

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA**

**COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS**

**APOSTILA 3**

**ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA**

**CELSO MUNIZ DA SILVA  
PROFESSOR DE MECÂNICA  
DOS FLUIDOS**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNIAS DE EXERCÍCIOS DE

Mecânica dos Fluidos

Capítulo 7

Análise Dimensional e Semelhança.

Celso Muniz da Silva  
Prof. de Mecânica dos  
Fluidos.

EPUSP

Análise Dimensional e Semelhança

Ex. 3.1 Estabelecer as relações entre as medidas e entre as unidades da massa específica, para o sistema CGS e o sistema inglês.

Solução:

Como ilustração, admitamos que se vai calcular a massa específica de um corpo homogêneo de forma paralelepipedica, por meio da fórmula de definição.

$$\rho = \frac{m}{v}$$

onde m: medida da massa do corpo

v = abc: medida do volume do paralelepipedo, igual ao produto das medidas de sua altura, largura e comprimento.

Como a fórmula deverá ser válida em qualquer sistema de unidades coerentes, identificando-se pelos índices 1 e 2 as medidas e unidades em dois desses sistemas, resulta:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{a_1 b_1 c_1} \qquad \rho_2 = \frac{m_2}{a_2 b_2 c_2}$$

e, dividindo-se uma pela outra:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(m_1/m_2)}{(a_1/a_2)(b_1/b_2)(c_1/c_2)}$$

Mas, sendo;

(m): grandeza massa do corpo

$U_m$ : grandeza unitária(ou unidade)do ente "massa"

( $\rho$ ): grandeza massa específica do corpo

$U_\rho$ : grandeza unitária do ente "massa específica"

(a), (b), (c): grandezas altura, largura e comprimento do paralelepipedo.

$U_L$ : grandeza unitária do ente "extensão linear (ou comprimento)".

combinando-se a expressão anterior com as seguintes:

$$(m) = m_1 (U_M)_1 = m_2 (U_M)_2$$

Solução:

Da lei fundamental

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{dV}{dy}$$

deduz-se

$$\frac{|M||L||T|^{-2}}{|L|^2} = |\mu| \frac{|L||T|^{-1}}{|L|}$$

$$\therefore |\mu| = |M||L|^{-1} |T|^{-1}$$

isto é

$$\frac{U'_\mu}{U_\mu} = \left(\frac{U'_M}{U_M}\right) \left(\frac{U'_L}{U_L}\right)^{-1} \left(\frac{U'_T}{U_T}\right)^{-1}$$

No sistema CGS:

$$U_M = 1g \quad U_L = 1 \text{ cm} \quad U_T = 1s \quad U_\mu = 1 \text{ pois}$$

e no sistema inglês absoluto:

3

$$U'_M = 1\text{lb} \quad U'_L = 1\text{ft} \quad U'_T = 1 \text{ sec} \quad U'_\mu = 1 \text{ lb/ft}\cdot\text{sec}$$

Portanto, em vista das equivalências dadas a conhecer,

$$\frac{U'_\mu}{U_\mu} = (453,6)(30,48)^{-1}(1)^{-1} = 14,9$$

e

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\mu}{14,9} \\ &= \frac{0,01}{14,9} = 0,000672 \end{aligned}$$

Assim, para a água:

$$(\mu) = 0,01 \text{ poise} = 0,000672 \text{ lb/ft}\cdot\text{sec.}$$

Ex. 3.3 Determinar o valor da aceleração da gravidade no sistema inglês de unidades, sabendo-se que 1 pē equivale a 0,3048 metros.

Solução:

$$(g) = gU_a = g' U'_a$$

(g). grandeza "aceleração da gravidade"  
 g, g': medidas da aceleração da gravidade nos sistemas métrico e inglês, respectivamente.

U<sub>a</sub>: grandeza unitária (ou unidade) do ente "aceleração", no sistema métrico.

U'<sub>a</sub>: idem, no sistema inglês.

Lembrando a equação dimensional da aceleração

$$|a| = |L||T|^{-2}$$

que também pode ser escrita

$$\frac{U_a}{U'_a} = \left(\frac{U_L}{U'_L}\right) \left(\frac{U_T}{U'_T}\right)^{-2}$$

e observando que

$$\frac{U_L}{U'_L} = \frac{1}{0,3048}$$

4

$$\frac{U_T}{U'_T} = 1 \text{ (pois ambos os sistemas adotam como unidade de tempo 1 segundo)}$$

resulta

$$\frac{g'}{g} = \frac{U_a}{U'_a} = \frac{1}{0,3048}$$

portanto

$$g' = \frac{9,81}{0,3048} \approx 32,2$$

isto é,

$$(g) = 32,2 \text{ pé/s}^2$$

Ex. 3.4 Determinar as equações das grandezas físicas abaixo relacionadas relativas ao grupo de grandezas fundamentais F, L, T.

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| a) massa                  | Resp.: FL <sup>-1</sup> T <sup>2</sup> |
| b) peso específico        | FL <sup>-3</sup>                       |
| c) pressão                | FL <sup>-2</sup>                       |
| d) massa específica       | FL <sup>-4</sup> T <sup>2</sup>        |
| e) vazão em volume        | L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>         |
| f) viscosidade dinâmica   | FL <sup>-2</sup> T                     |
| g) viscosidade cinemática | L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>         |

Ex. 3.5 A viscosidade da água pura a 20°C é 0,01 poise Qual o seu valor numérico no sistema MK\*S?  
 Resp.:  $10^{-4} \mu_{MK*S}$

Ex. 3.6 A viscosidade cinemática da água doce a 20°C é 1 centistokes. Qual o seu valor no sistema MK\*S?  
 Resp.:  $10^{-6} m^2/s$ .

Ex. 3.7 Justificar os seguintes fatores de conversão de unidades:  
 1 poise (Po) =  $1 g/cm s = 1 dina s/cm^2 = 0,002088 slug/ft.s$   
 $= 0,002088 \cdot lbf.s/ft^2$ .  
 1 stoke (Sk) =  $0,001076 ft^2/s$ .  
 $1 g/cm^2 = 1 kg/m^3 = x kg^* m^{-4} s^2 \quad x = ?$   
 $1 dina/cm^3 = x Newtons/m^3 = y kgf/m^3. \quad x = ? y = ?$

Ex. 3.8 Verificar qual das fórmulas seguintes é invariante a uma mudança de sistema de unidades coerentes:

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z, \quad H = \rho \frac{V^2}{2} + p + \gamma z,$$

$$W = \gamma QH, \quad W = QH, \quad W = \gamma QH/\eta$$

onde V é a velocidade, p é a pressão, z é a cota,  $\alpha$  é adimensional, W é a potência,  $\gamma$  é o peso específico, Q é a vazão ( $L^3 T^{-1}$ ), H é a altura manométrica e  $\eta$  é o rendimento.

Ex. 3.9 A resistência total  $R_T$  de uma embarcação de superfície deve ser encontrada. Determinar a função adimensional e equivalente a função que relaciona as grandezas envolvidas no fenômeno

$$R_T = f(\rho, \mu, L, v, g)$$

Solução:

Observando-se a matriz dimensional

	$\rho$	$v$	$L$	$\mu$	$g$	$R_T$
M	1	0	0	1	0	1
L	-3	1	1	-1	1	1
T	0	-1	0	-1	-2	-2

verifica-se que  $\rho$ ,  $v$  e  $L$  podem ser usados como nova base, ou - variáveis repetidas na formação dos números adimensionais, tendo em vista o determinante não nulo constituído pelas suas dimensões na base MLT:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Como a característica da matriz acima é 3 e o número de variáveis é 6, os números  $\pi$  serão  $6 - 3 = 3$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \mu \quad \rho^{x_1} \quad v^{y_1} \quad L^{z_1} \\ \pi_2 &= g \quad \rho^{x_2} \quad v^{y_2} \quad L^{z_2} \\ \pi_3 &= R_T \quad \rho^{x_3} \quad v^{y_3} \quad L^{z_3} \end{aligned}$$

Da condição de  $\pi_1$  ser adimensional resulta

$$\begin{aligned} |\pi_1| &= |M|^0 |L|^0 |T|^0 = (|M| |L|^{-1} |T|^{-1}) (|M| |L|^{-3} |T|^0)^{x_1} (|M| |L|^1 |T|^{-1})^{y_1} (|M|^0 |L|^1 |T|^0)^{z_1} \\ &= |M|^{1+x_1} |L|^{-1-3x_1+y_1+z_1} |T|^{-1-y_1} \end{aligned}$$

e por conseguinte o sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + x_1 = 0 \\ -1 - 3x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ -1 - y_1 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$x_1 = -1$$

$$y_1 = -1$$

$$z_1 = -1$$

de sorte que

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho v L}$$

Observe-se que cada equação do sistema acima pode ser escrita diretamente a partir de uma linha da matriz adimensional, multiplicando-se o elemento da primeira coluna por  $x_1$ , o da segunda coluna por  $y_1$ , o da terceira coluna por  $z_1$ , somando-se ao elemento da coluna correspondente a  $\mu$ , e igualando-se a expressão obtida a zero.

As equações para  $\pi_2$ , obtidas por desenvolvimento semelhante ao descrito acima (usando-se porém a coluna do  $g$ ), são as seguintes:

$$\begin{cases} (1)x_2 + (0)y_2 + (0)z_2 + 0 = 0 \\ (-3)x_2 + (1)y_2 + (1)z_2 + 1 = 0 \\ (0)x_2 + (-1)y_2 + (0)z_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

A solução  $x_2 = 0, y_2 = -2, z_2 = 1$  fornece

$$\pi_2 = \frac{gL}{v^2}$$

7

Com relação a  $\pi_3$ , obtém-se analogamente,

$$\begin{cases} (1)x_3 + (0)y_3 + (0)z_3 + 1 = 0 \\ (-3)x_3 + (1)y_3 + (1)z_3 + 1 = 0 \\ (0)x_3 + (-1)y_3 + (0)z_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

e a solução  $x_3 = -1, y_3 = -2, z_3 = -2$  fornece

$$\pi_3 = \frac{R_T}{\rho v^2 L^2}$$

Assim, existirá uma função

$$\phi\left(\frac{\mu}{\rho v L}, \frac{gL}{v^2}, \frac{R_T}{\rho v^2 L^2}\right) = 0$$

equivalente a

$$f(R_T, \mu, g, \rho, v, L) = 0$$

Ex.3.10 No deslocamento translatório com velocidade relativa, constante, de um objeto imerso num meio fluido incompressível, intervêm massa específica e a viscosidade do fluido, a força  $R$  que o fluido opõe ao avanço do objeto, e uma di-



menção característica  $D$  que define o tamanho do objeto. Obter um conjunto de variáveis adimensionais em termos das quais pode ser desenvolvida uma função geral para o fenômeno.

Solução:

Sendo as variáveis do fenômeno  $\rho$ ,  $v$ ,  $D$ ,  $\mu$  e  $R$ , verifica-se que ele pode ser imaginado com um caso particular do problema anterior, de modo que sendo escolhidas como variáveis repetidas  $\rho$ ,  $v$  e  $D$ , os dois números  $\pi$ , adimensionais, resultantes são:

$$\pi_1 = \frac{R}{\rho D^2 v^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

Portanto, a função geral buscada pode ser representada como

$$\phi\left(\frac{R}{\rho D^2 v^2}, \frac{\mu}{\rho v D}\right) = 0$$

ou sob a forma equivalente

$$\frac{R}{\rho D^2 v^2} = \psi\left(\frac{vD}{\mu/\rho}\right)$$

A combinação  $vD/v$  é chamada "número de Reynolds ( $N_R$ )", e usualmente intervem em escoamentos completamente circundados por paredes sólidas (tal como em condutos, em alguns medidores de vazão, ventiladores, bombas e turbinas), ou em casos que se enquadram no enunciado do problema (como veículos, submarinos, aeronaves, estruturas, etc.).

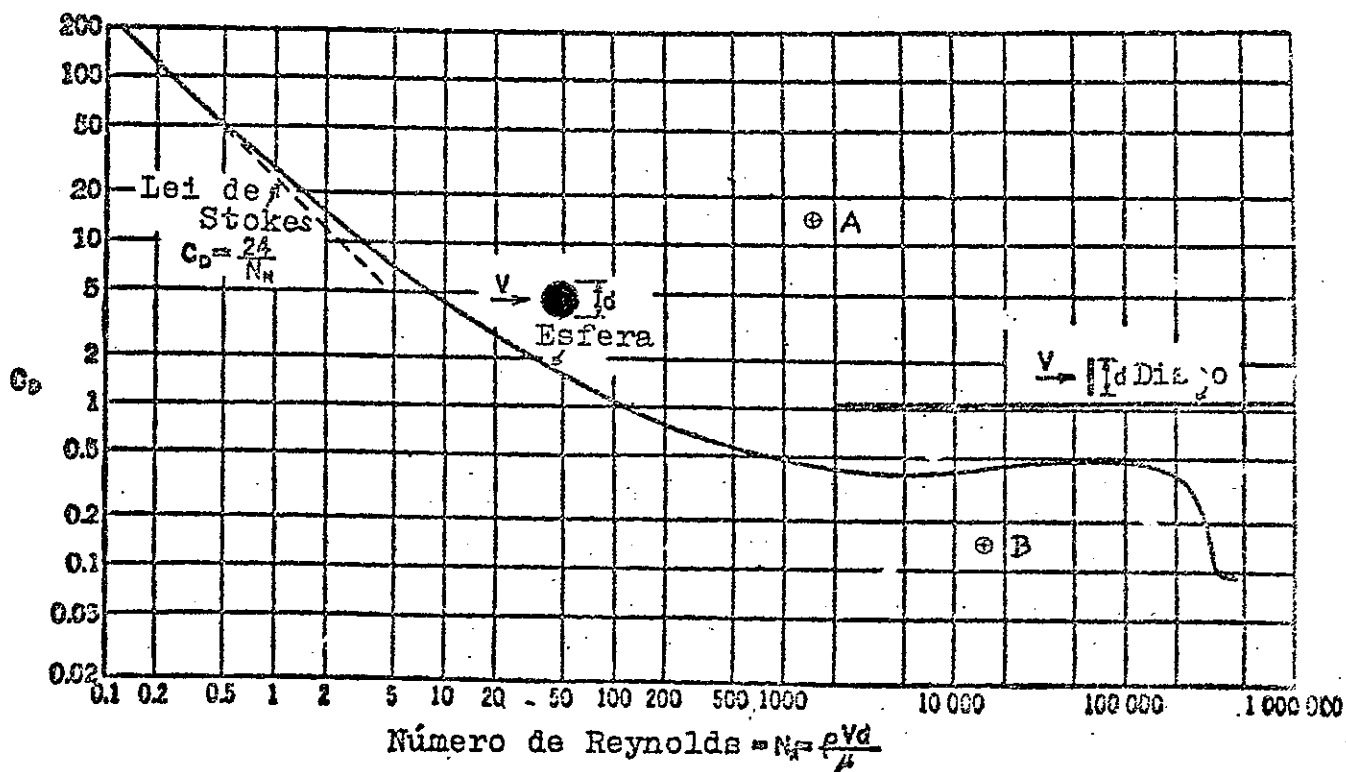
Para determinar-se a natureza exata da relação funcional torna-se necessária a experimentação adequada, com o fim de colher dados numéricos. Muitas vezes não é possível exprimir-se tal relação por meio de expressões consistindo numa combinação entre funções matemáticas conhecidas. Costuma ser praticável, contudo, se o número de variáveis não é excessivo, a representação da função sob forma gráfica, embora às vezes se empreguem escalas alteradas com o propósito de tornar o gráfico mais conveniente. Isto é o que mostra o gráfico abaixo, para os casos em que o objeto é uma esfera (ou um disco circular). Sobre o ei-

no das abcissas estão assinalados em escala logarítmica os números de Reynolds ( $N_R$ ), enquanto o eixo das ordenadas representa, também em escala logarítmica, o produto do primeiro adimensional por  $8/3,1416$ , indicado por  $C_D$  e chamado "coeficiente de arrasto".

Para a utilização do gráfico apresentado, deve-se ter presente a definição do coeficiente de arrasto.

$$C_D = 2 \frac{R}{\rho \cdot V^2 \cdot A_p}$$

Sendo  $A_p$  a área da projeção do objeto sobre um plano perpendicular a  $V$ .



Coeficientes de arrasto para a esfera e disco circular. A área a ser usada é aquela projetada num plano normal à velocidade.

Ex. 3.11 Considere um eixo que gira num mancal bem lubrificado.

Deseja-se determinar um grupo apropriado de arranjos das variáveis pertinentes, para o equacionamento adequado da resistência devida ao atrito. As variáveis são:

Força de atrito tangencial	R
Força normal ao eixo	P
Velocidade angular do eixo	N
Viscosidade do lubrificante	$\mu$
Diâmetro do eixo	D

Solução:

Uma vez que há cinco variáveis e a característica da matriz dimensional é três, o fenômeno pode ser descrito em termos de dois números adimensionais.

	P	N	D	R	$\mu$
M	1	0	0	1	1
L	1	0	1	1	-1
T	-2	-1	0	-2	-1

10

Como o determinante formado com as três primeiras colunas difere de zero, podem-se compor os seguintes arranjos adimensionais:

$$\pi_1 = R P^{x_1} N^{y_1} D^{z_1}$$

$$\pi_2 = \mu P^{x_2} N^{y_2} D^{z_2}$$

Buscando a solução para  $\pi_1$  obtem-se:

$$(1)x_1 + (0)y_1 + (0)z_1 + 1 = 0$$

$$(1)x_1 + (0)y_1 + (1)z_1 + 1 = 0$$

$$(-2)x_1 + (-1)y_1 + (0)z_1 - 2 = 0$$

e portanto  $x_1 = -1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0$

donde  $\pi_1 = \frac{R}{P}$ , relação usualmente designada como "coeficiente de atrito (f)".

Com referência a  $\pi_2$  obtem-se:

$$\begin{aligned} (1)x_2 + (0)y_2 + (0)z_2 + 1 &= 0 \\ (1)x_2 + (0)y_2 + (1)z_2 - 1 &= 0 \\ (-2)x_2 + (-1)y_2 + (0)z_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução  $x_2 = -1, y_2 = 1, z_2 = 2$  conduz a

$$\pi_2 = \frac{\mu ND^2}{P}$$

A relação física entre essas variáveis representa-se simbolicamente por

$$\phi\left(\frac{R}{P}, \frac{\mu ND^2}{P}\right) = 0$$

ou por

$$\frac{R}{P} = f = \varphi\left(\frac{\mu ND^2}{P}\right)$$

Ex. 3.12 O conjugado C absorvido por uma hélice marítima e o empuxo axial T por ela desenvolvidos dependem de:

- N: velocidade angular da hélice
- D: diâmetro da hélice
- v: velocidade de avanço
- g: aceleração da gravidade
- $\rho$ : massa específica do líquido
- $\nu$ : viscosidade cinemática do líquido.

Achar as variáveis adimensionais correspondentes às funções

$$\begin{aligned} T &= f_1(N, D, v, g, \rho, \nu) \\ C &= f_2(N, D, v, g, \rho, \nu) \end{aligned}$$

Solução:

Considerada a matriz dimensional,

	$\rho$	$\nu$	D	N	g	v	T	C
M	1	0	0	0	0	0	1	1
L	-3	1	1	0	1	2	1	2
T	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-2

um possível agrupamento de variáveis é o seguinte:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= N \rho^{x_1} v^{y_1} D^{z_1} \\ \pi_2 &= g \rho^{x_2} v^{y_2} D^{z_2} \\ \pi_3 &= v \rho^{x_3} v^{y_3} D^{z_3} \\ \pi_4 &= T \rho^{x_4} v^{y_4} D^{z_4} \\ \pi_5 &= C \rho^{x_5} v^{y_5} D^{z_5} \end{aligned}$$

A determinação dos expoentes de  $\rho$ ,  $v$  e  $D$  conduz ao resultado:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{ND}{v} \\ \pi_2 &= \frac{gD}{v^2} = \frac{1}{N_F} \\ \pi_3 &= \frac{v}{vD} = \frac{1}{N_R} \quad (\text{ver exerc. 3.10}) \\ \pi_4 &= \frac{T}{\rho D^2 v^2} \\ \pi_5 &= \frac{C}{\rho D^3 v^2} \end{aligned}$$

12

A variável adimensional  $\pi_2$  é o inverso do chamado "número de Froude ( $N_F$ )", e aparece normalmente em problemas em que forças devidas à ação da gravidade desempenham papel importante. Tal é o caso de líquidos que escoam apresentando uma superfície livre (canais, vertedores, etc.), ou de objetos que se deslocam à superfície ou próximo da superfície de um líquido (navios, querena de hidroaviões, hélices de embarcações etc.).

As funções  $f_1$  e  $f_2$  podem ser substituídas por

$$\frac{T}{\rho D^2 v^2} = \phi_1\left(\frac{ND}{v}, N_F, N_R\right)$$

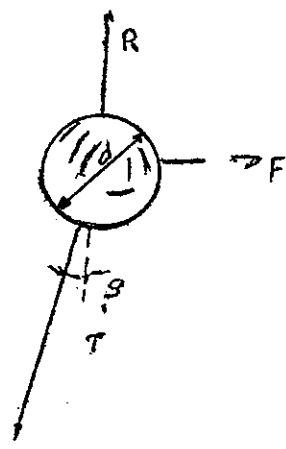
e

$$\frac{C}{\rho D^3 v^2} = \phi_2\left(\frac{ND}{v}, N_F, N_R\right)$$

Ex. 3.13 Um balão de borracha com 15 cm de diâmetro está cheio de hidrogênio. As condições ambientes são as da atmosfera padrão ao nível do mar. O hidrogênio está à mesma pressão e temperatura do ar externo. O balão está amarrado a um cordão e uma corrente de ar de 16 km/h, horizontal e uniforme, varre a região. Desprezando-se o efeito do vento sobre o cordão, e o peso da borracha, qual o ângulo formado pelo cordão com a vertical, no ponto onde se liga ao balão?

Solução:

As tres forças em equilíbrio, mostradas na figura, são



$$R = \frac{\pi d^3}{6} (\gamma_{ar} - \gamma_H) = \text{resultante}$$

te vertical, igual ao peso do ar deslocado menos o peso do hidrogênio.

$$F = 0,5 C_d \rho_{ar} v^2 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = \text{força de arrasto provocada pelo vento sobre o bálão.}$$

$$T = (R^2 + F^2)^{0,5} = \text{tração exercida pelo cordão, com uma inclinação } \beta = \text{arc tg}\left(\frac{F}{R}\right)$$

Sabe-se também que

$$\gamma_{ar} - \gamma_H = \frac{P_{atm}}{\theta_{atm}} \left(\frac{1}{R_{ar}} - \frac{1}{R_H}\right)$$

com

$$P_{atm} = 1,013 \times 10^4 \text{ kgf/m}^2 \text{ (atmosfera padrão)}$$

$$\theta_{atm} = 15 + 273 = 288 \text{ K (atmosfera padrão)}$$

$$R_{ar} = 29,3 \text{ m/ K (constante do ar)}$$

$$R_H = 421,1 \text{ m/ K (constante do hidrogênio)}$$

$$\therefore \gamma_{ar} - \gamma_H = \frac{1,013 \times 10^4}{288} \left(\frac{1}{29,3} - \frac{1}{421,1}\right) = 1,117 \text{ kgf/m}^3$$

e que

$C_d = f(N_R)$  = função do número de Reynoldás representada no gráfico do exerd. 7.10.

sendo

$$N_R = \frac{Vd}{v_{ar}} = \frac{(16\ 000/3600) \times 0,15(m/s)(m)}{1,45 \times 10^{-5} m^2/s} = 4,6 \times 10^4$$

obtem-se do gráfico

$$C_d = 0,48$$

Finalmente,

$$\frac{F}{R} = \frac{3C_d v^2 \gamma_{ar}}{4dg(\gamma_{ar} - \gamma_H)}$$

$$tg \beta = \frac{3 \times 0,48(16\ 000/3\ 600)^2 1,2}{4 \times 0,15 \times 9,81 \times 1,117} = 5,192$$

$$\therefore \beta = 79^{\circ}6'$$

Ex. 3.14 Para o balão do problema anterior, deseja-se saber qual a velocidade do vento que acarreta o ângulo de  $10^{\circ}$  entre o cordão e a vertical. Os demais dados são os mesmos.

14

Solução:

A equação desenvolvida no problema anterior pode ser escrita sob a forma

$$tg \beta = \frac{3C_d v^2}{4dg} \left( \frac{R_H}{R_H - R_{ar}} \right)$$

ou ainda

$$tg \beta = \frac{3 v^2 C_d v^2 d^2}{4 d^{1+2} g v^2} \left( \frac{R_H}{R_H - R_{ar}} \right) = \frac{3v^2}{4g d^3} \left( \frac{R_H}{R_H - R_{ar}} \right) C_d N_R^2$$

Esta última equação, mais a função

$$C_d = f(N_R)$$

resolvidas simultaneamente dão a resposta do problema.

Pode-se resolver por tentativas, tirando-se pares de valores  $(C_d, N_R)$  do gráfico do exerc. 7.10, introduzindo-os em seguida na expressão da  $tg \beta$ . O par que fornecer  $\beta = 10^{\circ}$  satisfaz as hipóteses, e com o valor de  $N_R$  calcula-se  $V$ .

A segunda maneira consiste em desenharmos a reta

$$C_d N_R^2 = \text{constante}$$

no gráfico bi-logaritmico citado. No presente caso a constante vale

$$\frac{4g d^3}{3v^2} \left( \frac{R_H - R_{ar}}{R_H} \right) \operatorname{tg} \beta = \frac{4 \times 9,81(0,15)^3 (421,1 - \sqrt{9,3}}{3(1,45 \times 10^{-5})^2 (421,1)} \times \operatorname{tg} 10^\circ =$$

$$= 34,45 \times 10^6$$

Dois pontos da reta  $C_d N_R^2 = 34,45 \times 10^6$  permitirão traçá-la. Por exemplo, os pontos

$$A(C_d = 15; N_R = 1515)$$

$$B(C_d = 0,15; N_R = 15154)$$

Esses pontos estão marcados no gráfico. O leitor poderá verificar que a reta que passa por eles intercepta a curva representativa da função  $C_d = f(N_R)$  no ponto de coordenadas

15

$$C_d = 0,42$$

$$N_R = 9060$$

Este ponto corresponde à solução do problema por satisfazer simultaneamente a todas as suas condições.

A velocidade procurada vale

$$v = \frac{v N_R}{d} = \frac{1,45 \times 10^{-5} \times 9060}{0,15} = 0,876 \text{ m/s}$$

ou

$$v = 3,15 \text{ km/h}$$

Ex. 3.15 Para o dimensionamento de desarenadores, é necessário o cálculo da velocidade de deposição atingida pelos grãos de areia em sua queda para o fundo. Assim sendo, pede-se calcular a velocidade de uma pequena esfera de quartzo que decanta em água. O diâmetro da esfera é de 0,076 mm e a sua densidade relativa é 2,65.

Solução:

Como o diâmetro da esfera é muito pequeno, o número de Reynolds



deve ser baixo, de modo que provavelmente o movimento da esfera através da água se dá em regime laminar, obedecendo à lei de Stokes indicada no gráfico do exere. 10, isto é

$$C_d = \frac{24}{N_R}$$

Considerando que

$$F = 0,5 C_d \rho v^2 A = 0,5 C_d \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}$$

e

$$N_R = \frac{vd}{\nu}$$

(onde d é diâmetro da esfera), uma combinação das três expressões acima conduz a

$$F = 3\rho\nu v\pi d$$

Por outro lado, a força resultante sobre a esfera vale

16

$$F = \frac{\pi d^3}{6} (\gamma_q - \gamma) = \frac{\pi d^3}{6} \left( \frac{\gamma_q}{\gamma} - 1 \right) \gamma$$

De modo que

$$v = \frac{\frac{\pi d^3}{6} \gamma \left( \frac{\gamma_q}{\gamma} - 1 \right)}{3\rho\nu\pi d} = \frac{d^2 g \left( \frac{\gamma_q}{\gamma} - 1 \right)}{18 \nu}$$

$$v = \frac{(0,076 \times 10^{-3})^2 \cdot 9,81(2,65 - 1)}{18 \times 10^{-6}} = 5,2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

e

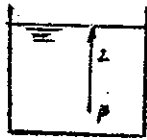
$$N_R = \frac{(5,2 \times 10^{-3})(0,076 \times 10^{-3})}{10^{-6}} = 0,4$$

confirmando-se portanto a validade da lei de Stokes.

Ex. 3.16 Pesquisar a lei física (do tipo monomia) que relaciona.

- a) vazão em volume ( $L^3 T^{-1}$ ) que escoar por um orifício, supondo ser ela função da massa específica do líquido, diâmetro do orifício e diferença de pressão.
- b) potência de uma bomba, supondo ser ela função do peso específico do fluido, da vazão e da altura manométrica  $H_m$ .

c) pressão num líquido em função de z, ρ e g

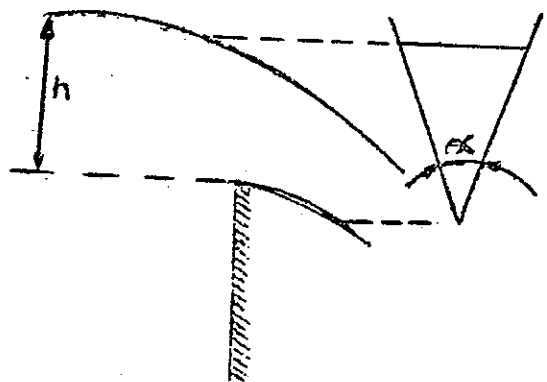


Resp.: a)  $Q = c_1 D^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$       b)  $W = c_2 \gamma C H_m$   
 c)  $p = c_3 \rho g z$

Ex. 3.17 Determinou-se experimentalmente que o período de oscilação de um pêndulo simples é dado por  $T = 2\ell^{1/2}$ , para T em segundos e ℓ em metros. Pede-se esse período no sistema - hora, cm. Sabendo-se que T é também função da aceleração da gravidade, determinar a expressão de T para que seja válida em qualquer sistema de unidades coerentes.

17

Ex. 3.18 A água escoá por um vertedor triangular de ângulo α no vértice inferior. Determinar a expressão da vazão  $Q(L^3T^{-1})$  sabendo-se que as variáveis intervenientes são ρ (massa específica), h (altura), g (aceleração da gravidade) e α. A mesma questão supondo que o vertedor é um semi-círculo de raio a.



Ex 3.19 Em um canal de seção em forma de V, a altura crítica  $y_{cr}$  é função da vazão Q, da aceleração do peso g, e do ângulo α de inclinação das duas paredes do canal. Determinar pela análise dimensional a forma geral de  $y_{cr}$ .

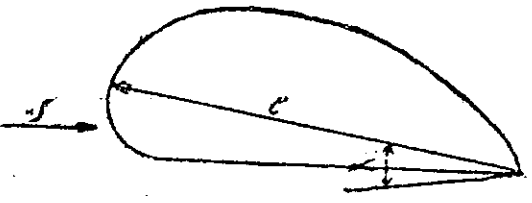
Ex. 3.20 A perda da pressão Δp devida a uma singularidade qualquer (registro, válvula, mudança de direção, etc.) de-

pende da forma da singularidade, do diâmetro  $D$  do tubo, da velocidade  $V$ , da massa específica  $\rho$  e da viscosidade dinâmica  $\mu$  do líquido. Determinar a expressão mais geral de  $\Delta p$ , particularizando-a para o caso em que o efeito da viscosidade é desprezível.

Ex. 3.21 Um líquido é vertido, com vazão constante, para o interior de uma cubeta cônica girante. O líquido é submetido a radiações para matar as bactérias enquanto escorre pela parede da cubeta sob a ação da força centrífuga. A eficiência das radiações depende da espessura da camada líquida sobre as paredes. Esta espessura é determinada pela vazão  $Q$ , pela velocidade angular  $\omega$  da cubeta, pela massa específica  $\rho$ , pelo coeficiente de viscosidade  $\mu$  do líquido, pela aceleração da gravidade  $g$ , pela altura  $h$  da cubeta e pelo ângulo  $\alpha$  do cone. Qual é, para a espessura  $e$  da camada líquida, a forma mais geral da função suposta dimensionalmente homogênea.

Ex. 3.22 O problema básico de um projeto de um perfil de asa é o seu deslocamento em movimento uniforme através de um fluido em repouso. Este fenômeno é equivalente ao problema de um fluido em movimento uniforme através de um perfil fixo, conforme ilustrado na figura. Se o fluido é considerado incompressível mas viscoso, a força  $R$  exercida pelo fluido sobre o perfil é função das seguintes variáveis  $l, \rho, \nu, v_0, \alpha$ .

Determinar pelo teorema Pi a forma geral de  $R$ . Quando o movimento é extremamente lento,  $R$  torna-se função somente de  $\nu, l, v_0$  e  $\alpha$ . Determinar para este caso a forma geral de  $R$  e particularizar o resultado para o caso em que o obstáculo é uma esfera (fórmula de Stokes).



Ex. 3.23 A queda de pressão  $\Delta p$  entre as pressões reinantes na entrada e na saída de uma turbina ou bomba depende de

- D - diâmetro
- Q - vazão
- N - rotação
- $\rho$  - densidade
- $\mu$  - viscosidade absoluta

Determinar a função adimensional equivalente à função

$$\Delta p = f(D, Q, N, \rho, \mu)$$

Resp.: 
$$\frac{\Delta p}{1/2 \rho (DN)^2} \quad \frac{ND^3}{Q} \quad \frac{ND^2}{v}$$

Ex. 3.24 Para se determinar a resistência oposta pelas ondas a um barco fazem-se ensaios no laboratório em um tanque de provas sobre um modelo reduzido na escala 1:25.

19

- a) se a velocidade máxima que o protótipo desenvolverá é de 36 km/h, qual deve ser a velocidade desenvolvida no modelo para se obter ondas dinamicamente semelhantes às reais.
- b) se a resistência oposta no modelo é de 0,2 kgf que valor terá no protótipo.

Solução:

Como se pretende determinar a resistência devida apenas às ondas, a lei física exprime-se por

$$\frac{R}{\rho L^2 v^2} = \phi (N_F)$$

Ora, se  $(N_F)_m = (N_F)_p$  (com o índice m significando "modelo", e p "protótipo") resultará necessariamente

$$\left(\frac{R}{\rho L^2 v^2}\right)_m = \left(\frac{R}{\rho L^2 v^2}\right)_p$$

Por conseguinte,

$$\frac{v_m^2}{L_m g_m} = \frac{v_p^2}{L_p g_p}$$

$$\left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 = k_V^2 = \left(\frac{L_m}{L_p}\right) \left(\frac{g_m}{g_p}\right) = k_L$$

∴  $k_v = \sqrt{1:25} = 1:5$

$V_m = 36/5 = 7,2 \text{ km/h}$  ou  $2,0 \text{ m/s}$

$k_R = k_\rho k_L^2 k_v^2 = k_\rho k_L^2 k_L = k_L^3$

∴  $k_R = (1:25)^3 = 1:15625$

∴  $R_p = 15\ 625 \times 0,2 = 3\ 125 \text{ kgf}$

Ex. 3.25 Um submarino deverá mover-se, quando submerso, à velocidade de 6 nós. Constroeu-se para testes um modelo do mesmo com dimensões lineares iguais a um décimo das do protótipo. Qual deve ser a velocidade do modelo, se os ensaios forem feitos com a mesma água em que o submarino real navegará? Determinar também a escala de forças, que permitirá avaliar-se a força de arrasto sobre o submarino a partir da força homóloga medida no modelo. 20

Solução:

Como já é sabido, esse movimento obedece à lei

$$\frac{F}{\rho l^2 v^2} = \phi (N_R)$$

em que a função simbolizada por  $\phi$  depende da geometria do escoamento, e portanto da forma geométrica do objeto (submarino). Se fosse conhecida  $\phi$ , através de experiências prévias com objetos geometricamente semelhantes, o comportamento desse submarino poderia ser imediatamente previsto com base naquela função. Este é o procedimento usado, por exemplo, quando o objeto do problema é uma esfera, pois para essa forma geométrica a função  $\phi$  já é amplamente conhecida (ver Problemas 13, 14 e 15).

Quando, como é o caso em questão, não existe informação prévia, o procedimento a ser seguido é determinar os pontos representativos de  $\phi$  (definidos pelas coordenadas  $F/\rho l^2 v^2$  e  $N_R$ ) que interessam ao problema. Conforme o interesse, podem-se determinar um ponto, dois pontos, alguns pontos, ou uma série de pontos cobrindo um intervalo de valores das duas coordenadas. Para a determinação, são feitas experiências com um modelo, geometricamente semelhante a ele porém de tamanho dife-

rente, forçando-se uma das variáveis adimensionais do fenômeno (ou, todas menos uma) a assumir o mesmo valor com que se apresentará em relação ao objeto real - o valor da variável res tante para o modelo automaticamente resultará o mesmo que para o protótipo.

Assim, no presente caso deve-se impor

$$(N_R)_m = (N_R)_p$$

$$\frac{V_m l_m}{v_m} = \frac{V_p l_p}{v_p}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{v_m}{v_p}\right) / \left(\frac{l_m}{l_p}\right)$$

$$k_V = k_v / k_L$$

21

(a relação indicada pela letra k é chamada escala)

o numericamente,

$$k_V = 1/0,1 = 10$$

ou  $\therefore V_m = 10 v_p = 10 \times 6 = 60 \text{ nós}$

$$V_m = 60(1853 \text{ m}/3600\text{s}) = 30,9 \text{ m/s}$$

O que o leitor acha deste resultado?

A escala de forças decorre da igualdade

$$\frac{F_m}{\rho_m l_m^2 v_m} = \frac{F_p}{\rho_p l_p^2 v_p}$$

$\therefore \frac{F_m}{F_p} = \left(\frac{\rho_m}{\rho_p}\right) \left(\frac{l_m}{l_p}\right)^2 \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2$

$$k_F = k_\rho k_L^2 k_V^2 = k_\rho k_V^2$$

resultando numericamente

$$k_F = 1(1)^2 = 1$$

O que dizer deste resultado?

Ex. 3.26 Seja uma classe de ventiladores geometricamente semelhantes que dependem de dois comprimentos, o diâmetro D do rotor e o diâmetro d da seção contraída. A potência W é função de D, d, N, ρ, M onde N é a frequência, ρ é a massa específica e M é a vazão em massa (FL<sup>-1</sup>T). Determinar as condições e os resultados de semelhança.

Ex. 3.27 O vertedouro de uma barragem em projeto destina-se a uma vazão de 5 m<sup>3</sup>/s. A altura H do nível de água acima da crista do vertedouro deverá ser determinada por meio de um modelo. Determinar uma escala de comprimento para o modelo, sabendo que a vazão disponível no laboratório é Q<sub>m</sub> = 0,02 m<sup>3</sup>/s e que a força da gravidade é a principal responsável pelo movimento. 22

Resp.:  $K_L \leq 1/10$

Ex. 3.28 Determinar a relação entre as escalas quando há igualdade dos números de Reynolds, Euler, Froude e Weber no modelo e no protótipo:

- a)  $k_v k_L = k_v$
- b)  $k_p = k_\rho k_v^2$
- c)  $k_v^2 = k_L k_g = k_L$
- d)  $k_\rho k_v^2 k_L = k_\sigma$

Ex. 3.29 Um modelo de navio na escala 1:100 é testado em laboratório. O protótipo tem 100 m de comprimento. Para uma velocidade que corresponde a 10 m/s no protótipo, a força de arrasto medida no modelo é 1 kgf. Qual é a velocidade de teste do modelo e a força de arrasto do protótipo. As grandezas que intervêm no fenomeno são ρ, V, L, μ, g, p.

Resp.:  $v_m = 1 \text{ m/s}$   $F_p = 10\,000 \text{ kgf}$

Ex. 3.30 Para se determinar as características de uma hélice de 4,0 m de diâmetro, que gira com frequência de 100 rpm, foi executado um modelo de 0,50 m de diâmetro. Sabe-se que a força de propulsão da hélice é função somente da velocidade de deslocamento  $V$ , do diâmetro  $D$  da hélice e da frequência  $N$ , e das características  $\mu$  e  $\rho$  do líquido. Pedem-se: a) Mostrar que se o modelo se move no mesmo líquido do protótipo a semelhança completa é impossível de ser realizada na prática (fenômeno de cavitação no líquido ou razões de compressibilidade no ar); b) Desprezando as forças viscosas e admitindo para o modelo que a frequência de rotação é de 360 rpm, que a força de propulsão é de 23 kgf, que o momento aplicado é de 2,20 kgm e que a velocidade de deslocamento é de 9,0 km/h determinar o rendimento do modelo, a velocidade, a força de propulsão e o momento do protótipo.

Ex. 3.31 Deseja-se determinar a força que resiste ao avanço de um navio à velocidade de 4,88 m/s em água do mar ( $\rho = 1026 \text{ kg/m}^3$ ), por meio de um modelo construído na escala linear 1:16 e cujo casco apresenta uma área molhada de  $3,72 \text{ m}^2$ . Na velocidade correspondente à condição de semelhança, a força de resistência medida durante ensaio do modelo em água doce foi de 4,35 kgf. Sabe-se que a força de arrasto em  $\text{kgf/m}^2$  sobre o modelo em água doce devida exclusivamente à viscosidade, vale  $0,443v^{1,9}$ ; sobre o navio em água do mar, a aludida força de arrasto vale  $0,396v^{1,85}$ . Determinar a velocidade de ensaio do modelo e a resistência total ao avanço do navio.

Res.:  $v = 1,22 \text{ m/s}$        $F = 15 \text{ 300 kgf (aprox.)}$

Ex. 3.32 A vazão  $Q$  de um líquido com viscosidade cinemática  $\nu$  é medida por meio de um vertedor triangular. Levando em conta as variáveis intervenientes, mostrar que

$$\frac{Q}{H^{2,5} g^{0,5}} = \phi \left( \frac{H^{1,5} g^{1,5}}{\nu} \right)$$

onde  $H$  é a distância vertical desde a superfície livre do líquido até o vértice do triângulo.

Para um vertedor com ângulo de  $60^\circ$ , a vazão de água é calculável por  $Q = 0,7634 H^{2,47}$  (unidades métricas), fórmula essa determinada experimentalmente. Determinar a vazão, em  $\text{m}^3/\text{s}$ , sobre um vertedor idêntico, de um líquido cuja viscosidade cinemática é seis vezes a da água quando  $H = 0,23 \text{ m}$ .

Res  $20,8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$