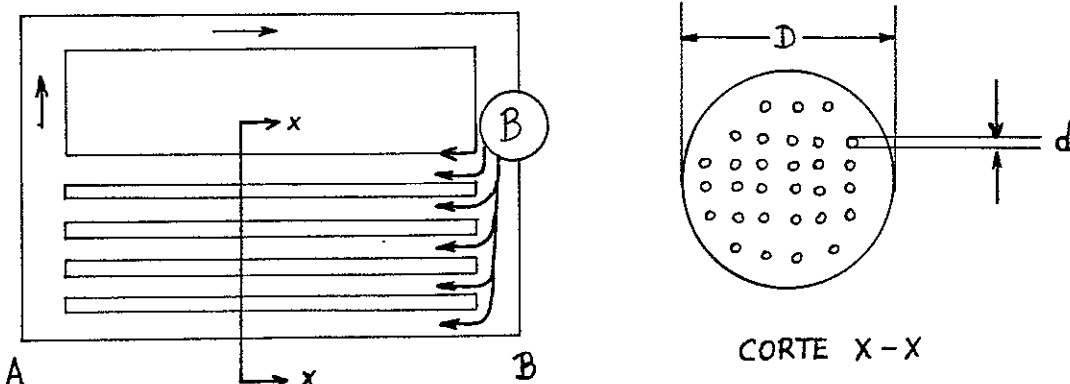
Esse valor é a potência útil.

A potência fornecida à bomba é dada por:

$$W_B = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{\eta \cdot 75} = \frac{1306,77}{75 \times 0,75} = 23,2 \text{ CV}.$$

Ex. 8.9 - Entre A e B do circuito hidráulico da figura está um conjunto de 28 elementos combustíveis usados em reatores nucleares. Desprezando as perdas, calcular a rugosidade equivalente k dos materiais de que são feitas os tubos.

Dados:  $W_B = 24 \text{ CV}$ ,  $\eta_B = 0,75$ ; perda de carga entre A e B = 135m,  $D = 0,10 \text{ m}$ ,  $d = 1,5 \text{ cm}$ ,  $L_{A,B} = 24 \text{ m}$ ;  $\nu = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$ .



Solução:

Toda a seção x-x pode ser substituída por uma tubulação equivalente, ou seja, uma tubulação que possua o mesmo diâmetro hidráulico para o cálculo.

Assim:

$$D_H = 4 R_H = 4 \frac{S}{\sigma} = 4 \frac{(\pi/4)(D^2 - 28 d^2)}{\pi (D + 28 d)} =$$

$$= \frac{(0,1^2 - 28 \cdot 0,015^2)}{(0,1 + 28 \cdot 0,015)} = 0,00712 \text{ m.}$$

Pela fórmula universal da perda de carga:

$$hf = f \frac{L_{BA}}{D_H} \frac{V^2}{2g} \rightarrow 135 = f \cdot \frac{24}{0,00712} \cdot \frac{V^2}{20} \rightarrow f V^2 = 0,801.$$

Como são desprezadas as perdas do resto do circuito, a potência que a bomba fornece serve especificamente para suprir as perdas de carga. Então:

$$\frac{W_B}{\gamma Q} = \Delta p \left| \begin{array}{l} B \\ A \end{array} \right. = 135 \text{ m};$$

$W_B = 24$  CV é a potência fornecida pela bomba, porém a potência transmitida para fluido vale:

$$W_B = 24 \times \eta = 24 \times 0,75 = 18 \text{ CV} =$$

$$= 18 \times 75 = 1350 \text{ kgm/s.}$$

$$\therefore Q = \frac{W_B}{135 \cdot \gamma} = \frac{1350}{135 \cdot 10^3} = 0,01 \text{ m}^3/\text{s} \text{ ou}$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{0,01}{\frac{\pi}{4} (D^2 - 28 d^2)} = \frac{0,01}{29,06 \times 10^{-4}} = 3,44 \text{ m/s};$$

$$\text{logo } f V^2 = 0,801 \rightarrow f = \frac{0,801}{3,44^2} = 0,0677,$$

a) Cálculo de K pela fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right);$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{3,44 \cdot 0,00712}{10^{-7}} = 2,45 \times 10^5.$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{0,0677}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \cdot \frac{K}{0,00712} + \frac{2,51}{2,45 \times 10^5 \cdot \sqrt{0,0677}} \right),$$

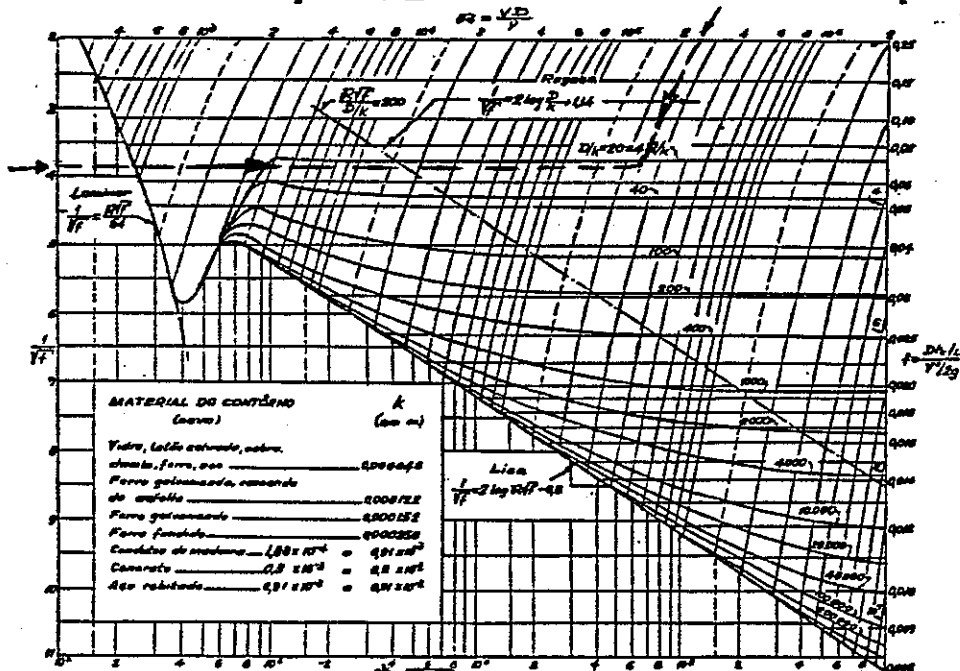
$$3,8433 = -2 \log_{10} (37,921 \cdot K + 3,9374 \times 10^{-5}),$$

$$\therefore 37,921 K + 3,9374 \times 10^{-5} = 0,011977,$$

$$K = 0,00032 \text{ m.}$$

b) Cálculo de K pelo diagrama de Moody-Rouse.

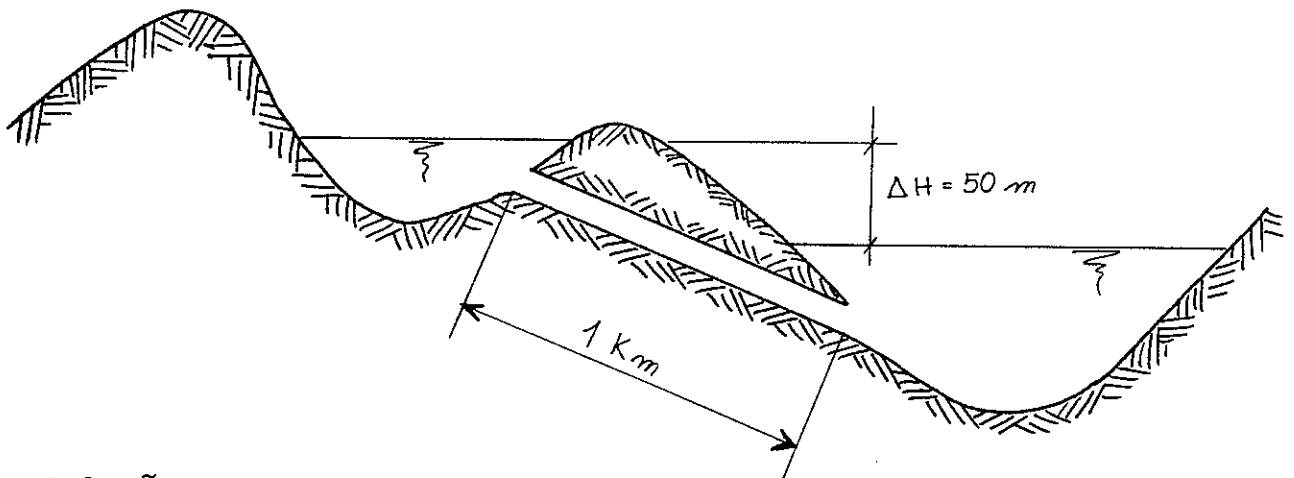
Através do diagrama, entra-se com o valor de R pela parte superior até encontrar com a linha de  $\frac{1}{\sqrt{f}}$  (linha horizontal que se entra no gráfico pela esquerda). No ponto de encontro verifica-se qual o valor da linha de D/K que aí passa.



$$R = \frac{V D}{\nu} = 2,45 \times 10^5 \text{ e } \frac{1}{\sqrt{f}} = 3,8433,$$

daí, obtém-se  $\frac{D}{K} = 22,6$ , donde  $K = \frac{0,00712}{22,6} = 0,00032 \text{ m.}$

Ex. 8.10 - Na instalação da figura quer se determinar o diâmetro da tubulação, para que na condição mostrada a vazão seja de  $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ . Desprezam-se as perdas de carga singulares. Dado  $K = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



Solução:

Aplicando-se a Eq. da Energia Cinética entre os dois reservatórios (de grandes dimensões, logo  $V = 0$  e  $p = 0$ , pois está aberto à atmosfera) temos:

$$\Delta H = 50 \text{ m} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{1000}{D} \left( \frac{Q^2}{\pi^2 D^4} \right) \frac{1}{2g} \rightarrow$$

$$\frac{f}{D^5} = \frac{50 \cdot 20 \cdot \pi^2}{1000 \cdot 1 \cdot 16} + \frac{f}{D^5} = 0,61685.$$

a) Cálculo de  $D$  pela fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right);$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{V D}{\nu} = \frac{Q D}{S \nu} = \frac{Q \cdot D \cdot 4}{\pi D^2 \nu} = \frac{4 Q}{\pi D \nu} = \frac{4}{\pi D 10^{-6}} = \\ &= \frac{4 \cdot 0,9079}{\pi \cdot 10^{-6} \cdot f^{1/5}} = \frac{1,156 \times 10^6}{f^{1/5}}; \end{aligned}$$

$$R \sqrt{f} = 1,156 \times 10^6 \cdot f^{3/10}$$

$$\frac{K}{D} = \frac{K \cdot 0,9079}{f^{1/5}} = \frac{9,079 \times 10^{-4}}{f^{1/5}} \quad e$$

$$0,27 \frac{K}{D} = \frac{2,4513 \times 10^{-4}}{f^{1/5}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2,4513 \times 10^{-4}}{f^{1/5}} + \frac{2,1713 \times 10^{-6}}{f^{3/10}} \right).$$

Admitindo f	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta$
0,02	7.0711	6.5303	8%
0.025	6.3246	-	
0.022	6.7420	6.5467	3%
0.023	6.5938	6.5548	0,6%

Assim  $f = 0,023$ ,

$$\log_{10} \frac{f}{D^5} = 0,61685 \quad \rightarrow \quad D = \left( \frac{0,023}{0,61685} \right)^{1/5} = 0,52 \text{ m.}$$

Logo  $D = 0,52 \text{ m.}$

b) Cálculo de D pelo diagrama de Moody-Rouse:

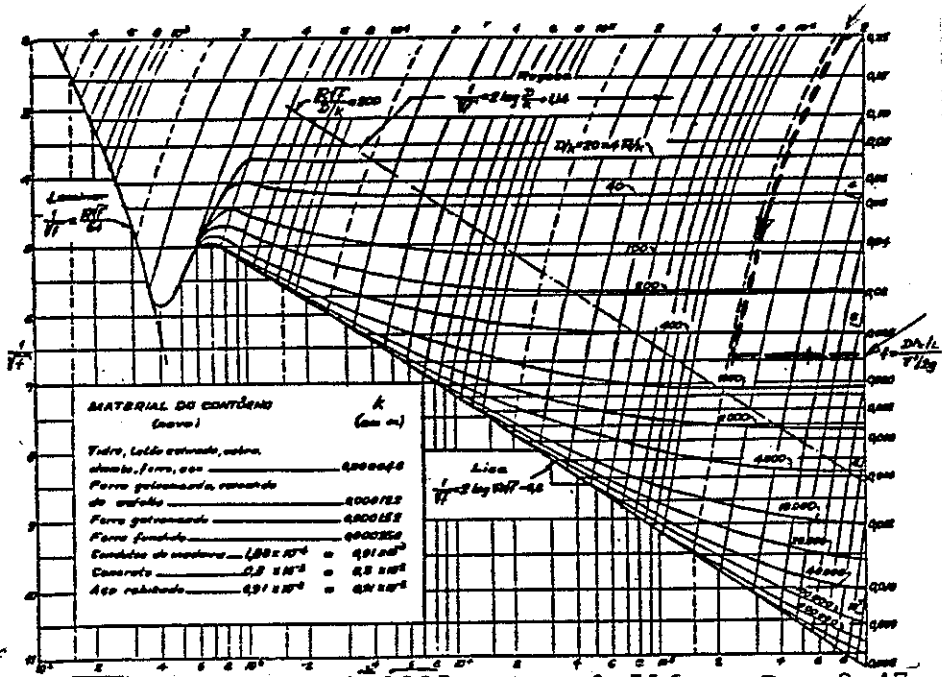
Admite-se um  $f$ , obtêm-se pela expressão  $\frac{f}{D^5} = 0,61685$  o valor de D. Calcula-se  $R$  e  $\frac{D}{K}$ , entra-se no gráfico e verifica-se  $f$ , utiliza-se esse  $f$  para reiniciar o ciclo, até o processo convergir.

$$f \text{ estimado: } 0,02 \quad \rightarrow \quad D^5 = \frac{0,02}{0,61685} \quad \rightarrow \quad D = 0,798 \text{ m.}$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{4}{\pi D \nu} = \frac{4}{\pi \cdot 0,798 \cdot 10^{-6}} = 1,60 \times 10^6;$$

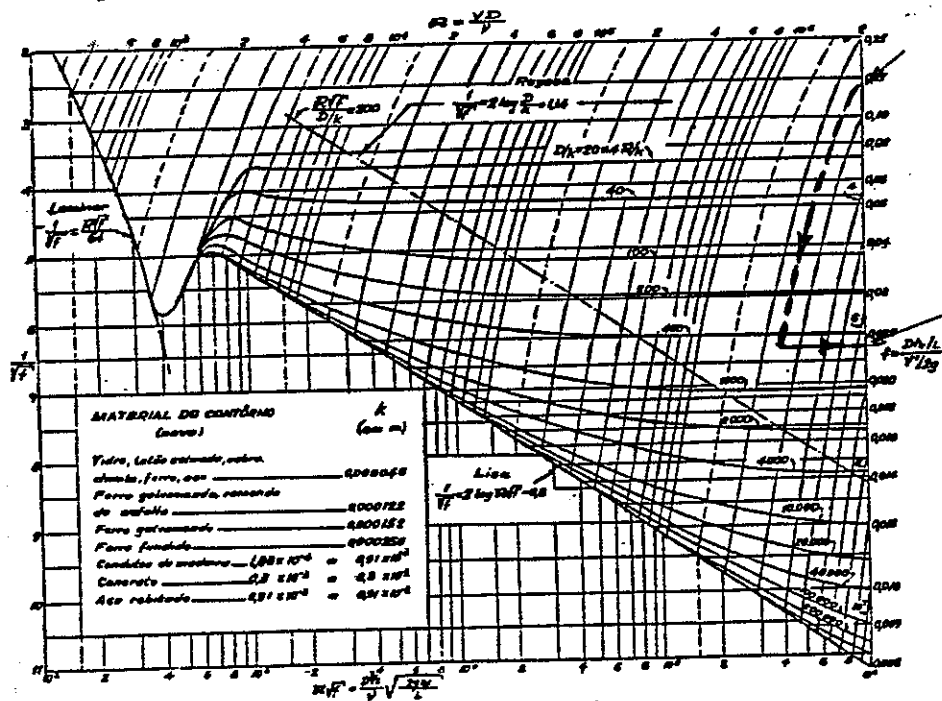
$$\frac{D}{k} = \frac{0,798}{10^{-3}} = 798.$$





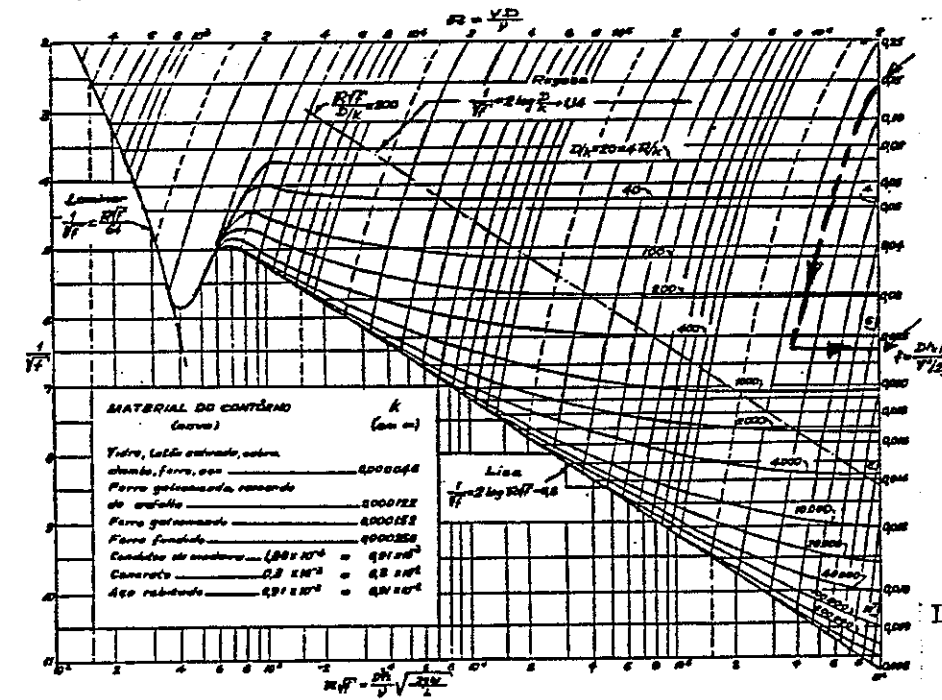
$f = 0,0225.$

Logo, novo  $f = 0,0225 \rightarrow D = 0,516m \rightarrow R = 2,47 \times 10^6$  e  $\frac{D}{k} = 516,$



$f = 0,023.$

Logo, novo  $f = 0,023 \rightarrow D = 0,518 \rightarrow R = 2,46 \times 10^6$  e  $\frac{D}{k} = 518,$



$f = 0,023.$

Logo,  $D = 0,52m.$

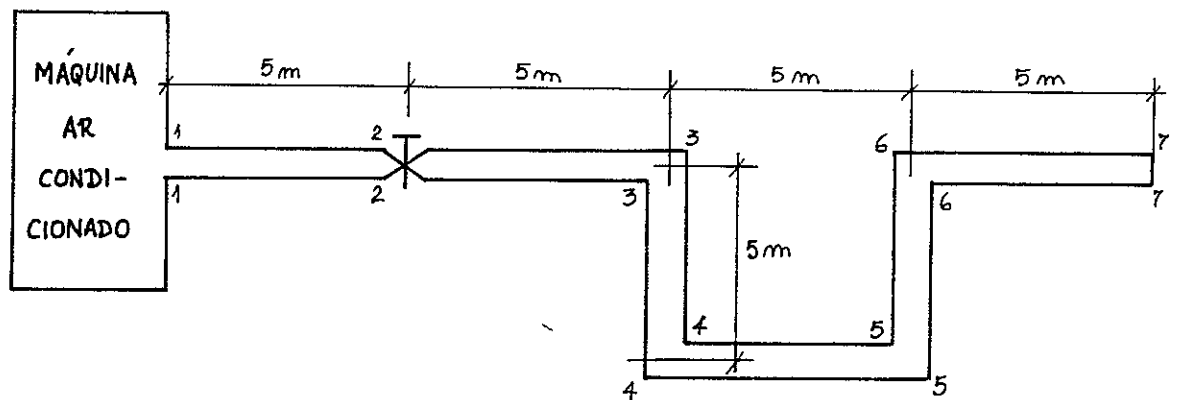
Ex. 8.11 - Na instalação de ar condicionado apresentada pede-se um relação entre a vazão do sistema e a diferença de pressão entre as seções 1 e 7.

Dados: - seção de escoamento retangular, constante  $0,6 \times 0,3$  m.

-  $k_s$  cotovelo = 1,3; L eq registro = 7 m

-  $\gamma_{ar} = 1,3 \text{ kgf/m}^3$ ,  $\nu_{ar} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

-  $K = 10^{-3}$  m



Solução:

Inicialmente iremos calcular o diâmetro hidráulico da tubulação.

$$D_H = 4 R_H = \frac{4 S}{\sigma} = \frac{4 \cdot (0,6 \times 0,3)}{2 \cdot (0,6 + 0,3)} = 0,4 \text{ m.}$$

Aplicando a Equação da Energia Cinética entre as seções 1-1 e 7-7 temos:

$$H_1 = H_7 + \frac{\Delta W_a}{\gamma Q}$$

Pela Equação da Continuidade  $Q_1 = Q_7$  (fluido incompressível pois abaixo de 60 m/s o ar se porta como tal, movimento permanente).

$$V_1 S_1 = V_7 S_7 \rightarrow V_1 = V_7 = V \text{ pois } S_1 = S_7 = S.$$

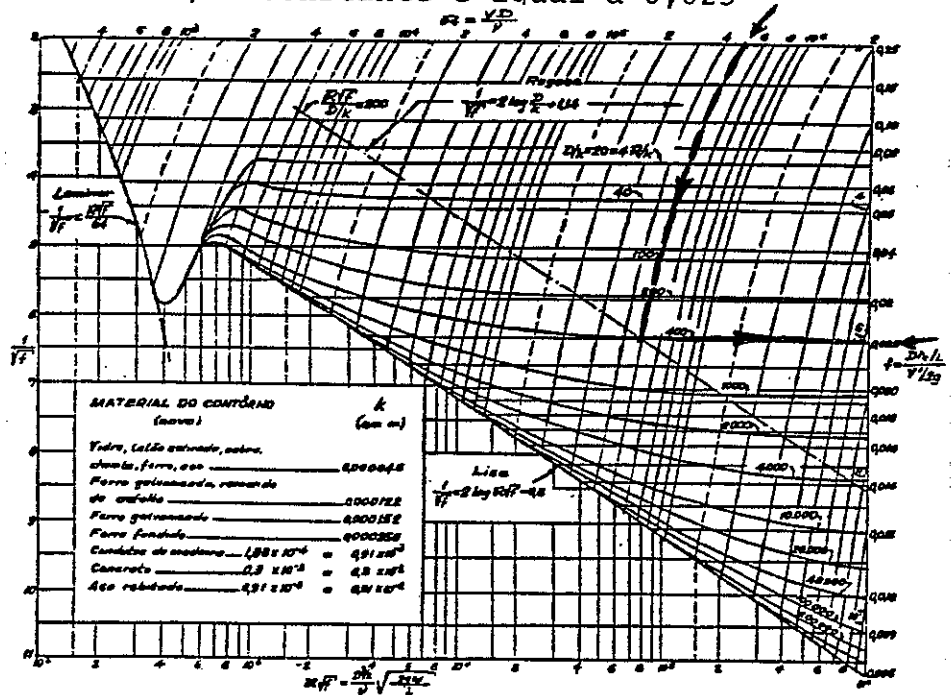
Como  $z_1 = z_7$  (mesma cota), teremos:

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_7}{\gamma} + \Delta p \Big|_1^7 \rightarrow \frac{P_1 - P_7}{\gamma} = (\Sigma h_s + \Sigma h_f) \Big|_1^7$$

A perda de carga será calculada como:

$$\begin{aligned} (\Sigma h_s + \Sigma h_f) &= (k_{s_3} + k_{s_4} + k_{s_5} + k_{s_6}) \frac{V^2}{2g} + f \frac{(L + L_{eq})}{D} \frac{V^2}{2g} = \\ &= 4 \times 1,3 \frac{V^2}{2g} + f \cdot \left(\frac{30 + 7}{0.4}\right) \cdot \frac{V^2}{2g} = (5,2 + 92,5 f) \frac{V^2}{20} \end{aligned}$$

Pela diagrama de Moody-Rouse, temos para  $\frac{D}{K} = \frac{0.4}{10^{-3}} = 400$ , para  $R > 5 \times 10^5$ ,  $f$  constante e igual a 0,025.



Assim:

$$\frac{P_1 - P_7}{\gamma} = (5,2 + 92,5 \times 0,025) \frac{1}{20} \left(\frac{Q^2 \cdot 16}{\pi^2 D^2}\right)$$

$$\frac{P_1 - P_7}{1,3} = \frac{6,01 Q^2}{\pi^2 \cdot 0,4^2} \rightarrow P_1 - P_7 = 4,95 Q^2$$

válido para  $R > 5 \times 10^5$

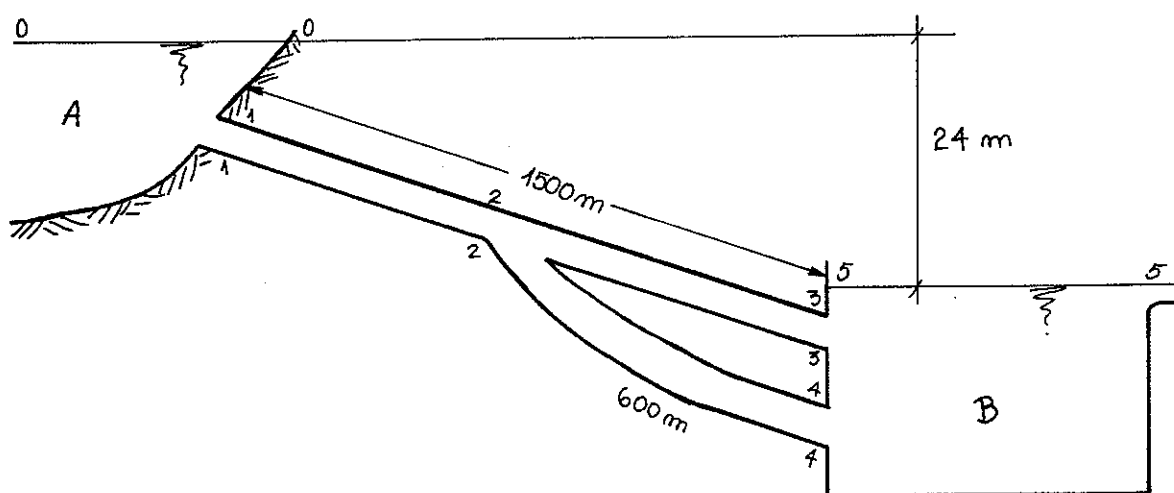
ou seja:

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{Q D}{\pi D^2 \nu} = \frac{4 Q}{\pi \nu D}$$

$$\text{logo: } 5 \times 10^5 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot 10^{-6}} \rightarrow Q_{\min} = 0,3927 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ex. 8.12 - Dois reservatórios cujas superfícies possuem uma diferença de altura de 24 m são interligados por uma tubulação de 0,3 m de diâmetro e comprimento de 1500 m. A vazão máxima que se pode obter é de  $0,12 \text{ m}^3/\text{s}$ , nessa condição. Querendo-se aumentar a vazão do sistema, é ligada uma tubulação de 600m de mesmo material e mesmo diâmetro, em paralelo a primeira. Qual o aumento porcentual de vazão, desprezando-se as perdas singulares?

$$\text{Dados: } \nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$



Solução:

Chamaremos de  $Q$  a vazão total na segunda condição; assim, o aumento porcentual será calculado por:

$$\% \text{ aumento} = \left( \frac{Q - 0,12}{0,12} \right) \times 100$$

Aplicar-se a equação da Continuidade entre 1-1, 3-3 e 4-4. Como o movimento é permanente, de um fluido incompressível e homogêneo, temos:

$$Q = Q_{23} + Q_{24} + V S = V_{23} S_{23} + V_{24} S_{24} +$$

$$V D_{12}^2 = V_{23} D_{23}^2 + V_{24} D_{24}^2 \quad \text{mas} \quad D_{12} = D_{23} = D_{24} +$$

$$V = V_{23} + V_{24}.$$

Como as perdas singulares são desprezíveis, por simetria podemos escrever que  $Q_{23} = Q_{24}$ , assim temos:

$$\frac{Q}{2} = Q_{23} = Q_{24}; \quad \frac{V}{2} = V_{23} = V_{24}.$$

Como as perdas singulares são desprezíveis, podemos escrever:

$$H_0 = H_1 \quad \text{e} \quad H_5 = H_3 = H_4.$$

Assim aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre os pontos 1-1 e 3-3 e entre 1-1 e 4-4:

$$(A) - H_1 = H_3 + \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. + \Delta p \left| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right. \rightarrow H_0 = H_5 + \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. + \Delta p \left| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$(B) - H_1 = H_4 + \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. + \Delta p \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right. \rightarrow H_0 = H_5 + \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. + \Delta p \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Fazendo-se (A) - (B) temos  $\Delta p \left| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right. = \Delta p \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$ , como já sabemos devido a simetria.

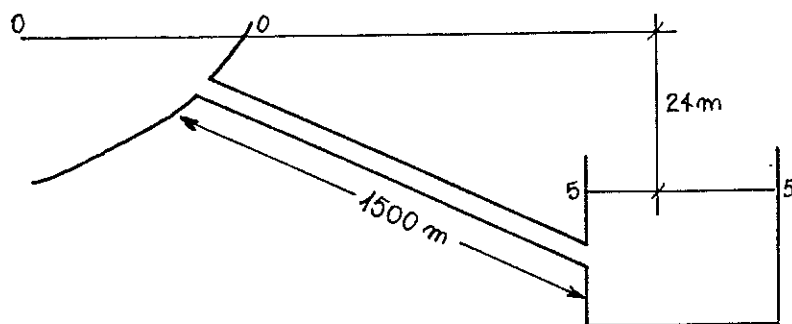
Como os reservatórios são de grandes dimensões e abertos à atmosfera, temos:

$$H_0 = z_0 \quad \text{e} \quad H_5 = z_5$$

$$\therefore 24 = f_{12} \frac{L_{12}}{D} \frac{V^2}{2g} + f_{23} \frac{L_{23}}{D} \frac{V_{23}^2}{2g} = f_{12} \frac{900}{0,3} \frac{V^2}{20} + f_{23} \frac{600}{0,3} \frac{V^2}{80}$$

$$\text{Logo} \quad 144 = f_{12} 900 V^2 + f_{23} 150 V^2.$$

Utilizando a condição inicial do problema, com apenas uma tubulação, temos:



$$H_0 = H_5 + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} 5 \\ 0 \end{array} \right.$$

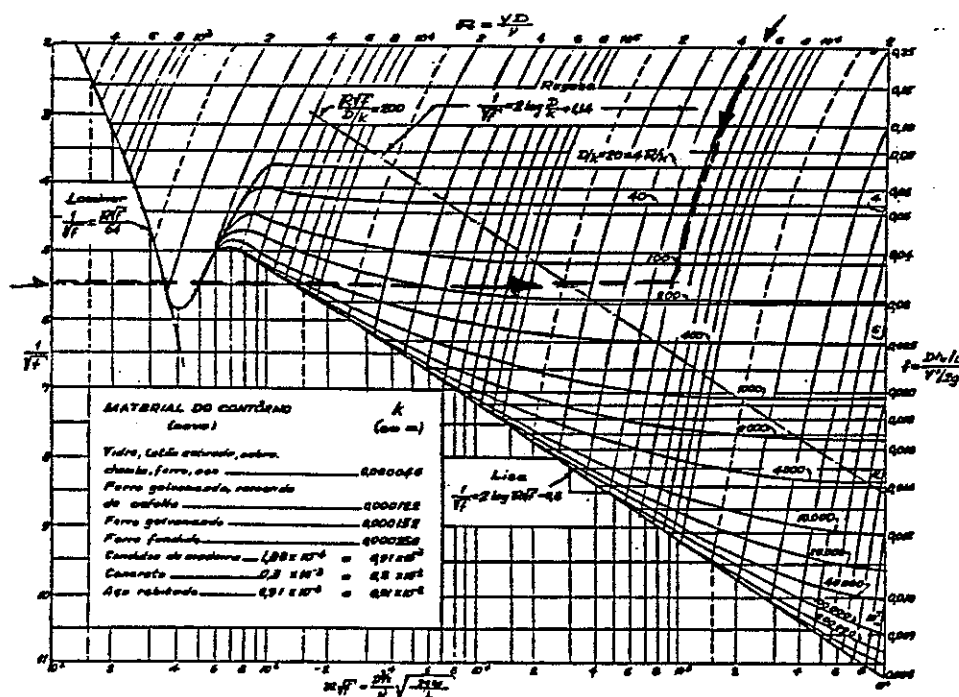
$$24 = f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g} = f \frac{L}{D} \left( \frac{Q_0^2}{\pi^2 D^4} \right) \frac{16}{2g}$$

$$\therefore f = \frac{24 D^5 \pi^2 2g}{16 \cdot 1 \cdot Q_0^2} = \frac{24 \cdot 0,3^5 \cdot \pi^2 \cdot 20}{16 \cdot 1500 \cdot 0,12^2} = 0,0333.$$

Utilizaremos o diagrama de Moody-Rouse para análise do escoamento. Para tanto, calcularemos os valores  $1/\sqrt{f}$  e  $R$  e obteremos o valor de  $D/K$ , já que  $K$ , a rugosidade equivalente da tubulação é uma característica do tubo e nos ajudará a obter os valores de  $f_{12}$  e  $f_{23}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{0,0333}} = 5.479, \quad R = \frac{V D}{\nu} = \frac{Q}{S} \frac{D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi D \nu} = 5.09 \times 10^5.$$

Pela esquerda do gráfico entramos com  $1/\sqrt{f}$  seguindo na horizontal até encontrarmos a curva do  $R$ . Poderíamos ter entrado pela direita com o valor de  $f$  e seguido horizontalmente para esquerda até encontrar  $R$ .



$$\frac{D}{K} = 150 \rightarrow$$

$$K = 0.002$$

Para os valores de número de Reynolds maiores que  $10^5$  temos escoamento hidraulicamente rugoso para esse escoamento, ou seja,  $f = 0,0333$  constante.

Observação : Podemos calcular  $K$  pela fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,24 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right),$$

$$5,479 = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{0,3} + \frac{2,51 \times 5,479}{5,09 \times 10^5} \right) \rightarrow K = 0,002$$

$$\frac{D}{K} = \frac{0,3}{0,002} = 150.$$

Portanto, como a velocidade mínima nas tubulações no segundo caso será superior a metade da velocidade na primeira condição, (que seria  $R > 2,5 \times 10^5$ ), então  $f_{12} = f_{23} = 0,033$

logo:

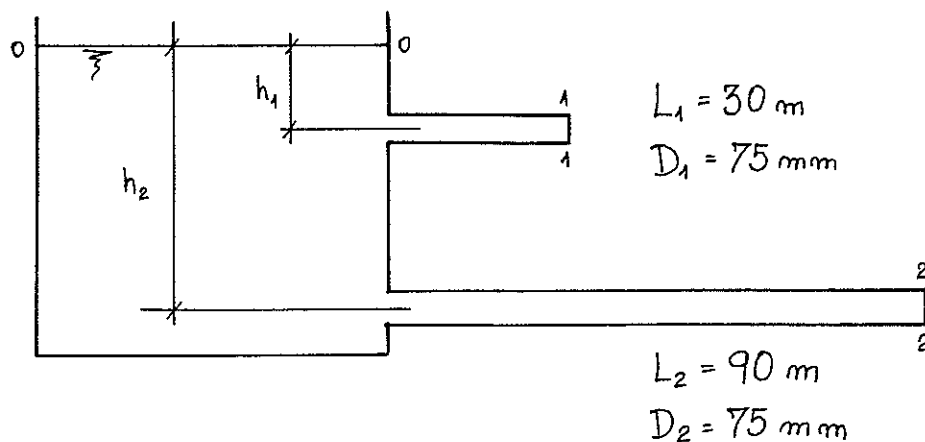
$$144 = 0,033 \times 900 \times V^2 + 0,033 \times 150 \times V^2 \rightarrow V = 2,04 \text{ m/s.}$$

$$Q = V \cdot S = 2,04 \times \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4} = 0,144 \text{ m}^3/\text{s.}$$

$$\% \text{ aumento} = \left( \frac{0,144 - 0,12}{0,12} \right) \times 100 = 20\%.$$

Ex. 8.13 - Um tanque possui dois comprimentos de tubo de ferro galvanizado ( $K = 0,000188$ ) de 75 mm de diâmetro, conectados conforme a figura, cujos escoamentos ocorrem no regime hidraulicamente rugoso. Determinar a razão entre  $h_1$  e  $h_2$  que irá fornecer a mesma vazão em cada um dos tubos abertos para a atmosfera. Calcular o valor mínimo de  $h_1$  que irá produzir o escoamento na região hidraulicamente rugosa. Desprezar as perdas singulares.

$$\text{Dado: } v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s.}$$

Solução:

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre as seções 0-0 e 1-1 e entre 0-0 e 2-2, temos:

$$H_0 = H_1 + \Delta p \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \text{e} \quad H_0 = H_2 + \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Passando o Plano Horizontal de Referência sobre a superfície 0-0 e sendo o tanque um reservatório de grandes dimensões, temos:  $H_0 = 0$

$$\Delta p \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{e} \quad \Delta p \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right. = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

Valendo a condição que as vazões nos dois tubos são iguais e sendo iguais as seções dos tubos, teremos:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 \rightarrow V_1 = V_2$$

Sendo os tubos de mesmo material e diâmetro, os dois tem o mesmo valor de  $D/K$ , sendo as velocidades iguais, os dois tem o mesmo número de Reynolds, logo, os dois tem o mesmo valor de  $f$  para o escoamento:  $f_1 = f_2$ .

logo:

$$0 = \frac{\alpha V^2}{2g} - z_1 + f \cdot \frac{30}{0,075} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\alpha V^2}{2g} - z_2 + f \frac{90}{0,075} \frac{V^2}{2g}$$

( $p_1 = p_2 = 0$ , abertos para a atmosfera),  $\alpha = 1$  - turbulento.



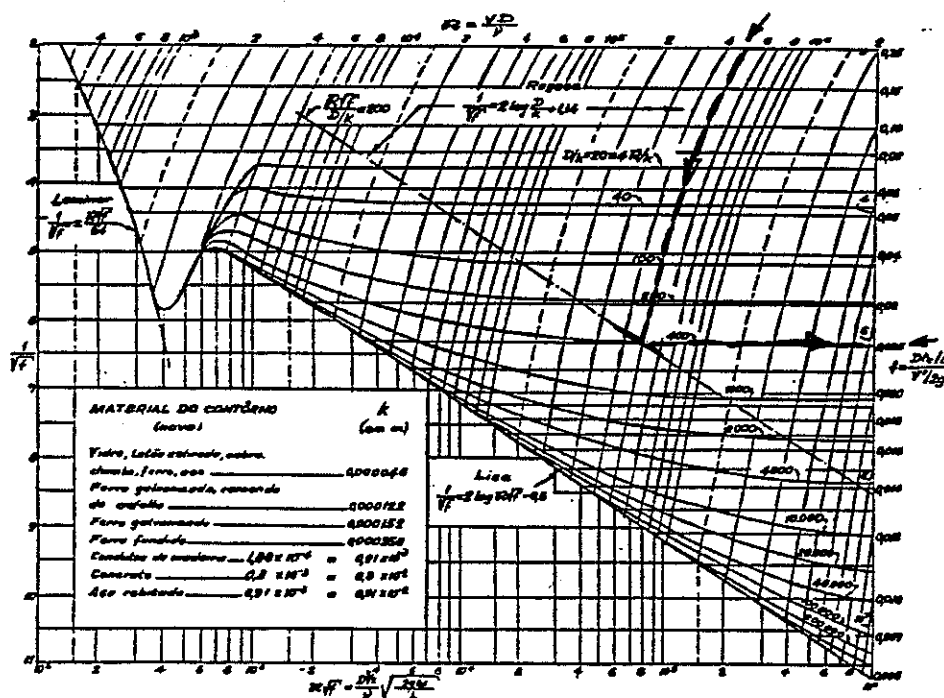
$$z_1 = \frac{V^2}{2g} (1 + 400f) \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{V^2}{2g} (1 + 1200f),$$

assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 400f}{1 + 1200f},$$

Para calcular  $f$ , vamos analisar o gráfico de Moody-Rouse.

O valor de  $\frac{D}{K} = \frac{0,075}{0,000188} = 398$ ; pelo gráfico vemos que  $f = 0,0250$ .



Assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 400 \times 0,025}{1 + 1200 \times 0,025} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 2,82.$$

Pelo gráfico vemos que a região de transição de hidraulicamente rugoso inicia-se para  $R = 5 \times 10^5$ .

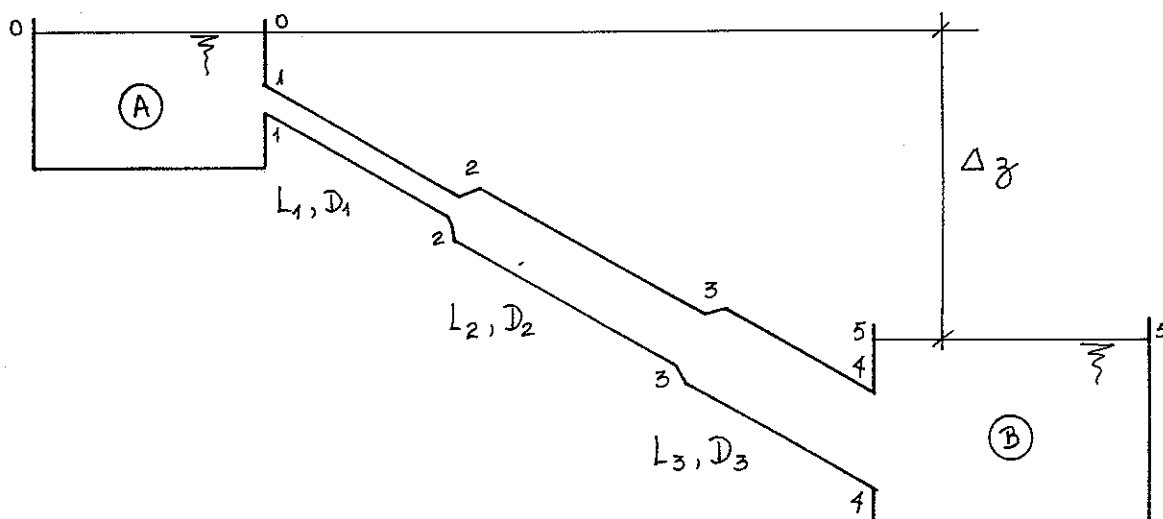
$$\text{Assim: } R = 5 \times 10^5 = \frac{V D}{\nu} \rightarrow V = \frac{5 \times 10^5 \times 10^{-6}}{0,075} = 6,67 \text{ m/s.}$$

$$\therefore z_1 = \frac{V^2}{2g} (1 + 400 \times 0,025) = \frac{6,67^2 \times 11}{20} = 24,4 \text{ m.}$$

**Ex. 8.14** - Entre dois reservatórios são conectados três tubos em série, de mesmo material,  $L_1 = 600\text{m}$  e  $D_1 = 0,3\text{m}$ ,  $L_2 = 800\text{ m}$  e  $D_2 = 0,4\text{ m}$ ,  $L_3 = 1500\text{m}$  e  $D_3 = 0,5\text{ m}$ .

- 1) Quando a descarga for de  $0,15\text{ m}^3/\text{s}$  de água, qual o desnível dos reservatórios.
- 2) Se substituíssemos as tubulações anteriores por uma única, de diâmetro constante e de mesmo material, qual seria esse diâmetro para as mesmas condições de vazão e desnível de reservatório?

Dados:  $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $K = 0,000132$ ,  $ks_1 = 0,5$ ,  $ks_4 = 1,0$ ,  $ks_2$  e  $ks_3$  não são desprezíveis e representam alargamento brusco de seção.



**Solução:**

- Pergunta 1)

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre 0-0 e 5-5, temos:

$$H_0 = H_5 + \frac{K W_a}{\gamma Q} \Bigg|_0^5, \text{ sendo A e B reservatórios abertos à atmosfera e de grandes dimensões (V = 0 e p = atm):}$$

$$z_0 = z_5 + \Delta p \Bigg|_0^5 \rightarrow z_0 - z_5 = \Delta z = \sum ks \frac{V^2}{2g} + \sum f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Para a perda de carga singular tomaremos sempre o va-

lor da maior velocidade a montante ou jusante da seção, para colocar na equação, quando se tratar de alargamento ou redução brusca de seção.

O  $ks_2$  e o  $ks_3$  devem ser calculados utilizando a equação de mudança de seção sem mudança de direção do conduto para alargamento brusco:

$$ks_2 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad \text{e} \quad ks_3 = \left(1 - \frac{S_2}{S_3}\right)^2 .$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Delta z = & ks_1 \frac{V_1^2}{2g} + ks_2 \frac{V_1^2}{2g} + ks_3 \frac{V_2^2}{2g} + ks_4 \frac{V_3^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \\ & + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} . \end{aligned}$$

Pela Equação da Continuidade podemos escrever  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 = V_3 S_3 = Q \rightarrow V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 = V_3 D_3^2 = Q \rightarrow V_1 \cdot 0,3^2 = V_2 \cdot 0,4^2 = V_3 \cdot 0,5^2 = 0,15$   
 $V_1 \cdot 0,09 = V_2 \cdot 0,16 = V_3 \cdot 0,25 = 0,15 .$

$$\therefore V_1 = 1,667 \text{ m/s}, V_2 = 0,938 \text{ m/s}, V_3 = 0,6 \text{ m/s} .$$

$$\text{Calculando } ks_2 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{0,3^2}{0,4^2}\right)^2 = 0,191 ;$$

$$ks_3 = \left(1 - \frac{S_2}{S_3}\right)^2 = \left(1 - \frac{D_2^2}{D_3^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{0,4^2}{0,5^2}\right)^2 = 0,130 ;$$

Assim:

$$\begin{aligned} \Delta z = & 0,5 \cdot \frac{1,667^2}{20} + 0,191 \cdot \frac{1,667^2}{20} + 0,130 \cdot \frac{0,938^2}{20} + \\ & + 1,0 \cdot \frac{0,6^2}{20} + f_1 \cdot \frac{600}{0,3} \cdot \frac{1,667^2}{20} + f_2 \cdot \frac{800}{0,4} \cdot \frac{0,938^2}{20} + \\ & + f_3 \cdot \frac{1500}{0,5} \cdot \frac{0,6^2}{20} ; \end{aligned}$$

$$\Delta z = 0,120 + 277,89 f_1 + 87,98 f_2 + 54 f_3 .$$

a.1) Usando a fórmula de Colebrook

a) Cálculo de  $f_1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) ;$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{1.667 \times 0.3}{10^{-6}} = 5.0 \times 10^5 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,0001188 + \frac{502 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right).$$

f admitido	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta\%$
0,02	7.0711	7.6233	7,8%
0,015	8.165	-	-
0,018	7.4536	7.6165	2,1%
0,017	7.6696	-	-
0,0173	7.6029	7.6084	-

$$\text{Logo } f_1 = 0,0173.$$

b) Cálculo de  $f_2$ :

$$R = \frac{0,938 \times 0.4}{10^{-6}} = 3,752 \times 10^5 ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,0000891 + \frac{6.6898 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right).$$

f admitido	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta\%$
0,017	7.6696	7.7052	0,5%
0,0169	7.6923	7.7043	0,2%

$$f_2 = 0,0169.$$

c) Cálculo de  $f_3$ :

$$R = \frac{0.6 \times 0.5}{10^{-6}} = 3 \times 10^5,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,0000713 + \frac{8,3667 \times 10^{-6}}{\sqrt{f}} \right),$$

f admitido	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta\%$
0,016	7,9057	7,7237	2,3%
0,0165	7,785	7,7302	0,7%
0,0167	7,7382	7,7326	-

$$f_3 = 0,0167 .$$

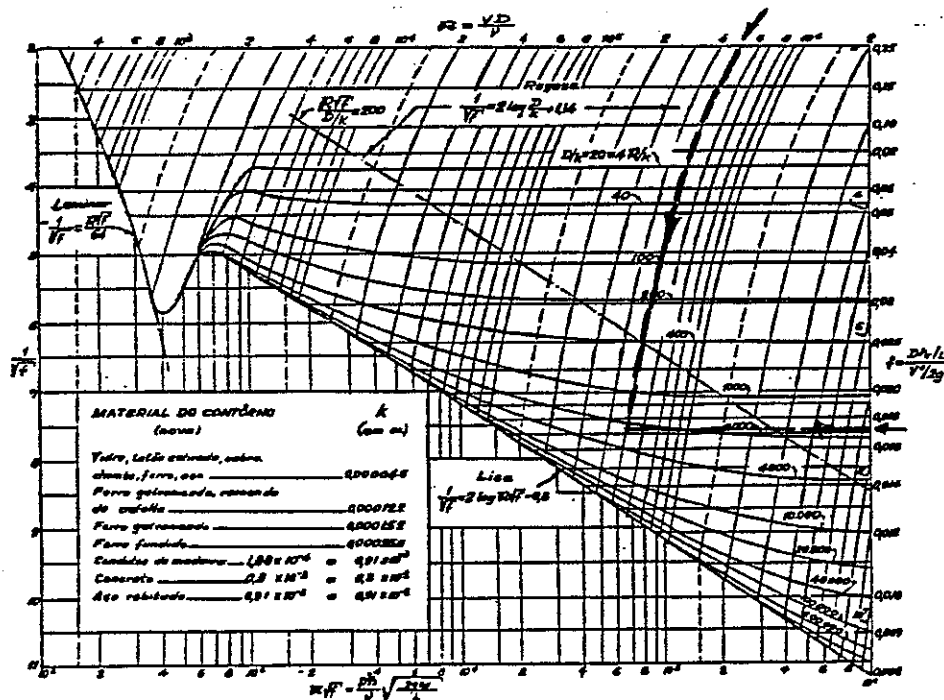
a.2) Usando o gráfico de Moody-Rouse:

a) Cálculo de  $f_1$ :

$$\frac{D}{k} = \frac{0,3}{0,000132} = 2273$$

$$f_1 = 0,0173.$$

$$R = 5.0 \times 10^5$$

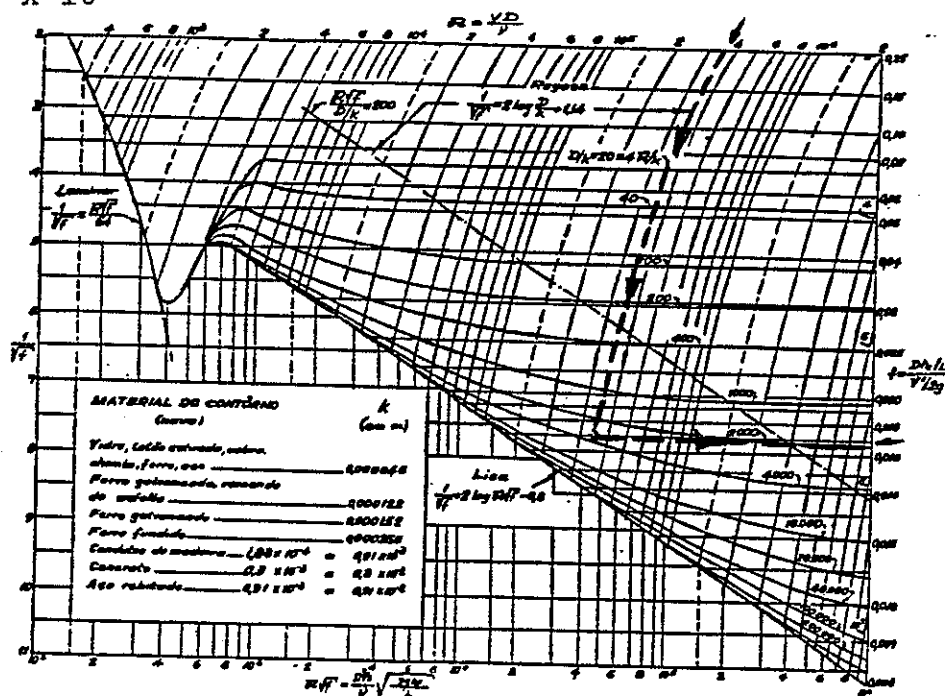


b) Cálculo de  $f_2$ :

$$\frac{D}{k} = \frac{0.4}{0,000132} = 3030$$

$$R = 3,75 \times 10^5$$

$$f_2 = 0,0169.$$

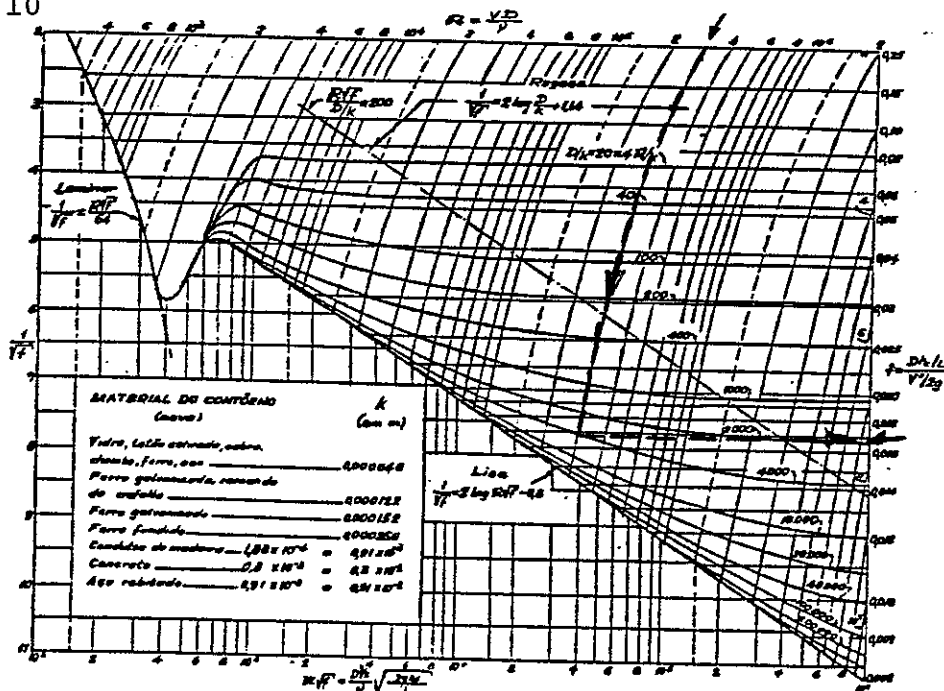


c) Cálculo de  $f_3$ :

$$\frac{D}{k} = \frac{0.5}{0,000132} = 3788$$

$$R = 3 \times 10^5$$

$$f_3 = 0,0167.$$

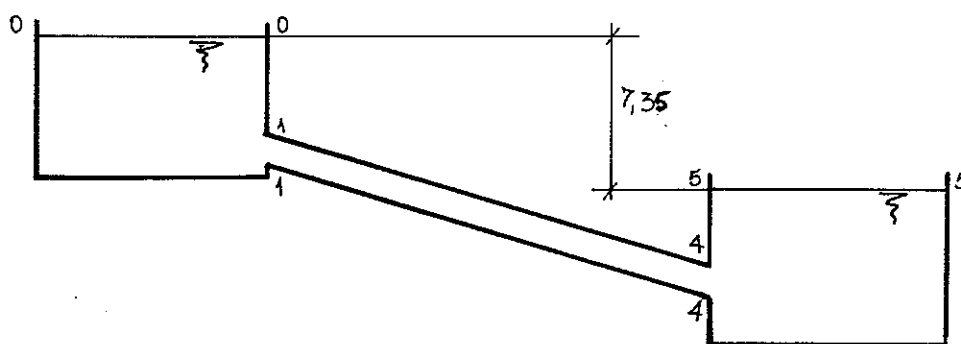


Assim:

$$\begin{aligned}\Delta z &= 0,120 + 277,89 f_1 + 8998 f_2 + 54 f_3 \\ &= 0,120 + 277,89 \cdot 0,0173 + 89,98 \cdot 0,0169 + 54 \cdot 0,0167 = \\ &= 7,35 \text{ m.}\end{aligned}$$

- Pergunta 2)

Sabendo-se que  $\Delta z = 7,35$  m e  $Q = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$ , temos:



$$\Delta z = ks_1 \frac{V^2}{2g} + ks_4 \frac{V^2}{2g} + f \frac{(600 + 800 + 1500)}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$7,35 = (1,5 + \frac{f}{D} \cdot 2900) \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{mas } Q = V \cdot S = \frac{V \pi D^2}{4} \rightarrow V = \frac{0,15 \times 4}{\pi D^2} \rightarrow V^2 = \frac{0,0365}{D^4}$$

$$\therefore 7,35 = (1,5 D + f \cdot 2900) \frac{1}{20} \cdot \frac{0,0365}{D^5} \rightarrow$$

$$1 = 0,72007 \frac{f}{D^5} + 0,0003724 D^{-4}$$

Aplicando-se a fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( 0,27 \frac{K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right)$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{0,6}{\pi D^2} \cdot \frac{D}{10^{-6}} = \frac{1,9099}{D} \cdot 10^5$$

$$A- \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{3,564 \times 10^{-5}}{D} + \frac{1,3142 \times 10^{-5}}{\sqrt{f}} \cdot D \right)$$

$$B- 1 = 0,72007 \frac{f}{D^5} + 0,0003724 D^{-4} f = \left( \frac{1 - 0,0003724 D^{-4}}{0,72007} \right) D^5$$

Adoto D em B; obtenho f de B	$1/\sqrt{f}$	$-2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta\%$
0,4 m	0,0140	8,4516	9,1%
0,45 m	0,0254	6,2746	-
0,42 m	0,0179	7,4676	-
0,41 m	0,0159	7,9305	2,0%
0,415 m	0,0169	7,6923	-
0,414 m	0,0167	7,7382	0,6%

Logo  $D = 0,414$  m

O mesmo cálculo pode ser feito utilizando-se o diagrama de Moody-Rouse:

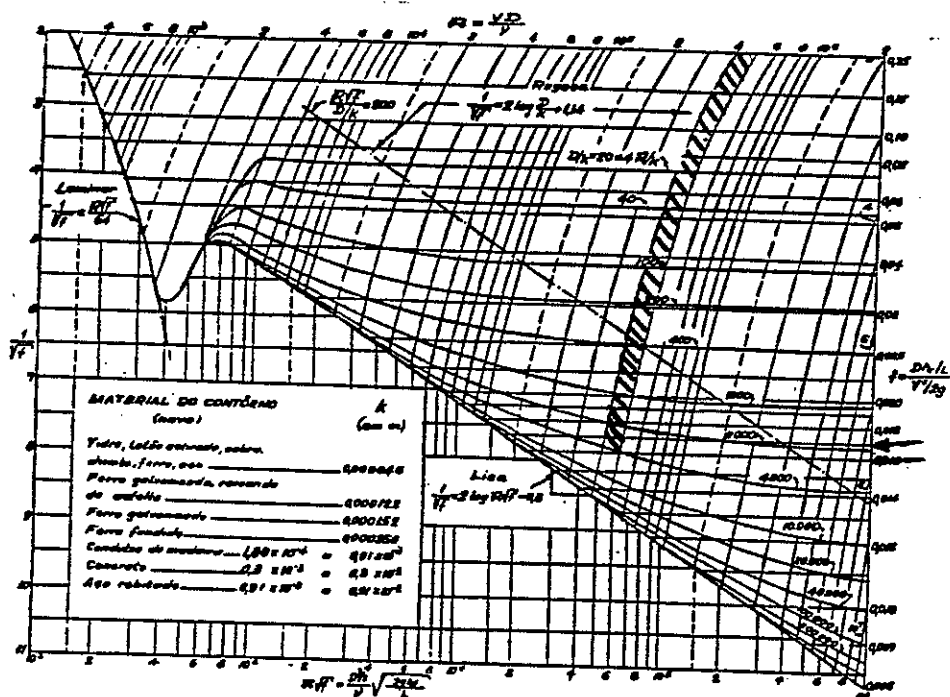
$$\frac{D}{K} = \frac{D}{0,000132}; \quad R = \frac{V D}{\nu} = \frac{1,9099 \times 10^5}{D}$$

Adota-se, D com  $D/k$  e  $R$ , pelo gráfico obtêm-se  $f$ . Substitui-se D em  $f = \left( \frac{D^5 - 0,0003724 D}{0,72007} \right)$  e compara-se  $f$ .

adoto D	$D/k$	$R$	(gráfico) $f$	$f$ fórmula
0.4	3030,3	$4.8 \times 10^5$	0.017	0.0143
0.42	3181,8	$4.55 \times 10^5$	0.0168	0.0182
0.41	3106,1	$4.66 \times 10^5$	0,0162	0,0162

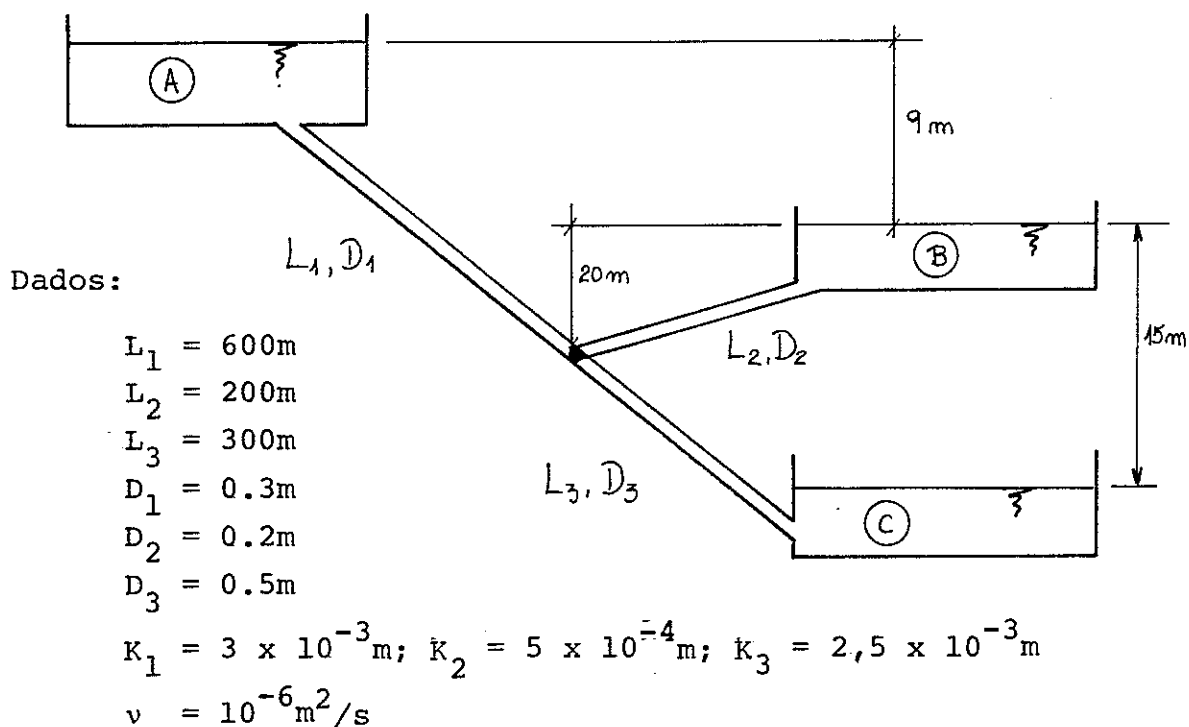
$\therefore D = 0,414$  m.





No gráfico temos os intervalos de trabalho da interação.

**Ex. 8.15** - Para o sistema de três reservatórios dado, calcule as vazões em cada tubulação, desprezando a perda de carga singular.



Solução:

Pelas condições apresentadas podemos ter três situações:

1) A - alimenta B e C cujas equações seriam:

Eq. da Continuidade no nó:  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ .

Eq. da Energia Cinética:

$$\text{entre A e nó: } H_A = H_{\text{Nó}} + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nó} \\ \text{A} \end{array} \right. ,$$

$$\text{entre Nó e B: } H_{\text{Nó}} = H_B + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{B} \\ \text{Nó} \end{array} \right. ,$$

$$\text{entre Nó e C: } H_{\text{Nó}} = H_C + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{C} \\ \text{Nó} \end{array} \right. ,$$

$$\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{S^2} = f \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4} =$$

$$= f \left( \frac{16 L}{2g D^5 \pi^2} \right) Q^2 = f T Q^2, \text{ onde T são características}$$

físicas da tubulação.

Assim podemos escrever:

$$H_A - H_B = f_1 T_1 Q_1^2 + f_2 T_2 Q_2^2,$$

$$H_A - H_C = f_3 T_3 Q_3^2 + f_1 T_1 Q_1^2,$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3.$$

2) A e B alimentam C, cujas equações seriam :

$$\text{entre A e Nó: } H_A = H_{\text{Nó}} + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nó} \\ \text{A} \end{array} \right. ,$$

$$\text{entre B e Nó: } H_B = H_{\text{Nó}} + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nó} \\ \text{B} \end{array} \right. ,$$

$$\text{entre Nó e C: } H_{\text{Nó}} = H_C + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{C} \\ \text{Nó} \end{array} \right. .$$

Assim podemos escrever:

$$H_A - H_B = f_1 T_1 Q_1^2 - f_2 T_2 Q_2^2,$$

$$H_A - H_C = f_3 T_3 Q_3^2 + f_1 T_1 Q_1^2,$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

3) A alimenta C, B tem vazão zero:

$$Q_1 = Q_3 = Q,$$

$$H_A - H_C = f_3 T_3 Q_3^2 + f_1 T_1 Q_1^2,$$

$$H_A - H_B = f_1 T_1 Q_1^2.$$

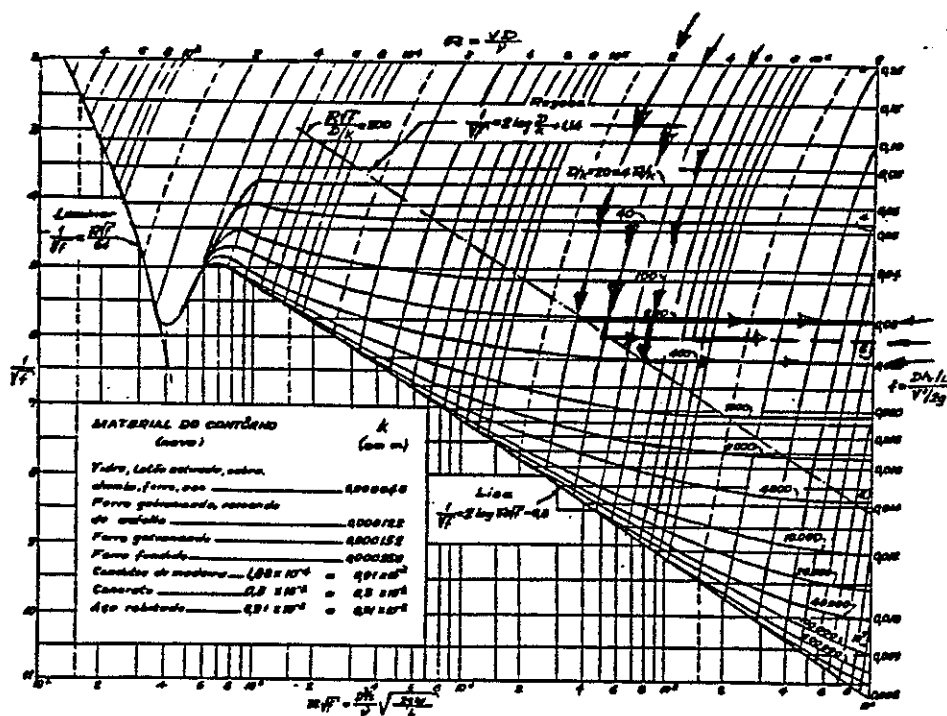
Para solucionar o problema, escolhendo uma das soluções, calculamos inicialmente o item 3. Se  $Q_1 > Q_3$ , teremos o caso 1 no problema, se  $Q_1 < Q_3$ , teremos o caso 2.

Pelo diagrama de Moody-Rouse, temos:

$$\frac{D_1}{K_1} = \frac{0,3}{3 \times 10^{-3}} = 300; \quad \frac{D_2}{K_2} = \frac{0,2}{5 \times 10^{-4}} = 400;$$

$$\frac{D_3}{K_3} = \frac{0,5}{2,5 \times 10^{-3}} = 200.$$

Pelo gráfico vemos que se  $R_1 > 3 \times 10^5$ ;  $R_2 > 5 \times 10^5$  e  $R_3 > 2 \times 10^5$ , os escoamentos estarão na Região Rugosa e consequentemente  $f_1 = 0,027$ ,  $f_2 = 0,025$  e  $f_3 = 0,030$  (hipóteses a serem confirmadas).



$$\text{Assim } f_1 T_1 = 0,027 \times \frac{16 \times 600}{20 \times 0,3^5 \cdot \pi^2} = 540,38 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-5},$$

$$f_2 T_2 = 1266,51 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-5},$$

$$f_3 T_3 = 23,34 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-5}.$$

Como A, B e C são reservatórios de grandes dimensões, abertos para a atmosfera ( $V = 0$  e  $p = p_{\text{atm}} = 0$ ), com o P.H.R. passando pelo nível do reservatório C:

$$H_A = 24 \text{ m}, H_B = 15 \text{ m}, H_C = 0 \text{ m}.$$

$$\text{Logo: } H_A - H_B = f_1 T_1 Q_1'^2,$$

$$H_A - H_C = f_3 T_3 Q_3'^2 + f_1 T_1 Q_1'^2,$$

$$\therefore Q_1'^2 = \frac{9}{540,38} \quad + \quad Q_1' = 0,129 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{e } Q_3'^2 = \frac{24 - 9}{23,34} \quad + \quad Q_3' = 0,802 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$Q_3' > Q_1'$ , logo o cálculo deverá ser feito com A e B alimentando C.

$$\text{Daí: } Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$H_A - H_B = f_1 T_1 Q_1^2 - f_2 T_2 Q_2^2 = 9 = 540,38 Q_1^2 - 1266,5 Q_2^2,$$

$$H_A - H_C = f_1 T_1 Q_1^2 + f_3 T_3 Q_3^2 = 24 = 540,38 Q_1^2 + 23,34 Q_3^2,$$

$$\text{Da segunda equação: } Q_2 = \frac{\sqrt{540,38 Q_1^2 - 9}}{1266,5},$$

$$\text{da primeira } Q_3 = Q_1 + \frac{\sqrt{540,38 Q_1^2 - 9}}{1266,5} +$$

$$Q_3^2 = Q_1^2 + \frac{540,38 Q_1^2 - 9}{1266,5} + 2 Q_1 \frac{\sqrt{540,38 Q_1^2 - 9}}{1266,5},$$

que, substituída na terceira, fornece:

$$24 = 540,38 Q_1^2 + 23,34 Q_1^2 + \frac{23,34 \cdot 540,38 Q_1^2}{1266,5} - \frac{9 \times 23,34}{1266,5} +$$

$$+ 2 \cdot 23,34 Q_1 \frac{\sqrt{540,38 Q_1^2 - 9}}{1266,5},$$

$$\text{ou } 24 = 573,68 Q_1^2 - 0,166 + 3,935 Q_1 \sqrt{60,04 Q_1^2 - 1}$$

$$6,141 = 145,789 Q_1^2 + Q_1 \sqrt{60,04 Q_1^2 - 1}.$$

Resolvendo por tentativas:  $Q_1 = 0,20 \text{ m}^3/\text{s}$ ,

onde:  $Q_2 = 0,10 \text{ m}^3/\text{s}$  e  $Q_3 = 0,30 \text{ m}^3/\text{s}$ .

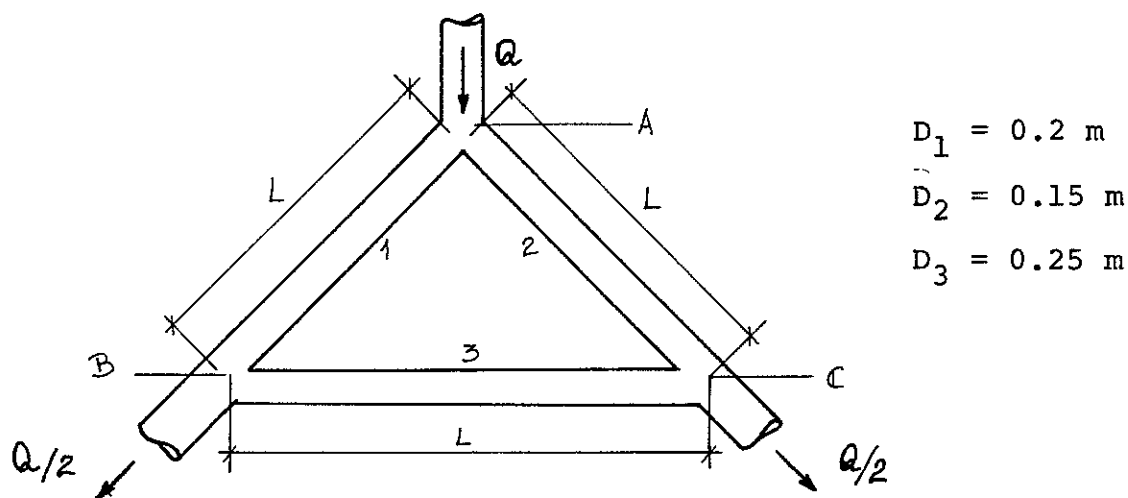
Calculando os números de Reynolds:

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{Q}{S} \frac{D}{\nu} = \frac{Q \cdot 4}{\pi D \nu},$$

$$R_1 = \frac{0,20 \cdot 4}{\pi \cdot 0,3 \times 10^{-6}} = 8,5 \times 10^5 > 3 \times 10^5,$$

$$R_2 = 6,4 \times 10^5 > 5 \times 10^5 \text{ e } R_3 = 7,6 \times 10^5 > 2 \times 10^5.$$

Ex. 8.16 - Na ilustração abaixo, calcular a porcentagem de vazão em relação à vazão  $Q$  de entrada no sistema, para cada ramo. Sabe-se, que os coeficientes de atrito em todos os tubos são iguais e que a perda de carga singular é desprezível.



Solução:

Aplicando-se a Equação da Continuidade nos nós A, B e C e supondo-se que os escoamentos ocorrem de  $A \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow C$  e  $B \rightarrow C$ , temos:

$$\text{nó A: } Q = Q_1 + Q_2,$$

$$\text{nó B: } Q_1 = Q_3 + Q/2,$$

$$\text{nó C: } Q_2 = Q_3 = Q/2 .$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética, temos:

$$\text{entre A e C } \rightarrow H_A = H_C + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{C} \\ \text{A} \end{array} \right. \quad - 1 -$$

$$\text{A e B } \rightarrow H_A = H_B + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{B} \\ \text{A} \end{array} \right. \quad - 2 -$$

$$\text{B e C } \rightarrow H_B = H_C + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} \text{C} \\ \text{B} \end{array} \right. \quad - 3 -$$

Donde:

$$\Delta p \left| \begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right. = \Delta p \left| \begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right. + \Delta p \left| \begin{array}{c} C \\ B \end{array} \right. .$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } \Delta p &= f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Q^2 \cdot 16}{\pi^2 D^4} \frac{1}{2g} = \frac{16 f L}{2g \pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \\ &= T \frac{Q^2}{D^5}, \text{ no nosso caso } T \text{ é igual para as} \\ &\quad \text{três tubulações.} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{Q_2^2}{D_2^5} = \frac{Q_1^2}{D_1^5} + \frac{Q_3^2}{D_3^5} + 13168,7 Q_2^2 = 1024 Q_3^2 + 3125 Q_1^2,$$

$$\text{ou } Q_3^2 + 3,05 Q_1^2 = 12,86 Q_2^2 + (Q_1 - Q/2)^2 + 3,05 Q_1^2 = 12,86(Q - Q_1)^2,$$

$$Q_1^2 - 2,81 Q Q_1 + 1,43 Q^2 = 0.$$

Duas raízes  $Q_{11} = 2,142 Q > Q$  portanto desprezada,

$$Q_{12} = 0,667 Q, \text{ (aceita).}$$

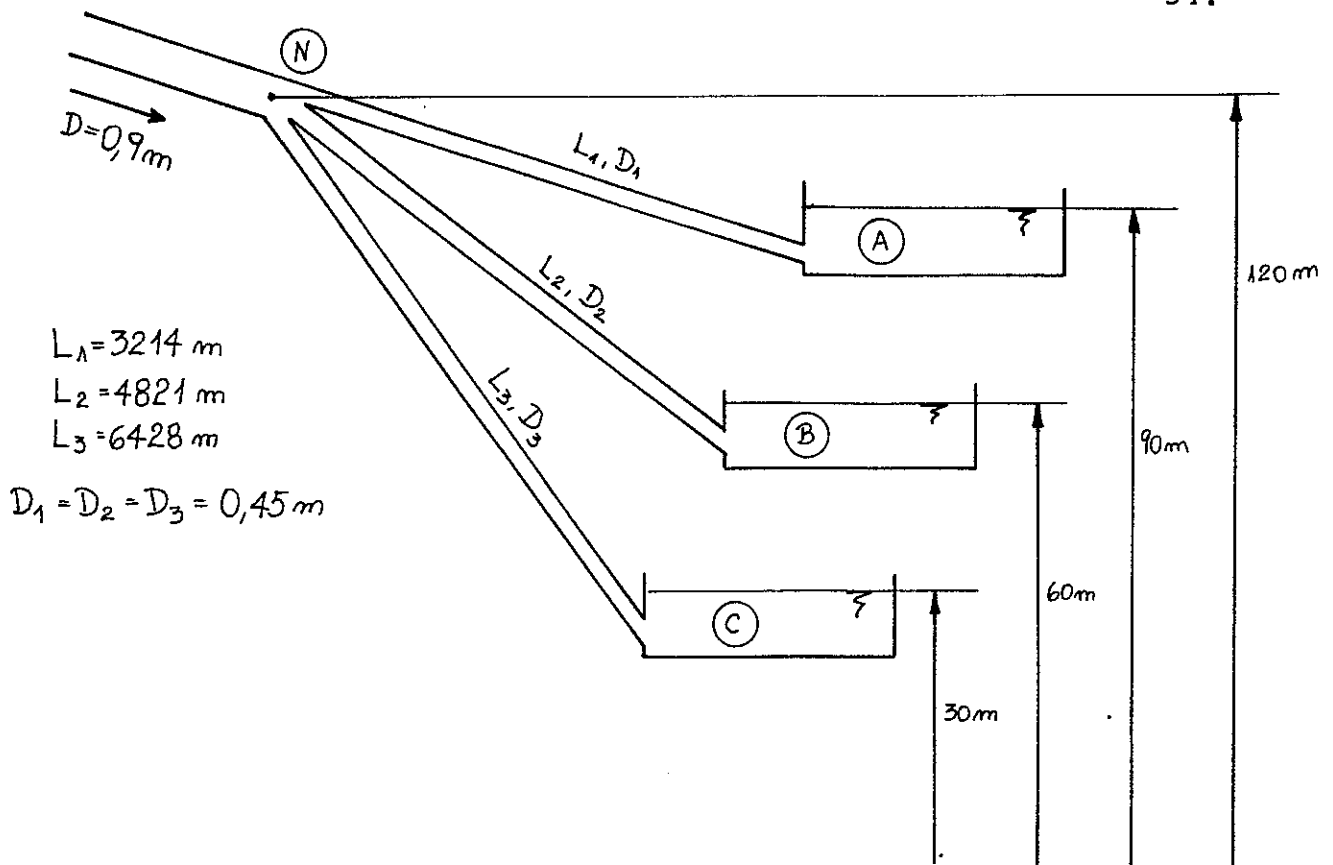
$$\text{Assim: } Q_1 = 0,667\%,$$

$$Q_2 = 0,333\%,$$

$$Q_3 = 0,167\%.$$

(Caso tivéssemos suposto o sentido  $C \rightarrow B$ , as equações forneceriam resultados incongruentes).

Ex. 8.17 - Na instalação da figura, quando a vazão na linha de alimentação for até  $1,4 \text{ m}^3/\text{s}$ , quais serão as vazões nas linhas? Supor  $f = 0,017$  para todos os tubos.

Solução:

Aplicando-se a Equação da Continuidade no nó N, teremos

$$1,4 = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre N e A, N e B e N e C, teremos:

$$N \rightarrow A: \quad H_N = H_A + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} A \\ N \end{array} \right.$$

$$N \rightarrow B: \quad H_N = H_B + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} B \\ N \end{array} \right.$$

$$N \rightarrow C: \quad H_N = H_C + \Delta p \quad \left| \begin{array}{l} C \\ N \end{array} \right.$$

Mas A, B e C são reservatórios de grandes dimensões:  $H_A = 90 \text{ m}$ ,  $H_B = 60 \text{ m}$  e  $H_C = 30 \text{ m}$  (pois  $V = 0$  e  $p = p_{\text{atm}} = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \Delta p &= f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{\pi^2 D^4} \frac{16}{4} = \frac{f \cdot 16}{D^5 \pi^2} \cdot L Q^2 = \\
 &= \frac{0,017 \cdot 16}{5} \cdot L Q^2 = 0,075 \cdot L \cdot Q^2, \\
 &\quad 0,45 \cdot \pi^2 \cdot 20
 \end{aligned}$$



$$\therefore H_N = 90 + 240 Q_1^2 \quad - 1 -$$

$$H_N = 60 + 360 Q_2^2 \quad - 2 -$$

$$H_N = 30 + 480 Q_3^2 \quad - 3 -$$

$$\text{ou de 1 e 2: } 240 Q_1^2 + 30 = 360 Q_2^2 \rightarrow 8 Q_1^2 + 1 = 12 Q_2^2,$$

$$\text{de 1 e 3: } 240 Q_1^2 + 60 = 480 Q_3^2 \rightarrow 4 Q_1^2 + 1 = 8 Q_3^2.$$

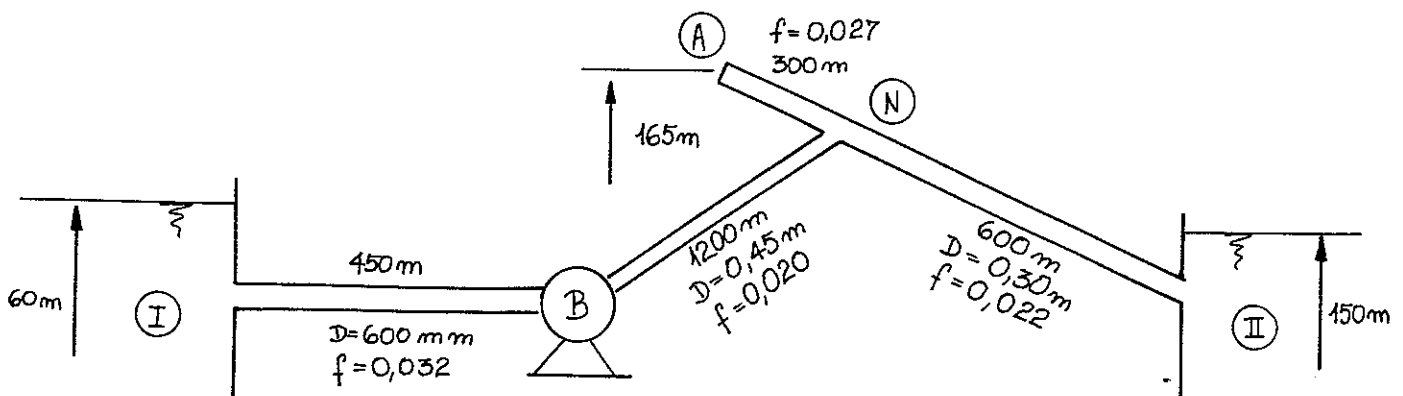
$$\text{Como: } 1,4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 \rightarrow$$

$$1,4 = Q_1 + \sqrt{\frac{8Q_1^2 + 1}{12}} + \sqrt{\frac{4Q_1^2 + 1}{8}} \rightarrow Q_1 = 0,453 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\therefore Q_3 = 0,477 \text{ m}^3/\text{s} \text{ e } Q_2 = 0,469 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Ex. 8.18** - Na instalação da figura, a bomba possibilita que a vazão na saída A seja de 110 l/s e para o reservatório superior, II, sejam bombeados 220 l/s. Determinar a potência da bomba e o diâmetro do tubo N - A. Desprezar perdas de cargas singulares.

$$(\gamma_{\text{água}} = 10^3 \text{ kgf/m}^3, \eta_B = 85\%)$$



Solução:

Aplicando-se a Equação da Continuidade no nó N:

$$Q_{NA} + Q_{N4} = Q_{3N} = 110 + 220 = 330 \text{ l/s} = Q_{1,2}$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre 0-0 e 5-5, temos:

$$H_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = H_5 + \Delta p \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. + \Delta p \left| \begin{array}{c} N \\ 3 \end{array} \right. + \Delta p \left| \begin{array}{c} 4 \\ N \end{array} \right.$$

$$\frac{\alpha V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = \frac{\alpha V_5^2}{2g} + \frac{p_5}{\gamma} + z_5 + \left( f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_1^2 +$$

$$+ \left( f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_3^N + \left( f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right)_N^4 ;$$

$$60 + \frac{W_B}{\gamma Q} = 150 + 0,032 \cdot \frac{450}{20} \cdot \frac{Q_1^2 \cdot 16}{\pi^2 D_1^5} + 0,020 \frac{1200}{20} \cdot \frac{Q_1^2 \cdot 16}{\pi^2 D_2^5} +$$

$$+ 0,022 \cdot \frac{600}{20} \cdot \frac{Q_{N4}^2 \cdot 16}{\pi^2 D_{N4}^5} ;$$

$$\frac{W_B}{\gamma Q} = 90 + 15,01 \cdot 0,33^2 + 105,42 \cdot 0,33^2 + 440,31 \cdot 0,22^2 =$$

$$= 124,42 \text{ m};$$

$$W_B = 10^3 \cdot 330 \times 10^{-3} \cdot 124,42 = 41060,7 \text{ kgm/s};$$

$$W_B = \frac{41060,7}{75} = \frac{547,5}{\eta} \text{ CV} = 644 \text{ CV}.$$

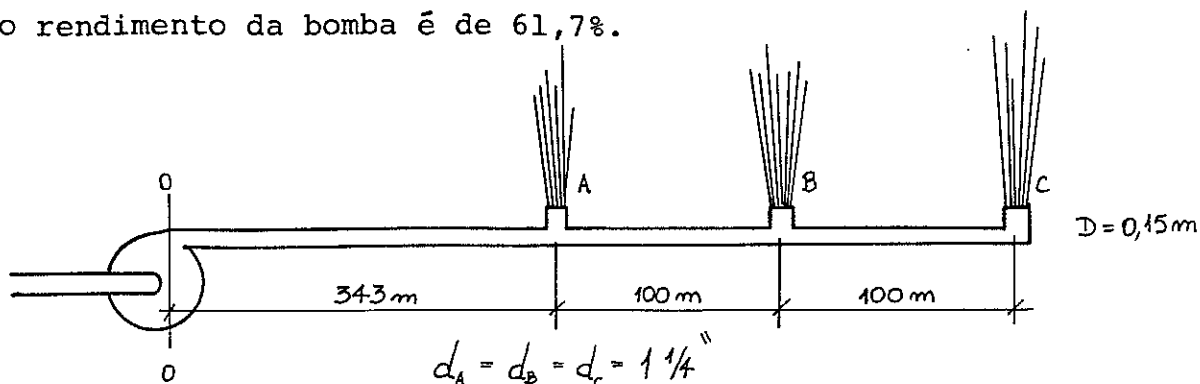
Aplicando-se a Eq. da Energia Cinética entre 0-0 e A, temos

$$H_0 + \frac{W_B}{\gamma Q} = H_A + \Delta p \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. + \Delta p \left| \begin{array}{c} N \\ 3 \end{array} \right. + \Delta p \left| \begin{array}{c} A \\ N \end{array} \right. ;$$

$$60 + 124,42 = 90 + 15,01 \cdot 0,33^2 + 105,42 \cdot 0,33^2 + f \frac{L}{D} \frac{Q^2 \cdot 16}{20 \pi^2} ;$$

$$D^5 = \frac{1}{81,31} \cdot \frac{0,027 \cdot 300 \cdot 0,11 \cdot 16}{20 \cdot \pi^2} \rightarrow D = 0,158 \text{ m.}$$

Ex. 8.19 - Na instalação da figura, para uma vazão de  $100 \text{ m}^3/\text{h}$  a bomba consome 15 CV. Calcular a altura atingida - pelo fluido que sai pelas aberturas A, B e C, sabendo-se que o rendimento da bomba é de 61,7%.



Dados:  $ks_A = ks_B = ks_C = 1,5$ ;  $K = 0,00075 \text{ m}$

Solução:

Como conhecemos a potência da bomba e a sua vazão, podemos calcular a altura manométrica da mesma, usando a expressão:

$$W_m = \frac{\gamma Q H}{\eta}, \text{ que é a potência que o motor necessita.}$$

$$W_m = 15 \text{ CV} = 15 \times 75 \text{ kgm/s,}$$

$$H = \frac{15 \times 75 \times 0,617 \times 3600}{10^3 \times 100} = 25 \text{ m}$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre

$$0-0 \text{ e A-A: } H_0 = H_A + \Delta_{\text{perdas}} \Big|_0^A ;$$

$$\Delta_{\text{perdas}} \Big|_0^A = \sum hs + \sum hf = f \frac{L}{D} \frac{V_{0-A}^2}{2g} \Big|_0^A + ks_A \frac{V_A^2}{2g} ;$$

$$Q_{0-A} = \frac{100}{3600} = 0,0278 \text{ m}^3/\text{s} = V_{0-A} \cdot S = V_{0A} \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}$$

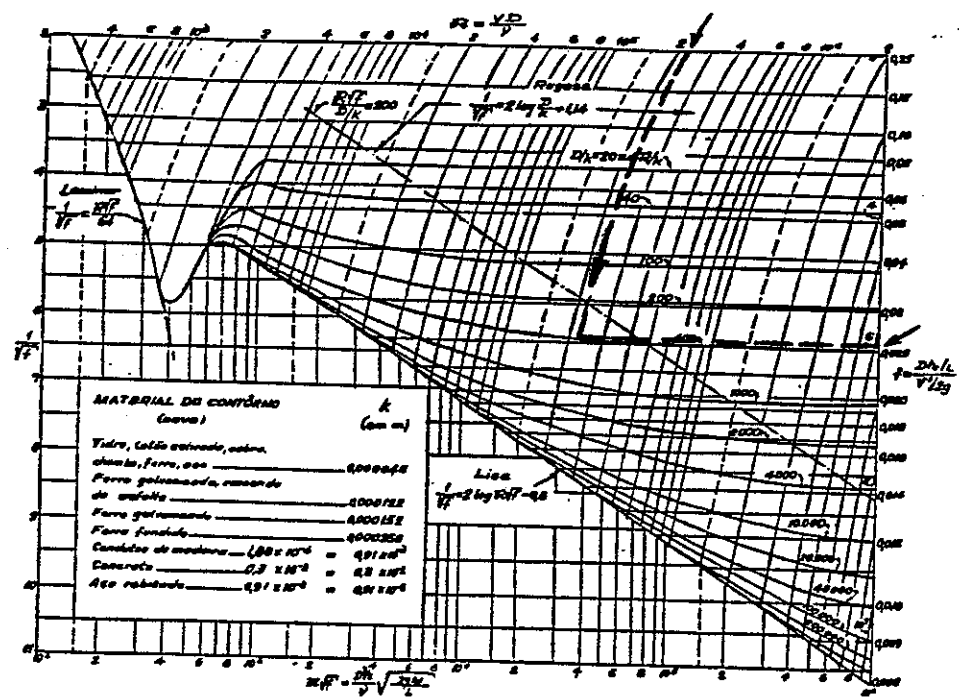
$$V_{0-A} = 1,57 \text{ m/s.}$$

a) Cálculo de f:

a.1) Gráfico de Moody-Rouse:

$$\frac{D}{k} = \frac{0,15}{0,00075} = 400,$$

$$R = \frac{V D}{\nu} = \frac{1,17 \times 0,15}{10^{-6}} = 2,355 \times 10^5.$$



Pelo gráfico: f = 0,0255.

a.2) Pela Equação de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0,27 K}{D} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0,27}{200} + \frac{2,51}{2,355 \times 10^5 \sqrt{f}} \right).$$

f admitido	$1/\sqrt{f}$	$- 2 \log_{10}(\dots)$	$\Delta\%$
0,02	7,0711	6,2495	11,6
0,025	6,3246	6,2587	1,0
0,0255	6,2622	6,2595	-

Logo:  $f = 0,0255$ .

Assim:

$$H = H_A + \Delta_{\text{perdas}} \Big|_0^A,$$

$$25 = \frac{\alpha V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A + 0,0255 \cdot \frac{343}{0,15} \cdot \frac{1,57}{20} + 1,5 \frac{V_A^2}{2g},$$

onde  $p_A = 0$  (aberto à atmosfera) e  $z_A = 0$  (sobre o PDR) ou  $V_A = 11,93$  m/s.

$$Q_A = V_A S_A = 11,93 \cdot \pi \frac{D_A^2}{4} = 11,93 \cdot \pi \cdot \frac{0,03175^2}{4} = 0,009446 \text{ m}^3/\text{s}:$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre:

$$0-0 \text{ e } B-B: H_0 = H_B + \Delta_{\text{perdas}} \Big|_0^B;$$

$$H_0 = H_B + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_0^A + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_A^B + k_{s_B} \frac{V_B^2}{2g}.$$

Aplicando-se a Eq. da Continuidade no nó A:

$$Q_{0-A} = Q_A + Q_{AB} \rightarrow Q_{AB} = 0,02777 - 0,009446 = 0,018330 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$V_{AB} = 1,037 \text{ m/s}$$

O valor de  $f_1$  no trecho A-B vale 0,0258 (mesma sequência mostrada anteriormente).

$$25 = \frac{V_B^2}{2g} + 0,0255 \frac{343}{0,15} \times \frac{1,57}{20} + 0,0258 \frac{100}{0,15} \times \frac{1,037}{20} + 1,5 \frac{V_B^2}{2g},$$

$$V_B = 11,62 \text{ m/s} \rightarrow Q_B = 0,009197 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Aplicando-se a Equação da Energia Cinética entre 0-0 e C-C:

$$H_0 = H_C + \Delta \text{perdas} \Big|_0^C.$$

$$H_0 = H_C + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_0^A + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_A^B + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_B^C + k s_C \frac{V_C^2}{2g},$$

$$Q_{B-C} = Q_{A-B} - Q_B = 0,018330 - 0,009197 = 0,009133 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$V_{B-C} = 0,5169 \text{ m/s}.$$

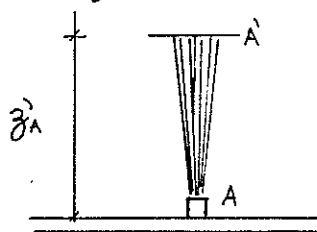
O valor de  $f$  no trecho B-C vale  $f = 0,0267$ .

$$25 = \frac{V_C^2}{2g} + 0,0255 \cdot \frac{343}{0,15} \cdot \frac{1,57^2}{20} + 0,0258 \cdot \frac{100}{0,15} \cdot \frac{1,037^2}{20} +$$

$$+ 0,0267 \cdot \frac{100}{0,15} \cdot \frac{0,5169^2}{20} + 1,5 \frac{V_C^2}{2g},$$

$$V_C = 11,54 \text{ m/s} \quad \rightarrow \quad Q_C = 0,09133 \text{ m}^3/\text{s}.$$

A altura atingida pelo fluido em cada abertura será:



$$H_A = H_{A'} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha V_A^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_A = \frac{\alpha V_{a'}^2}{2g} + \frac{p_{a'}}{\gamma} + z_{A'};$$

$p_a = p_{a'} = 0$ , no ponto  $A'$  a velocidade do fluido é nula.

$$\therefore z_{A'} = \frac{\alpha V_A^2}{2g} = \frac{11,93^2}{20} = 7,12 \text{ m},$$

$$z_{B'} = 6,75 \text{ m},$$

$$z_{C'} = 6,65 \text{ m}.$$