3

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

APOSTILA Nº 2

CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUÍDA

Oswaldo Fernandes
Prof.Assistente de
Mecânica dos Fluidos
EPUSP - 1995

CAPÍTULO II - CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUIDA

A - INTRODUÇÃO

Para melhor acompanhamento deste capítulo sobre a cinemática da partícula fluida destacaremos, a seguir, os principais conceitos envolvidos (ver bibliografia no fim desta Introdução).

A.1 - Lei do movimento

É a expressão

$$P = P(A,t),$$

que relaciona as posições P e A que uma mesma partícula ocupa nos instantes t e t_o, respectivamente.

Para $P(x_1,x_2,x_3)$ e $A(a_1,a_2,a_3)$, então:

$$x_i = x_i(a_1,a_2,a_3,t) \qquad i = 1,2,3.$$

A.2 - Métodos de descrição dos movimentos

- método de Lagrange - acompanha a partícula ao longo da trajetória, verificando, em cada instante, os valores das grandezas a ela associados.

$$G = G\left[P(A,t),t\right] = G_L(A,t) = G_L(a_1,a_2,a_3,t).$$

As variáveis (a_1,a_2,a_3,t) são ditas variáveis de Lagrange.

- método de Eulér - verifica, em cada instante, os valores das grandezas associadas às partículas fluidas que, sucessivamente, passam por um ponto $P(x_1\ x_2\ x_3)$ determinado.

$$G = G(P,t) = G(x_1,x_2,x_3,t)$$

As variáveis (x_1,x_2,x_3,t) são ditas variáveis de Euler.

A.3 - Movimento permanente e variável

- O movimento é permanente quando, para qualquer grandeza G associada a uma partícula fluida,

$$G(P,t) = G(P,t_o),$$

onde t_o é um instante de referência e t um instante qualquer; também:

$$\frac{\partial G(P,t)}{\partial t} = 0.$$

- o movimento é variável quando

$$G(P,t) \neq G(P,t_o);$$

neste caso

$$\frac{\partial G(P,t)}{\partial t} \neq 0 .$$

A.4 - Fórmulas de derivação

- em variáveis de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[G_L(a_1,a_2,a_3), t \right]_{A = cte} ;$$

- em variáveis de Euler

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)G ,$$

onde G é uma grandeza escalar ou vetorial e ∇ (nabla) é o operador:

$$\nabla = \vec{e}x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

para o sistema de coordenadas cartesiano e

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} ,$$

para o sistema de coordenadas cilíndrico.

$$\frac{dG}{dt} = \text{derivada total},$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \text{derivada local},$$

$$(\vec{v} \times \nabla)G = \text{derivada convectiva ou de transporte.}$$

Se G é uma grandeza escalar,

$$(\vec{v} \times \nabla)G = \vec{v} \times \nabla G = \vec{v} \times \text{grad } G = v\,\frac{dG}{ds},$$

onde $\frac{dG}{ds}$ é a derivada segundo a direção de versor $\vec{s}$, tomada segundo o arco elementar ds percorrido pela partícula fluida.

A.5 - Velocidade e aceleração

- velocidade

$$\vec{v}\,(P,t) = \frac{dP}{dt};$$

- aceleração

$$\vec{a}\,(P,t) = \frac{d\vec{v}(P,t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\,\vec{v}.$$

A.6 - Linhas do escoamento

- Trajetória é o lugar geométrico das posições ocupadas sucessivamente pelo centro de uma mesma partícula fluida em movimento; suas equações são obtidas resolvendo-se o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1\,(x_1,x_2,x_3,t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2\,(x_1,x_2,x_3,t),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3\,(x_1,x_2,x_3,t),$$

para coordenadas cartesianas, ou

$$\frac{dr}{dt} = v_r(r,\theta,z,t),$$

$$\frac{rd\theta}{dt} = v_\theta(r,\theta,z,t),$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(r,\theta,z,t),$$

para coordenadas cilíndricas.

- Linha de corrente é a linha de escoamento em cujos pontos, para cada instante $\bar{t}$, o vetor velocidade das partículas fluidas lhe é tangente, isto é:

$$dP \wedge \vec{v}\ (P,\bar{t}) = 0$$

e, portanto,suas equações são obtidas a partir de

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,\bar{t})} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,\bar{t})} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,\bar{t})},$$

em coordenadas cartesianas, ou

$$\frac{dr}{v_r(r,\theta,z,\bar{t})} = \frac{rd\theta}{v_\theta(r,\theta,z,\bar{t})} = \frac{dz}{V_z(r,\theta,z,\bar{t})},$$

em coordenadas cilíndricas.

- Linha de emissão é o lugar geométrico das posições ocupadas pelos centros das partículas fluidas que, em instantes sucessivos, passaram por um ponto N, fixo, dito centro de emissão.

- Teorema - as trajetórias, linhas de corrente e linhas de emissão coincidem no movimento permanente, não coincidindo, em geral, em movimentos variáveis.

A.7 - Movimento elementar da partícula fluida

- Teorema: $\vec{v} = \vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_o + \frac{1}{2}$ grad $\emptyset$,

onde

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{v} = \text{vetor de rotação},$$

$$\emptyset = \sum_{i,j=1}^{3} dij \; da_i \; da_j ,$$

$$dij = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial a_j} + \frac{\partial v_j}{\partial a_i}\right).$$

. Velocidade de dilatação linear $= \frac{\delta_i}{dt} = d_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial a_i}$.

. Velocidade de dilatação angular $= d_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta_{ij}}{dt}$.

. Velocidade de dilatação cúbica $= \frac{\Delta}{dt} = \text{div } \vec{v} = \frac{1}{dV_o} \frac{d(dV)}{dt_o}$

A.8 - Equação da continuidade na forma diferencial

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \vec{v} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0.$$

A.9 - Bibliografia - Assy, Tufi Mamed - Mecânica dos Fluidos, Livro I - Livro texto do Curso de Mecânica dos Fluidos - EPUSP; capítulo III.

B - EXERCÍCIOS

Ex. 2.1 - Para o sistema de coordenadas cilíndricas demonstrar que

$$\vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{e}_x + \text{sen}\ \theta\ \vec{e}_y\ ,$$

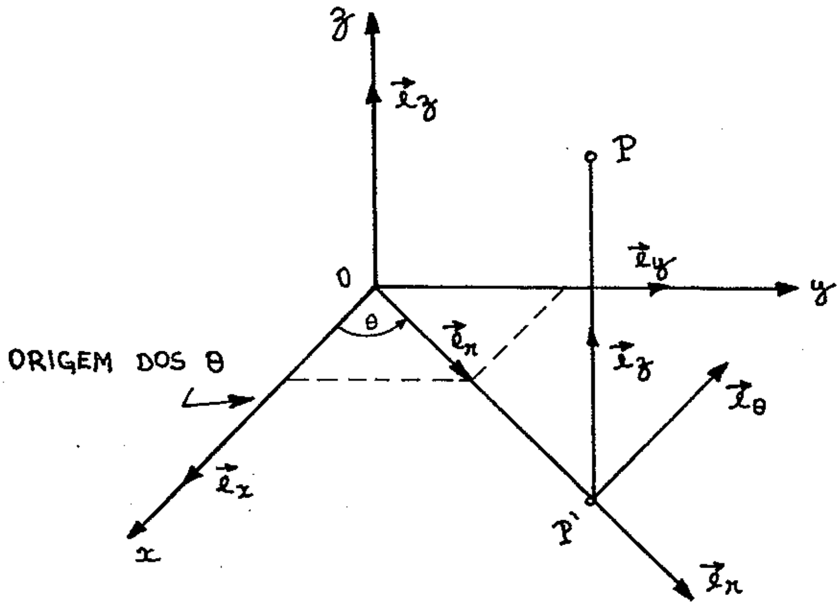
$$\vec{e}_\theta = -\text{sen}\ \theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y\ .$$

Daí, demonstrar que

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta\ ,\quad \frac{d\vec{e}_r}{dr} = 0\ ,$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\ \vec{e}_r ,\frac{d\vec{e}_\theta}{d_r} = 0\ .$$

Solução:



Da figura,

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_r \times \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_r \ \ \times \vec{e}_y)\vec{e}_y\ .$$

Então: $\vec{e}_r = \cos\ \theta\ \ \vec{e}_x + \text{sen}\ \ \theta\ \ \vec{e}_y\ .$

Mas

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r ,$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_y - \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_x .$$

Derivando em relação a θ,

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_x + \cos\theta\, \vec{e}_y = \vec{e}_\theta ,$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_y - \cos\theta\, \vec{e}_x = -\vec{e}_r .$$

Ex. 2.2 - Uma partícula A passa pela origem no instante $t = 0$, com a temperatura $T_A = 273$ K e animada da velocidade v_A=10 m/s. Ao atingir o ponto de coordenadas medidas em metros ($x = 0,1$; $y = 0,1$; $z = 0,141$) no instante $t' > 0$, com a temperatura $T'_A = 285$ K, uma partícula B está passando pela origem no mesmo instante t' com a temperatura $T'_B = 275$ K. Pedem-se: (a)-as derivadas local, convectiva e total da temperatura na origem e no instante $t=0$; (b)-a derivada total da temperatura, em variáveis de Lagrange, no instante $T = 0$ (Assy, Tufi Mamed).

Solução:

a) Derivada total $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)T$.

Considerando $\vec{v} = v\vec{e}_s$, $\vec{v} \times \nabla = v \frac{\partial}{\partial s}$ e teremos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial s} ,$$

com $\frac{\partial T}{\partial t}$ = derivada local e

$v \frac{\partial T}{\partial s}$ = derivada convectiva.

Determinêmo-las através das variações finitas conhecidas

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad \text{com } \Delta t = t' = \frac{\Delta s}{v} .$$

Mas $\quad \Delta s = \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2} = 0,2 \text{ m}.$

Daí, $\quad \Delta t = \frac{0,2}{10} = 0,02\text{s}.$

Então,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{275 - 273}{0,02} = 100 \text{ K/s} = \text{derivada local},$$

$$v \frac{\partial T}{\partial s} \cong v \frac{\Delta T}{\Delta s} = 10 \times \frac{(285 - 275)}{0,2} = 500 \text{ K/s} = \text{derivada convectiva}.$$

A derivada total será

$$\frac{dT}{dt} \cong 100 + 500 = 600 \text{ K/s}.$$

b) Pelo método de Lagrange

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{T(P,t') - T(P,t_o = 0)}{\Delta t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t};$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{285 - 273}{0,02} = 600 \text{ K/s},$$

obviamente o mesmo valor obtido em a).

<u>Ex. 2.3</u> - Um campo escalar de pressões dado por

$$p = 3x^2y - 2y$$

está associado com o campo de velocidades

$$\vec{v} = (x - 2y^2)\,\vec{e}_x - (y - 2x^2)\,\vec{e}_y\,.$$

Calcular $\frac{dp}{dt}$ em P (2,0,3).

<u>Solução</u>:

$$\frac{dp}{dt} = \overset{0}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial t}}} + (\vec{v} \times \nabla)p = (\vec{v} \times \nabla)p\,;$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_P = (\vec{v} \times \nabla)_P\, p = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)_P p\,;$$

$$(\vec{v} \times \nabla)_P = 2 \frac{\partial}{\partial x} + 8 \frac{\partial}{\partial y} \;;$$

$$(\frac{dp}{dt})_P = \left[2(6xy) + 8(3x^2 - 2) \right]_P \;;$$

$$(\frac{dp}{dt})_P = 80 .$$

Ex. 2.4 - O campo de velocidades num movimento é:

$$v_x = v_o e^{-kx}$$

e o campo escalar da massa específica é

$$\rho = \rho_o e^{-xt} .$$

Calcular a expressão de $\frac{d\rho}{dt}$ e seu valor particular para x = 0 e t = 2.

Resp.: $\frac{d\rho}{dt} = - \rho_o e^{-xt} (v_o t e^{-kx} + x).$

Para x = 0 e t = 2, $\frac{d\rho}{dt} = -2\rho_o v_o$.

Ex. 2.5 - Consideremos um movimento em que

$$\vec{v}(P,t) = (U_o + at)\vec{e}_x + v_o \vec{e}_y .$$

Demonstrar que as linhas de corrente no instante t_o são retas e que as trajetórias são parábolas. Qual a linha de emissão para um centro de emissão $N(x_N, y_N, z_N)$?

Solução:

- Linhas de corrente para $t = t_o$:

Da equação das linhas de corrente

$$\vec{v} \wedge dP = 0,$$

$$\frac{dx}{v_x(x,y,t_o)} = \frac{dy}{v_y(x,y,t_o)} . \qquad \text{(a)}$$

$$\text{Como } v_z = \frac{dz}{dt} = 0, \text{ obtemos } z = c_1 . \qquad \text{(b)}$$

$$\text{De (a), } \frac{dx}{u_o + at_o} = \frac{dy}{v_o} .$$

$$\text{Integrando, } x = \frac{u_o + at_o}{v_o}\, y + c_2 . \qquad \text{(c)}$$

As intersecções dos planos dados por (b) e (c) são as retas procuradas.

- Trajetórias

Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = v_x = u_o + at,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_o ,$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Integrando,

$$x = u_o t + \frac{at^2}{2} + k_1 ,$$

$$y = v_o t + k_2 ,$$

$$z = k_3 .$$

Para $t = 0$, $P \equiv A(x_o, y_o, z_o)$. Daí:

$$x = x_o + u_o t + \frac{at^2}{2}, \qquad \text{(d)}$$

$$y = y_o + v_o t, \qquad \text{(e)}$$

$$z = z_o . \qquad \text{(f)}$$

São as equações paramétricas de uma parábola. Para cada ponto A teremos uma trajetória diferente.

Linhas de emissão no instante $\bar{t}$

As partículas, que para $t = 0$ se encontram nos pontos $A(x_o, y_o, z_o)$, passarão sucessivamente por $N(x_N, y_N, z_N)$ nos instantes τ, tais que

$$0 \leq \tau \leq \bar{t} .$$

De (d),

$$x_o = x_N - u_o\tau - \frac{a\tau^2}{2} .$$

De (e),

$$y_o = y_N - v_o\tau .$$

De (f),

$$z_o = z_N .$$

Conhecidos x_o, y_o e z_o, em função do fato de que as partículas devam passar por N nos instantes τ, calculemos (x, y, z) no instante $\bar{t}$.

$$x = x_N + u_o(\bar{t} - \tau) + \frac{a}{2} (\bar{t}^2 - \tau^2);$$

$$y = y_N + v_o(\bar{t} - \tau) ;$$

$$z = z_o = z_N .$$

São as equações paramétricas da linha de emissão onde $\bar{t}$ é fixado e τ é variável entre 0 e $\bar{t}$ (linha de emissão no instante $\bar{t}$).

Ex. 2.6 - No campo de velocidades:

$$v_x = 4y \qquad v_y = 2x \qquad v_z = 0$$

- calcular as acelerações local e convectiva e total no ponto P_1 (2,1,0);
- calcular as componentes da aceleração paralela e normal ao vetor velocidade no ponto $P_1(2,1,0)$;
- determinar a linha de corrente que passa em $P_1(2,1,0)$.

Solução:

- Aceleração: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v}$. (1)

- A primeira parcela, $\frac{\partial \vec{v}}{dt} = 0$, é a aceleração local. A segunda parcela, $(\vec{v} \times \nabla)\vec{v}$, é a aceleração convectiva e vale:

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = (4y \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y})(4y\,\vec{e}_x + 2x\,\vec{e}_y) = 8(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y).$$

Em $P_1(2,1,0)$:

$$\left[(\vec{v} \times \nabla)\vec{v}\right]_{P_1} = 16\vec{e}_x + 8\vec{e}_y .$$

De (1), a aceleração total é

$$\vec{a}(P_1) = 16\,\vec{e}_x + 8\,\vec{e}_y \quad \text{e} \quad a(P_1) = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}.$$

- A componente de $\vec{a}(P_1)$ paralela a $\vec{v}(P_1)$ é

$$a_p = \vec{a}(P_1) \times \frac{\vec{v}(P_1)}{v(P_1)}.$$

Mas

$$\vec{v}(P_1) = 4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \quad \text{e} \quad v(P_1) = 4\sqrt{2}.$$

Daí:

$$a_p = \frac{(16\,\vec{e}_x + 8\,\vec{e}_y) \times 4(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{4\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}.$$

- A componente de $\vec{a}\,(P_1)$ normal a $\vec{v}$ será a_n, tal que:

$$a^2 = a_p^2 + a_n^2.$$

Então:

$$a_n^2 = a^2 - a_p^2 = 320 - 288 = 32,$$

$$a_n = 4\sqrt{2}.$$

- As linhas de corrente são obtidas de:

$$\frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Daí:

$$z = c_1.$$

e

$$xdx = 2ydy.$$

Integrando,

$$\frac{x^2}{2} = y^2 + c_2.$$

Para o ponto $P_1(2,1,0)$, $c_2 = 1$ e $c_1 = 0$.

Então a linha de corrente que passa por P_1 terá equações

$$x^2 = 2(y^2 + 1);\ z = 0$$

NOTA: As trajetórias e linhas de emissão, por ser permanente o escoamento, coincidem com as linhas de corrente que passam por P_o e N, respectivamente.

<u>Ex. 2.7</u> - Dado o campo de velocidades:

$$v_x = \alpha x, \qquad v_y = \beta y, \qquad v_z = 0,$$

determinar as trajetórias, linhas de corrente e as linhas de emissão no instante T para o centro de emissão $N(x_N, y_N, z_N)$.

Resp.: . Trajetórias

$$x = x_o e^{\ t}, \quad y = y_o e^{\ t}, \quad z = z_o. \qquad \text{ou } x = x_o\left(\frac{y}{y_o}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad z = z_o.$$

. Linhas de corrente $\quad x = c_1 y^{\alpha/\beta}, \quad z = c_2.$

. Linhas de emissão

$$x = x_N\, e^{\alpha(T - \tau)}, \quad y = y_N\, e^{\beta(T - \tau)}, \quad z = z_o = z_N. \qquad \text{ou: } x = x_N\left(\frac{y}{y_N}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad z = z_N.$$

Nota: as linhas de corrente coincidem com as trajetórias e as linhas de emissão (movimento permanente).

Ex. 2.8 - Para o campo de velocidades:

$$v_x = v_0 \frac{x}{k},$$

$$v_y = v_0 \frac{y}{k},$$

$$v_z = 0,$$

a - Mostrar que a aceleração é radial.

b - Se k = 2m, qual o valor de v_o para aceleração total em P(1,1,0) de $4\sqrt{2}$ m/s^2?

c - Determinar as linhas de corrente e as trajetórias.

Resp.: a) $\vec{a} = \dfrac{v_0^2 r \, \vec{e}_r}{k^2}$. b) $v_0 = 4$m/s.

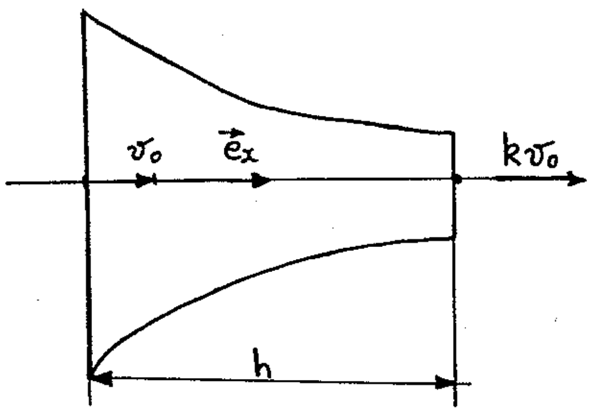
c) Linhas de corrente $xy^{-1} = c_1$, $z = c_2$.
Trajetórias coincidem com as linhas de corrente.

Ex. 2.9 - O escoamento através de um bocal convergente é dado por $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$,

onde v_x varia linearmente de v_o na entrada a kv_o na saída.

1 - Calcular a velocidade e a aceleração.

2 - Se v_o= 2m/s e h = 1m, qual o valor da aceleração na entrada e na saída do bocal?



Resp.:

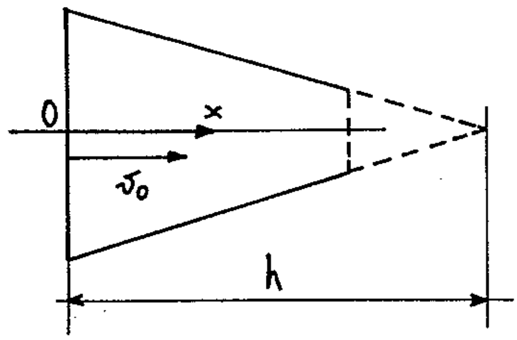
1) $\vec{v} = v_o \left[\dfrac{(k-1)x}{h} + 1\right] \vec{e}_x$ e $\vec{a} = \dfrac{v_o^2}{h^2} (k-1) \left[(k-1)x+h \right] \vec{e}_x$.

2) $a_e = 4(k-1)$ m/s^2 e $a_s = 4k(k-1)$ m/s^2.

Ex. 2.10 - Num bocal cônico o campo de velocidades pode ser escrito na forma:

$$v_x = v_o \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-2},$$

onde v_o = velocidade na entrada.



Determinar a expressão da aceleração e seu valor na entrada do bocal e na seção x = h/2.

Dados:

v_o = 2m/s e h = 4m.

Resp.: $a = 2\frac{v_o^2}{h}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-5}$, $a_o = 2m/s^2$, $a_1 = 64\ m/s^2$.

Ex. 2.11 - Para o campo de velocidades:

$$\vec{v} = (x^2 - 2y^2 + x)\,\vec{e}_x - (xy^2 + y)\,\vec{e}_y,$$

Calcular em P(2.2,0):

1 - aceleração $\vec{a}$,

2 - componente da velocidade para $\theta = 45^o$.

Solução

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = (\vec{v} \times \nabla)\vec{v},$$

uma vez que o movimento é permanente.

1 - $\vec{a}(P) = (\vec{v} \times \nabla)_P\, \vec{v}$, onde P = P(2,2,0).

$$(\vec{v} \times \nabla)_P = (2^2 - 2.2^2 + 2)\frac{\partial}{\partial x} - (2.2^2 + 2)\frac{\partial}{\partial y} = -2\frac{\partial}{\partial x} - 10\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\vec{a}(P) = -\left(2\frac{\partial}{\partial x} + 10\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[(x^2 - 2y^2 + x)\vec{e}_x - (xy^2 + y)\vec{e}_y\right],$$

$$\vec{a}(P) = \left[(-4x + 40y - 2)\vec{e}_x + (2y^2 + 20yx + 10)\vec{e}_y\right]_P = 70\,\vec{e}_x + 98\,\vec{e}_y.$$

2- $\vec{v}(P) = -2\,\vec{e}_x - 10\,\vec{e}_y$.

$$\vec{e}_{45} = \cos 45^o\,\vec{e}_x + \operatorname{sen} 45^o\,\vec{e}_y \text{ com } |\vec{e}_{45}| = \sqrt{\cos^2 45 + \operatorname{sen}^2 15} = 1.$$

$$\vec{e}_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y).$$

$$v_{45} = \vec{v} \times \vec{e}_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-2 - 10) = -6\sqrt{2}.$$

Ex. 2.12 - Sendo dado:

$$\vec{v} = 3x\,\vec{e}_x + 6y\,\vec{e}_y + 4t\,\vec{e}_z,$$

- calcular a velocidade e a aceleração no ponto $P_1(3, 1, 2)$,no instante $t = 10$;
- obter as linhas de corrente no instante $t = 3/2$ e ponto P_1 e as trajetórias para $A(1, 1, 2)$;
- calcular a linha de emissão para o centro de emissão $N(1,2,1)$ e instante $\bar{t} = 2$.

Solução

- Velocidade: $\vec{v}(P_1, 10) = 3 \,.\, 3\vec{e}_x + 6 \,.\, 1\,\vec{e}_y + 4 \,.\, 10\,\vec{e}_z =$

$$= 9\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 40\,\vec{e}_z.$$

$$v(P_1, 10) = \sqrt{9^2 + 6^2 + 40^2} = \sqrt{1717}\text{ m/s} = 41{,}4\text{m/s}.$$

- aceleração: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v}$,

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 4\,\vec{e}_z,$$

$(\vec{v} \times \nabla)$ no ponto P_1 e instante t vale:

$$\vec{v} \times \nabla = (9\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 4t\,\vec{e}_z) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{e}_z\right) =$$

$$= \left(9\,\frac{\partial}{\partial x} + 6\,\frac{\partial}{\partial y} + 4\,t\,\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = (9 \frac{\partial}{\partial x} + 6 \frac{\partial}{\partial y} + 4t \frac{\partial}{\partial z})(3x \vec{e}_x + 6y \vec{e}_y + 4t \vec{e}_z) =$$

$$= 27 \vec{e}_x + 36 \vec{e}_y.$$

$$\vec{a} = 27 \vec{e}_x + 36 \vec{e}_y + 4 \vec{e}_z, \text{ para qualquer } t.$$

- Linha de corrente

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{6y} = \frac{dz}{4t};$$

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \ln \frac{x^2}{c_1} = \ln y \quad \therefore \quad x^2 = c_1 y;$$

$$\frac{dy}{y} = 1{,}5 \frac{dz}{t} \quad \therefore \quad \ln \frac{y}{c_2} = \frac{1{,}5}{t} z, \text{ pois } t = \text{constante};$$

$$y = c_2 \, e^{\frac{1{,}5}{t} z}.$$

$y = C_2 +$

No instante $t = 3/2$:

$$x^2 = c_1 y,$$
$$y = c_2 e^z.$$

A linha de corrente que passa por $P_1(3,1,2)$ terá por equações:

$$3^2 = c_1 \cdot 1 \quad \therefore \quad c_1 = 9;$$

$$1 = c_2 e^2 \quad \therefore \quad c_2 = e^{-2}.$$

Daí:

$$x^2 = 9y,$$

$$y = e^{(z-2)}.$$

- Trajetórias

$$\frac{dx}{dt} = 3x \quad \therefore \quad \ln \frac{x}{k_1} = 3t; \quad x = x_o\, e^{3t};$$

$$\frac{dy}{dt} = 6y \quad \therefore \quad \ln \frac{y}{k_2} = 6t; \quad y = y_o\, e^{6t};$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t \quad \therefore \quad z = 2t^2 + k_3; \quad z = z_o + 2t^2;$$

pois, para $t = 0$, temos o ponto

$$A(x_o,\ y_o,\ z_o) \equiv A(1,\ 1,\ 2).$$

Daí

$$x = e^{3t}; \quad y = e^{6t}, \quad \text{ou} \quad x^2 = y \quad \text{e} \quad z = 2(1 + t^2).$$

- Linha de emissão

Para a determinação da linha de emissão no instante $\bar{t}$ devem-se considerar as partículas que passam sucessivamente por

$$N(x_N,\ y_N,\ z_N) \equiv N(1,\ 2,\ 1),$$

nos instantes ξ, tais que

$$0 \leq \xi \leq \bar{t}.$$

Calculando-se os valores das coordenadas x_o, y_o, e z_o dos pontos A em que se acham essas partículas no instante $t = 0$, a partir das equações das trajetórias, temos:

$$x_N = x_o\, e^{3\zeta} \quad ; \quad x_o = x_N\, e^{-3\zeta};$$
$$y_N = y_o\, e^{6\zeta} \quad ; \quad y_o = y_N\, e^{-6\zeta};$$
$$z_N = z_o + 2\zeta^2; \quad z_o = z_N - 2\zeta^2.$$

Substituindo, nas equações das respectivas trajetórias, os particulares valores de x_o, y_o e z_o obtidos, temos as equações paramétricas (parâmetro ζ) da linha de emissão

$$\left.\begin{aligned} x &= x_N\, e^{3(\bar{t}-\zeta)},\\ y &= y_N\, e^{6(\bar{t}-\zeta)},\\ z &= z_N + 2\,(t^{-2}-\zeta^2), \end{aligned}\right| \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{x_N^2}{y_N}\, y.$$

Para $\bar{t} = 2$ e $N(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{3(2-\zeta)},\\ y &= 2e^{6(2-\zeta)},\\ z &= 9 - 2\zeta^2, \end{aligned}\right| \quad \text{ou} \quad 2x^2 = y.$$

<u>Nota</u> : Comparar as equações obtidas para as 3 linha de escoamento e tirar conclusões.

<u>Ex. 2.13</u> - Calcular a velocidade e a aceleração, em variáveis de Lagrange e de Euler, no instante $t = 10$ s e no ponto $P(x = 3,\ y = 1{,}8,\ z = 0)$ no caso do ítem a) e no instante $t = 0{,}1$ s e no ponto $P(x = 1,\ y = 2,\ z = 5)$ no caso do ítem b):

a) $\vec{v} = 6\,x\,\vec{e}_x + 6y\,\vec{e}_y - 7t\,\vec{e}_z$;

b) $\vec{v} = 10\,x^2\,\vec{e}_x - 20xy\,\vec{e}_y + 100t\,\vec{e}_z$.

Sugestão: Calcular inicialmente as trajetórias para poder passar das variáveis de Euler às de Lagrange.

Resp.: a) $\vec{v} = 6x\,\vec{e}_x + 6y\,\vec{e}_y - 7t\,\vec{e}_z$ - Euler.

Trajetória: $x = x_o e^{6t}$; $y = y_o e^{6t}$; $z = z_o - 3{,}5\ t^2$.

$\vec{v} = 6x_o\,e^{6t}\,\vec{e}_x + 6y_o\,e^{6t}\,\vec{e}_y - 7t\,\vec{e}_z$ - Lagrange.

No ponto $P(3;\ 1{,}8;\ 0)$ e $t = 10$ teremos:

$\vec{v} = 18\vec{e}_x + 10{,}8\vec{e}_y - 70\vec{e}_z$,

$\vec{a} = 36x\,\vec{e}_x + 36y\,\vec{e}_y - 7\vec{e}_z$ - Euler,

$\vec{a} = 36x_o e^{6t}\,\vec{e}_x + 36y_o e^{6t}\,\vec{e}_y - 7\vec{e}_z$ - Lagrange.

No ponto P(3; 1,8; 0) e t = 10,

$\vec{a} = 108\vec{e}_x + 64{,}8\vec{e}_y - 7\vec{e}_z.$

b) $\vec{v} = 10x^2\ \vec{e}_x - 20xy\ \vec{e}_y + 100\ t\vec{e}_z$ - Euler.

Trajetória: $x = x_o(1 - 10x_o t)^{-1},$

$y = y_o(1 - 10x_o t)^2,$

$z = z_o + 50\ t^2.$

$v = \dfrac{10x_o^2\ \vec{e}_x}{(1-10x_o t)^2} - 20\ x_o y_o(1-10x_o t)\vec{e}_y + 100t\ \vec{e}_z$ -Lagrange.

Em P(1, 2, 5) e t = 0,1 s,

$\vec{v} = 10\ \vec{e}_x - 40\ \vec{e}_y + 10\ \vec{e}_z,$

$\vec{a} = 200\ |x^3\ \vec{e}_x + x^2y\ \vec{e}_y + 0{,}5\ \vec{e}_z|$ - Euler-

$= 200\ \left(\dfrac{x_o}{1 - 10x_o t}\right)^3 \vec{e}_x + x_o^2 y_o\ \vec{e}_y + 0{,}5\ \vec{e}_z$ - Lagrange.

Em P(1, 2, 5) e t = 0,1 s,

$\vec{a} = 200\ \vec{e}_x + 2\ \vec{e}_y + 0{,}5\ \vec{e}_z.$

<u>Ex. 2.14</u> - Dado o escoamento cujo campo de velocidade é

$$v_x = \frac{x}{t}\ ,\ v_y = \frac{y}{t}\ ,\ v_z = 0\ ,\ t \neq 0\ ,$$

determinar:

a - equação da linha de corrente que passa pelo ponto $P_1(2,1,2)$;

b - equação da trajetória que passa em P_1, no instante t = 1;

c - aceleração num instante t qualquer, em P_1.

Solução:

a - equação das linhas de corrente $\vec{v} \wedge dP = 0$, ou seja,

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Sendo $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$, $dz = 0 \quad \therefore \quad z = c_1$

De $\frac{dx}{x/t} = \frac{dy}{y/t}$ obtém-se, para qualquer t,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \text{ e } \ln \frac{x}{c_2} = \ln y$$

ou seja:

$$x = c_2 y.$$

As equações $z = c_1$ (planos),

$x = c_2 y$ (planos),

definem as linha de correntes: retas oriundas das interseções dos planos.

Linha de corrente particular que passa por $P_1(2,1,2)$:
- os valores de c_1 e c_2 se obtém pela substituição de $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$ nas equações, a saber:

$$c_1 = 2,$$

$$2 = c_2 . 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 2.$$

Daí, a equação da linha de corrente por P_1:

$$x = 2y,$$
$$z = 2.$$

b) Equação da trajetória

Obtém-se da integração de

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Daí:

$$\ell n \frac{x}{k_1} = \ell n t \quad \therefore \quad x = k_1 t;$$

$$\ell n \frac{y}{k_2} = \ell n t \quad \therefore \quad y = k_2 t,$$

$$z = k_3 .$$

São as equações paramétricas da Trajetória.

Para $t = 1$ e $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$.

$$k_1 = 2,$$
$$k_2 = 1,$$
$$k_3 = 2,$$

e $\quad x = 2t, \; y = t \; e \; z = 2;$

ou $\quad x = 2y \; e \; z = 2.$

E assim, apesar do movimento ser variável, as linhas de corrente coincidem com as trajetórias.

c) Aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v}.$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{x}{t^2}\,\vec{e}_x - \frac{y}{t^2}\,\vec{e}_y ,$$

$$(\vec{v} \times \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{t}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = \frac{x}{t^2}\,\vec{e}_x + \frac{y}{t^2}\,\vec{e}_y .$$

Daí $\qquad \vec{a} = 0.$

Ex. 2.15 - Um jato de fluido incompressível, simétrico em relação ao eixo 0z, é dirigido contra uma parede de dimensões infinitas, criando-se o campo da velocidades

$$v_x = m(t)x,$$
$$v_y = m(t)y,$$
$$v_z = -2m(t)z.$$

Determinar as linhas de corrente, as trajetórias e as linhas de emissão.

<u>Solução</u>: Verifiquemos inicialmente a viabilidade do movimento ser o de um fluido incompressível.

Para fluido incompressível, a velocidade de dilatação cúbica é nula. Logo:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

O movimento é viável, pois

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$= m(t) + m(t) - 2m(t) = 0.$$

- Linhas de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

$$\frac{dx}{m(t)x} = \frac{dy}{m(t)y} = \frac{dz}{-2m(t)z},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{2z}, \text{ para } m(t) \neq 0.$$

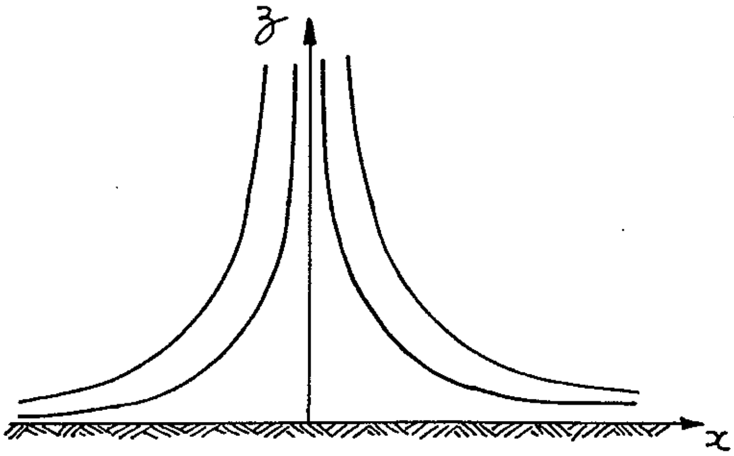
Integrando,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \text{ obtém-se } x = c_1 y,$$

e

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{2z}, \text{ obtém-se } x^2 z = c_2.$$

As linhas de corrente são intersecções de planos passando pelo eixo 0z com hiperbolóides cúbicos - são assíntotas aos eixos- 0x e 0z.



O ponto 0(0, 0, 0) é ponto de estagnação, uma vez que aí

$$\vec{v} = 0 .$$

- Trajetórias e linhas de emissão

Embora m(t) seja função do tempo, as equações da linha de corrente não contém m. As linhas de emissão e trajetórias coincidem com as linhas de corrente. O tempo influi apenas no valor numérico da velocidade, mas não na sua direção.

De fato:

Trajetórias

$$\frac{dx}{dt} = m(t)x \ , \quad \frac{dx}{x} = m(t)dt,$$

$$\frac{dy}{dt} = m(t)y \ , \quad \frac{dy}{y} = m(t)dt,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2m(t)z \ , \quad -\frac{dz}{2z} = m(t)dt.$$

Daí:

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{-2z}.$$

e voltamos às equações das linhas de corrente.

Nota: Fazer desenvolvimento análogo para as linhas de emissão.

Ex. 2.16- Determinar a equação da linha de corrente que passa por $P_o(1, 1, 1)$ e a equação da trajetória que no instante $t = 0$ passa por esse mesmo ponto, no movimento cujo campo de velocidades é

$$\vec{v} = - x\,\vec{e}_x + 2y\,\vec{e}_y + (2 - z)\vec{e}_z.$$

Resp.:

Linha de corrente $\quad x^2 y = 1, \quad x = 2 - z.$

Trajetória $\quad x = e^{-t}, \quad y = e^{2t}, \quad z = 2 - e^{-t}.$

ou $\quad x^2 y = 1, \quad x = 2 - z.$

Ex. 2.17- Determinar para o campo de velocidades $\vec{v} = (x/t)\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$ as linhas de corrente e de emissão e a trajetória, e traçá-las a partir do centro de emissão (x_N, y_N) em função do tempo. Para as aplicações numéricas são dados:

$$x_N = y_N = 0,1; \; t = 0,5; \; t = 1; \; 0,2 < \tau < t; \; 0 < x < 10.$$

Solução:

. Campo de velocidades

$$v_x = \frac{x}{t}; \; v_y = y; \; v_z = 0.$$

. Linhas de corrente

Aplicando a equação da linha de corrente, $\vec{v} \wedge dP = 0$, na forma

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} ,$$

com $v_z = 0$, obtêm-se:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad e \quad z = c_1 ;$$

$$\frac{t\,dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad e \quad \ln x^t = \ln \frac{y}{c_2} ;$$

pois t = constante para toda a massa fluida

Daí:

$$y = c_2\, x^t ,$$

$$z = c_1 ,$$

são as equações das linhas de corrente no instante t.

. Trajetórias

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}; \quad \ln \frac{x}{k_1} = \ln t$$

$$e \qquad x = k_1 t ;$$

$$\frac{dy}{dt} = y; \quad \frac{dy}{y} = dt; \quad \ln \frac{y}{k_2} = t$$

$$e \qquad y = k_2 e^t ;$$

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad z = k_3 .$$

Fazendo para $t = t_o$ $\quad x = x_o ,\quad y = y_o \quad$ e $\quad z = z_o$,

$$k_1 = \frac{x_o}{t_o} \quad e \quad x = \frac{x_o t}{t_o} ,$$

$$k_2 = y_o e^{-t_o} \quad e \quad y = y_o e^{t-t_o} ,$$

$$k_3 = z_o \quad e \quad z = z_o.$$

São as equações paramétricas da trajetória.

. Linhas de emissão no instante $\bar{t}$

As partículas que para $t=t_o$ estavam em A, passarão sucessivamente por N no intervalo

$$0 < \tau \leq \bar{t}$$

Das trajetórias obtemos para o instante τ

$$x_o = \frac{t_o}{\tau} x_N; \quad y_o = y_N e^{(t_o-\tau)}; \quad z_o = z_N .$$

Para o instante $\bar{t}$ temos as linhas de emissão

$$x = x_N \frac{\bar{t}}{\tau},$$

$$y = y_N e^{\bar{t} - \tau},$$

$$z = z_N = z_o,$$

com τ variando no intervalo $0 < \tau \leq \bar{t}$.

Aplicação numérica

$$x_N = y_N = 0,1; \quad \bar{t}_1 = 0,5; \quad \bar{t}_2 = 1;$$

$$0,2 < \tau < \bar{t} \quad e \quad 0 < x < 1.$$

Para $\bar{t}_1 = 0,5$

$$x = \frac{0,05}{\tau}, \quad y = 0,1\, e^{0,5 - \tau}, \quad z = z_o .$$

Para $\bar{t}_2 = 1,0$

$$x = \frac{0,1}{\tau}, \quad y = 0,1\, e^{1 - \tau}.$$

Ex. 2.18 - Sendo dado

$$\vec{v} = (6 + 2xy + t^2)\vec{e}_x - (xy + 10t)\vec{e}_y + 2t\,\vec{e}_z,$$

calcular a aceleração no ponto P(1, 0, 1), no instante t = 1.

Resp.: $\vec{a}(P, 1) = -18\,\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$.

Ex. 2.19 - Dado o campo de velocidades

$$\vec{v} = 3x\,\vec{e}_x - 2y\,\vec{e}_y + (5t - 3z)\vec{e}_z,$$

achar a equação das linhas de corrente que passam por $P_1(2,1,2)$ nos instantes t = 1 e t = 1,6.

Resp.: Para t = 1: $x^2\,y^3 = 4$ e $x(5 - 3z) = -2$.

Para t = 1,6: $x^2\,y^3 = 4$ e $x(8 - 3z) = 4$.

Ex. 2.20 - Para o campo de velocidades

$$v_x = \frac{x}{1-t}, \quad v_y = \frac{y}{1+t}, \quad v_z = 0,$$

calcular:

1 - linhas de corrente para t = 0 e $t \to \infty$;

2 - trajetórias;

3 - linha de emissão que passa por (x_o, y_o, z_o) em t = = 0.

1 - Linha de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Como $v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0, \quad z = c_1$.

$$\frac{(1 - t)dx}{x} = \frac{(1 + t)dy}{y}.$$

Integrando,

$$\ell n \frac{x}{c_2} = \frac{1+t}{1-t} \ell n y$$

e

$$x = c_2\, y^{\frac{1+t}{1-t}} .$$

Para $t = 0$,

$$z = c_1 \quad , \quad x = c_2\, y .$$

Para $t \to \infty$,

$$z = c_1 \;, \; x = c_2 \lim_{t\to\infty} y^{\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1}} \quad \text{e} \quad xy = c_2 .$$

2-Trajetórias

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-t} ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+t} ;$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Integrando e considerando $P \equiv P_o(x_o, y_o, z_o)$ para $t = 0$,

$$\ell n \frac{x}{k_1} = - \ell n(1-t) \quad \therefore \; x = k_1(1-t)^{-1} = x_o(1-t)^{-1};$$

$$\ell n \frac{y}{k_2} = \ell n(1+t) \quad \therefore \; y = k_2(1+t) = y_o(1+t);$$

$$z = k_3 .$$

Eliminando t, que vale $1 - \frac{x_o}{x}$,

$$y = y_o(2 - \frac{x_o}{x}) \quad e \quad z = z_o.$$

3 - Linha de emissão para $t = \bar{t}$

Sendo $N(x_N, y_N, z_N)$ o centro de emissão, os valores das $P_o(x_o, y_o, z_o)$ correspondentes às trajetórias das partículas que passam sucessivamente por N entre os instantes t=0 e $t = \bar{t}$, não obtidos a partir das equações paramétricas da trajetória e valem, para $0 \leq \tau \leq \bar{t}$:

$$x_o = x_N(1 - \tau) \; ; \; y_o = \frac{y_N}{(1 + \tau)} \; ; \quad z_o = z_N.$$

As equações da linha de emissão para $t = \bar{t}$ serão, portanto:

$$x = x_N(\frac{1 - \tau}{1 - \bar{t}}), \quad y = y_N \; (\frac{1 + \bar{t}}{1 + \tau}), \quad z = z_N.$$

Para $\bar{t} = 0$ e $N \equiv P_o(x_o, y_o, z_o)$,

$$x = x_o(1 - \tau) \; , \; y = \frac{y_o}{1 + \tau} \; , \quad z = z_o.$$

Eliminando τ e sabendo-se que

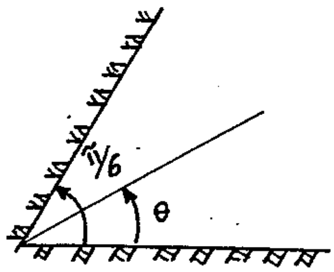
$$\tau = 1 - \frac{x}{x_0} \; ,$$

então

$$y = y_o(2 - \frac{x}{x_0})^{-1} \quad e \quad z = z_o.$$

<u>Ex. 2.21</u> - Um fluido escoa em movimento meridiano entre duas placas planas $0 < \theta < \pi/6$, com um campo de velocidades dados por $v_r = (1 - t)/r$, $v_\theta = v_z = 0$. Pedem-se: (a)- Lei de movimento; (b) - o ℓ. g das posições das partículas no instante t = 0,5 inicialmente distribuidas sobre a circunferência $r_o = 1$; (c) - a equação das seções de escoamento;

(d) - as acelerações total, local e convectiva em variáveis de Euler; (e) - as superfícies de nível v = Cte; (f) - os diagramas de velocidade numa seção de escoamento para t = 0 e t = = 0,5; (g) - a expressão da aceleração total em variáveis de Lagrange em função dos resultados obtidos em (a) e (d). (Assy, Tufi Mamed).



Solução:

Campo de velocidades dado no sistema cilíndrico de coordenadas:

$$v_r = \frac{1 - t}{r},$$

$$v_\theta = v_z = 0.$$

a) Lei do movimento:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{1 - t}{r}, \text{ donde } \quad rdr = (1 - t)dt.$$

Integrando, $$\frac{r^2}{2} - \frac{r_o^2}{2} = t - \frac{t^2}{2},$$

onde r_o é o valor de r para t = 0.

Daí: $$r^2 = r_o^2 + 2t - t^2.$$

Ainda $$v_\theta = \frac{rd\theta}{dt} = 0, \quad \text{donde} \quad \theta = \theta_o = \text{cte};$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0, \quad \text{donde} \quad z = z_0 = \text{cte}.$$

Daí:
$$r^2 = r_o^2 + 2t - t^2,$$

$$\theta = \theta_o \qquad e \ z = z_o.$$

As trajetórias são retas que passam pala origem. A posição da partícula, sobre elas, é dada por $r = r(t)$.

b) Lugar geométrico das posições das partículas no instante $t = 0{,}5$, se $r_o = 1$:

$$r^2 = 1 + 2 \ . \ 0{,}5 - 0{,}25 = 1{,}75 \qquad e \qquad r = 1{,}32,$$

isto é, superfície cilíndrica de $r = 1{,}32$.

c) Equação das seções de escoamento

Como $\vec{v} = v_r \ \vec{e}_r$, as seções de escoamento serão normais a $\vec{e}_r$ em cada ponto. São superfícies cilíndricas de $r = cte$.

d) Aceleração em variáveis de Euler (r, θ, z, t)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v}.$$

. Aceleração local: $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$,

onde
$$\vec{v} = \frac{1 - t}{r} \vec{e}_r ;$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\vec{e}_r}{r}$$

. Aceleração convectiva

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = \left(\frac{1 - t}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{1 - t}{r} \vec{e}_r\right) =$$

$$= \left(\frac{1 - t}{r}\right)^2 \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}} - \frac{(1 - t)^2}{r^3} \vec{e}_r = - \frac{(1-t)^2}{r^3} \vec{e}_r.$$

. Aceleração total

$$\vec{a} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{(1-t)^2}{r^3}\right)\vec{e}_r \; .$$

e) Superfície v = cte.

$$v = v_r = \frac{1-t}{r} = \text{cte} = \frac{1}{k} \, ,$$

$r = k(1 - t)$, superfície cilíndrica para cada t.

f) Velocidades para t = 0 e t = 0,5

Para t = 0 , $v = \dfrac{\vec{e}_r}{r}$ para cada r .

Para t = 0,5 , $v = \dfrac{\vec{e}_r}{2r}$ para cada r .

g) Aceleração em variáveis de Lagrange (r_o, θ_o, z_o, t)

$$\vec{a} = \frac{r_o^2 + 1}{(r_o^2 + 2t - t^2)^{3/2}} \, \vec{e}_r$$ a partir de (a) e (d).

Resp.:

a) $r^2 = r_o + 2t - t^2$, $\theta = \theta_o$, $z = z_o$.

b) $r_1 = 1{,}32$ (superfície cilíndrica).

c) r = cte .

d) $\vec{a}_{local} = \dfrac{-\vec{e}_r}{r}$, $\vec{a}_{convect} = -\dfrac{(1-t)^2}{r^3}\,\vec{e}_r$;

$$\vec{a} = -\vec{e}_r\left(\frac{1}{r} + \frac{(1-t)^2}{r^3}\right).$$

e) $r = k(1 - t) = r_o(1 - t)$.

f) $t = 0 \quad \therefore \quad v_r = \dfrac{1}{r}$ para cada $r = cte$.

$t = 0{,}5 \quad \therefore \quad v_r = \dfrac{1}{2r}$ para cada $r = cte$.

g) $$\vec{a} = - \frac{\vec{e}_r (r_o^2 + 1)}{(r_o^2 + 2t - t^2)^{3/2}} .$$

<u>Ex. 2.22</u> - No movimento representado, em coordenadas cilíndricas, pelo campo de velocidades

$$\vec{v} = - \frac{4}{r} \vec{e}_r + \frac{2}{r} \vec{e}_\theta ,$$

determinar as linhas de corrente e as trajetórias.

<u>Solução:</u>

- Linhas de corrente

De

$$\vec{v} \wedge dP = 0,$$

obtém-se

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_e} = \frac{dz}{v_z} .$$

Como $v_r = \dfrac{dz}{dt} = 0$, tem-se $z = c_1$.

Também,

$$\frac{dr}{-4/r} = \frac{rd\theta}{2/r} .$$

Para $r \neq 0$,

$$\frac{dr}{r} = -2 \, d\theta .$$

Integrando,

$$\ell n \frac{r}{c_2} = -2\theta \qquad e \qquad r = c_2 e^{-2\theta} .$$

- Trajetórias

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{-4}{r} \quad \therefore \quad rdr = -4\ dt;$$

$$\frac{r^2}{2} = -4t + k_1 \qquad e \qquad r^2 = 2k_1 - 8t;$$

$$v_\theta = \frac{rd\theta}{dt} = \frac{2}{r} \quad \therefore \quad d\theta = \frac{2dt}{r^2} = \frac{2dt}{2k_1 - 8t} = \frac{dt}{k_1 - 4t};$$

$$\theta = -\frac{1}{4}\ \ell n\left(\frac{k_1 - 4t)}{k_2}\right) = -\frac{1}{4}\ \ell n \frac{r^2}{2k_2} = -\frac{1}{2}\ \ell n \frac{r}{\sqrt{2k_2}};$$

$$r = \sqrt{2k_2}\ \ell^{-2\theta}.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \quad \therefore \quad z = k_3.$$

Comparando com as linhas de corrente, vemos que as trajetórias coincidem com elas, o que era de se esperar, pois o movimento é permanente. Constatar o mesmo para as linhas de emissão.

Ex. 2.23 - Obter as linhas de corrente para o campo de velocidades

$$v_r = -\frac{3}{2}\ v_o\ r^{1/2} \cos\frac{3\theta}{2},\ v_\theta = \frac{5}{2}\ v_o\ r^{3/2}\ \mathrm{sen}\ \frac{3\theta}{2},\ v_z = 0.$$

(Assy, Tufi Mamed)

Solução:

Linhas de corrente

Equação no sistema de coordenadas cilídricas:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}.$$

Como $v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0$: $z = c_1$.

Também:

$$-\frac{dr}{\frac{3}{2}\, v_o r^{1/2} \cos\frac{3\theta}{2}} = \frac{r d\theta}{\frac{5}{2}\, v_o r^{3/2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}},$$

$$-\frac{5}{3}\frac{dr}{\,} = \frac{d\theta \cos 3\theta/2}{\operatorname{sen} 3\theta/2} = \frac{2\, d(\operatorname{sen} 3\theta/2)}{3 \operatorname{sen} 3\theta/2}.$$

Integrando:

$$-\frac{5}{2}\, r = \ln \frac{\operatorname{sen} 3\theta/2}{c_2};$$

$$\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} = c_2\, e^{-\frac{5r}{2}}.$$

As linhas de corrente são, portanto:

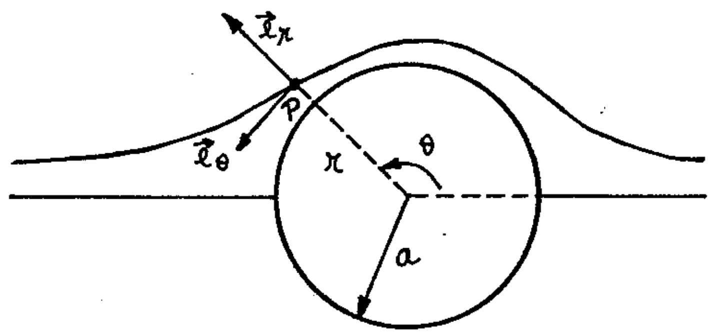
$$z = c_1,$$

$$\theta = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,sen} \left(c_2 e^{-\frac{5r}{2}}\right).$$

Ex. 2.24: O escoamento em torno de um cilindro é dado pelo campo de velocidades:

$$\vec{v} = v_o \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r - v_o \operatorname{sen}\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_\theta .$$

Achar a aceleração no bordo, $r = a$, do cilindro.



Solução:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} \ ;$$

$$\vec{v} = v_r\ \vec{e}_r + v_\theta\ \vec{e}_\theta + v_z\ \vec{e}_z \text{ com } v_z = 0;$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ ;$$

$$\vec{v} \times \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} .$$

Para r = a, bordo do cilindro:

$$v_r = 0 \qquad , \qquad v_\theta = -2v_o \operatorname{sen}\theta ,$$

$$(\vec{v} \times \nabla)_a = - \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} ,$$

$$\vec{a} = - \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r\ \vec{e}_r + v_\theta\ \vec{e}_\theta) ,$$

$$\vec{a} = - \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{a} \left[\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\ \vec{e}_r + v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\ \vec{e}_\theta + v_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}\right]_{r = a} ,$$

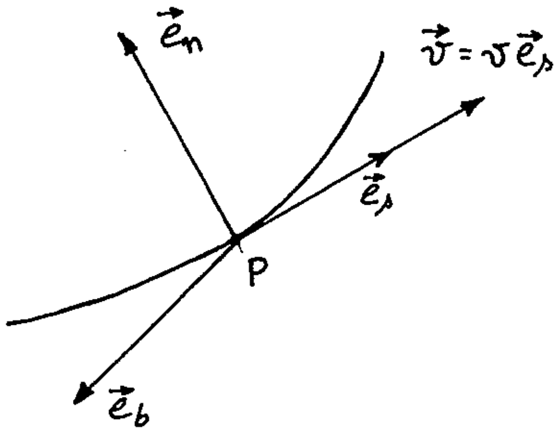
$$\vec{a} = - \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{a} \left[-2v_o \cos\theta\ \vec{e}_\theta - 2v_o \operatorname{sen}\theta\ (-\vec{e}_r)\right],$$

pois $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = - \vec{e}_r$ (veja-se Ex. 2.1);

$$\vec{a} = - \frac{4v_o^2}{a} \operatorname{sen}\theta\ (\operatorname{sen}\theta\ \ \vec{e}_r - \cos\theta\ \ \vec{e}_\theta) .$$

Ex. 2.25 - Determinar a expressão das componentes da acelera - ção no sistema intrînseco de origem fixa num ponto P dado e $\vec{e}_s$ dirigido segundo a tangente â linha de corrente que passa por P no instante t_o. Confirmar o resultado obtido pelo emprego do sistema cilîndrico com origem no centro da curvatura do arco da linha de corrente que contém o ponto P no intante t_o (Assy, Tufi Mamed).

<u>Solução</u>:



Definamos o sistema intrínseco de coordenadas. É constituído pelos versores:

a) $\vec{e}_s = \frac{dP}{ds}$ da tangente à linha de corrente;

b) $\vec{e}_n = R \frac{d\vec{e}_s}{ds}$, onde R = = raio de curvatura da linha de corrente no ponto e instante considerados $= \frac{1}{\left|\frac{d\vec{e}_s}{ds}\right|}$;

c) $\vec{e}_b = \vec{e}_s \wedge \vec{e}_n$ = versor da binormal.

Expressão da velocidade: $\vec{v} = v\vec{e}_s$.

Expressão da aceleração: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

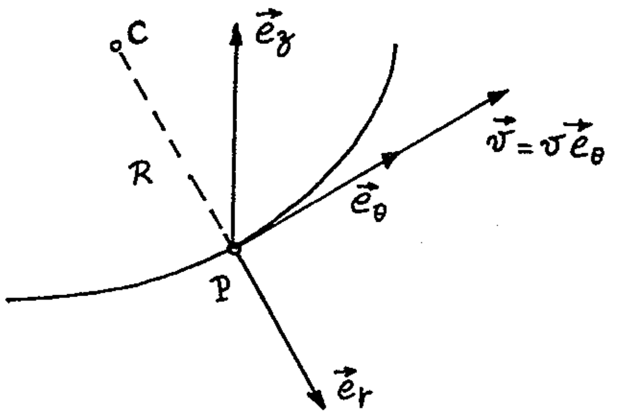
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} \qquad \text{com} \qquad \nabla = \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial n} + \vec{e}_b \frac{\partial}{\partial b};$$

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = v \frac{\partial}{\partial s};$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial s} (v\, \vec{e}_s) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v^2 \frac{\partial}{\partial s} \vec{e}_s;$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n.$$

Usando-se o sistema cilíndrico com origem no centro de curvatura do arco da linha de corrente que contém o ponto P no instante t_o:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} \, ,$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \, ,$$

$$\vec{v} \times \nabla = \frac{v}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \, ,$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (v\vec{e}_\theta) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v^2}{R} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \, .$$

Como $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = - \vec{e}_r$ (ver exercício 2.1),

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_\theta \quad (ds = rd\theta),$$

expressão igual à anterior com

$$\vec{e}_s = \vec{e}_\theta \qquad \text{e} \qquad \vec{e}_n = - \vec{e}_r \, .$$

<u>Ex. 2.26</u> - Um líquido escoa ao longo de um canal, de fundo inclinado de um ângulo θ em relação à horizontal, animado do seguinte campo de velocidades: $v_x = v_o \left[1 - (1 - y/h)^2\right]$, $v_y = v_z = 0$. O eixo 0x está orientado no sentido do escoamento, que é descendente, e contido no fundo do canal. O eixo 0y é normal ao fundo do canal. v_o é a velocidade na superfície livre paralela ao fundo do canal e distante desse fundo de $y = h$. Pedem-se: (a) Traçar o diagrama de velocidades numa seção de escoamento (Sugestão: Traçar $(v_x/v_o) = f(y/h)$; (b) Achar as acelerações total, local e convectiva sendo dados $v_o = kt$ e $h = m\,t^2$, onde k e m são números dados. (Assy, Tufi Mamed).

Resp.: a) $\dfrac{v_x}{v_o} = 1 - (1 - \dfrac{y}{h})^2$.

b) $\vec{a}_{convectiva} = (\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = 0 \quad (\partial v_x/\partial x = 0).$

$$\vec{a}_{local} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\frac{3ky^2}{h^2} - \frac{2ky}{h}\right)\vec{e}_x = \vec{a}_{total}.$$

<u>Ex. 2.27</u> - Determinar a lei do movimento plano que se realiza com o seguinte campo de velocidades $v_x = A(x+y) + Bt$, $v_y = C(x+y) + Dt$, onde A, B, C, D, são números dados. Traçar no plano (x, y) o deslocamento da partícula desde o instante $t_o = 0$ até o instante $t = 1,0$, com ponto inicial em ($x_o = 1,0$, $y_o = 1,0$) e particularizando as constantes para A = 2, B =3, C =1,D = 1/2 (Assy, Tufi Mamed).

<u>Solução</u>:

Campo de velocidades

$$v_x = A(x + y) + Bt = 2(x + y) + 3t,$$

$$v_y = C(x + y) + Dt = x + y + t/2 ,$$

$$A(x_o, y_o) \equiv A(1, 1).$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(x + y) + 3t \quad (\alpha);$$

$$\frac{dy}{dt} = (x + y) + t/2 \quad (\beta);$$

$$(\alpha) - 2(\beta): \quad \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 2t;$$

$$x - 2y = t^2 + c_1.$$

$$\text{Em } (\beta) \quad \frac{dy}{dt} = 3y + t^2 + t/2 + c_1,$$

$$\dot{y} - 3y = t^2 + t/2 + c_1.$$

Solução da equação homogênea $\dot{v} - 3v = 0$:

$$v = ke^{3t}.$$

Solução particular $v = e^{3t}$.

Fazendo $y = uv$,

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} - 3uv = t^2 + t/2 + c_1,$$

$$v \frac{du}{dt} + u(\frac{dv}{dt} - 3v) = t^2 + t/2 + c_1 ,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t^2 + t/2 + c_1}{e^{3t}},$$

$$u = - \frac{e^{-3t}}{3} [t^2 + \frac{2}{3} t + \frac{2}{9}] - \frac{e^{-3t}}{6} [t + \frac{1}{3}] - \frac{c_1 e^{-3t}}{3} +$$

$$+ c_2 = - \frac{e^{-3t}}{3} [t^2 + \frac{7}{6} t + \frac{7}{18} + c_1] + c_2 ,$$

$$y = uv = - \frac{1}{3} [t^2 + \frac{7}{6} t + \frac{7}{18} + c_1] + c_2 e^{+3t},$$

$$x = - \frac{2}{3} [t^2 + \frac{7}{6} t + \frac{7}{18} + c_1] + t^2 + c_1 + 2c_2 e^{3t},$$

$$x = \frac{t^2}{3} - \frac{7}{9} t - \frac{7}{27} + \frac{c_1}{3} + 2c_2 e^{3t}.$$

Para $x_o = 1$ e $y_o = 1$, $t = 0$,

$$\therefore \quad \begin{aligned} 1 &= - \frac{7}{54} - \frac{c_1}{3} + c_2 , \\ 1 &= - \frac{7}{27} + \frac{c_1}{3} + 2c_2 , \end{aligned} \left| \begin{aligned} &3c_2 = 2 + \frac{21}{54} \therefore c_2 = \frac{43}{54}, \\ &c_1 = -1 . \end{aligned} \right.$$

$$y = -\frac{1}{3}(t^2 + \frac{7}{6}t) + \frac{11}{54} + \frac{43}{54}e^{3t},$$

$$x = \frac{t^2}{3} - \frac{7}{9}t - \frac{16}{27} + \frac{43}{27}e^{3t}.$$

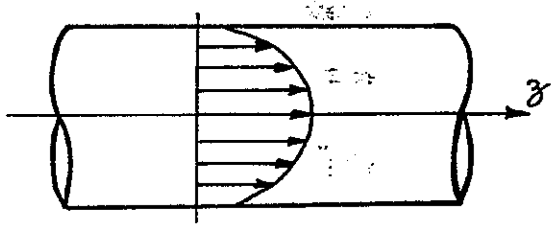
Equações paramétricas do movimento.

Ex. 2.28 - Um escoamento no interior de um conduto cilíndrico de seção circular se realiza com um diagrama de velocidade que é parabolóide de revolução com o vértice no eixo do conduto. Determinar:

a) as velocidades de dilatação linear e ângular,
b) o vetor turbilhão em cada ponto,
c) a velocidade de dilatação cúbica.

Solução:

- Campo de velocidades



Pelos dados do problema,

$$v_r = v_\theta = 0,$$

$$v_z = v_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2}).$$

- Velocidade de dilatação linear e angular

Sistema cartesiano:

$$d_{11} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad d_{22} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad d_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$d_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) = 0,$$

$$d_{23} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$d_{13} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x},$$

Sendo $r^2 = x^2 + y^2$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$.

Daí:

$$d_{23} = -\frac{v_{max}\, y}{R^2} \qquad \text{e} \qquad d_{13} = -\frac{v_{max}\, x}{R^2},$$

ou, com $y = R\,\text{sen}\theta$ e $x = R\cos\theta$,

$$d_{23} = -\frac{v_{max}\,\text{sen}\theta}{R} \qquad \text{e} \qquad d_{13} = -\frac{v_{max}\cos\theta}{R}.$$

Então: • Velocidades de dilatação linear $d_{ii} = 0$.

• Velocidade de dilatação angular:

$$d_{12} = 0\ ,\ d_{13} = -\frac{v_{max}\cos\theta}{R}\ ,\ d_{23} = -\frac{v_{max}\,\text{sen}\theta}{R}.$$

- Vetor turbilhão $\vec{\Omega}$

Por definição $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\ \nabla \wedge \vec{v}$;

$$\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial v_z}{\partial r}\,\vec{e}_\theta = r\,\frac{v_{max}}{R^2}\,\vec{e}_\theta .$$

- Velocidade de dilatação cúbica

$$\text{É o div}\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = (\vec{e}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta\,\partial}{r\,\partial\theta} + \vec{e}_z\,\frac{\partial}{\partial z}) \times v_z\,\vec{e}_z = 0 .$$

<u>Ex. 2.29</u> - Um escoamento plano entre 2 placas planas fixas, paralelas, distantes de 2h, se realiza com um campo de velocidades dado por:

$$v_x = v_o\ (1 - \frac{y^2}{h^2}),\quad v_y = v_z = 0\,,$$

com eixo das ordenadas normal às placas e de origem num ponto distante de h de cada uma das placas. Pedem-se:

a) velocidades de dilatação linear , angular e cúbica ;

b) variação, entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$, da seção de uma partícula inicialmente quadrada, de lado a e centro no ponto $y = 0$;

c) eixos principais de deformação.

Solução:

- Velocidades de dilatação linear:

$$d_{11} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \ , \quad d_{22} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \ , \quad d_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 .$$

- Velocidades de dilatação angular:

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = - \frac{v_o y}{h^2} \ ,$$

$$d_{13} = d_{23} = 0 .$$

- Velocidade de dilatação cúbica:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\Delta}{dt} = \sum_{i=1}^{3} d_{ii} = 0 .$$

- Variação da partícula entre $t = 0$ e $t = 1$.

. Deslocamento do centro C:

$$C'C = v_x \, dt = v_o \left[1 - \frac{y^2}{h^2}\right] dt = v_o \, dt \ (\text{pois } y_c = 0),$$

$$C'C = v_o \ \text{para} \ dt = \Delta t = 1 - 0 = 1 .$$

. Deformação do ângulo reto $B\hat{C}A$:

$$d\theta_{1,2} = - 2d_{12} \, dt,$$

$$d\theta_{1,2} = \frac{2v_o y}{h^2} dt \cong \frac{2v_o y}{h^2} = 0 \ (\text{para } y_C = 0).$$

. Rotação em bloco da partícula

É a rotação da diagonal CD, que passa para a posição C'D':

$$d\alpha = \Omega dt .$$

Valor de Ω

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{e}_y & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} v_x \vec{e}_z \doteq \frac{v_o y}{h^2} \vec{e}_z = 0$$

(pois $y_C = 0$)

Daí $d\alpha = 0$.

. Função deformação:

$$\phi = 2d_{12}da_1 da_2 = -\frac{2v_o y}{h^2} x'y' = 0 \quad (\bar{y}_C = 0).$$

Portanto a partícula de centro $y_C = 0$ sofre apenas translação e no instante $t = 1$ terá se deslocado de $\overline{CC'} = v_o$.

Para $y_C = 0$, quaiquer eixos são eixos principais.

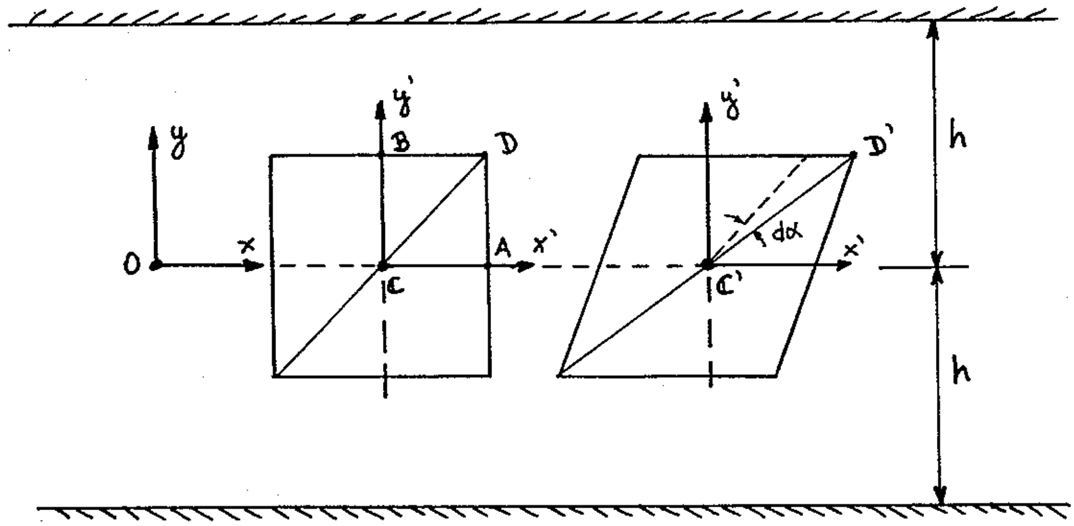


Figura Ex. 2.29

Ex. 2.30: Verificar a equação da continuidade para fluidos incompressíveis animados dos seguintes campos de velocidades e interpertar os resultados obtidos

a) $v_x = k(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$; $v_y = 2kxy/(x^2 + y^2)^2$; $v_z = 0$;

b) $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = A/r \quad (r > 0)$;

c) $v_x = Ay^2 + by + C$, $v_y = v_z = 0$;

d) $v_x = kx/f(x,y,z)$, $v_y = ky/f(x,y,z)$, $v_z = kz/f(x,y,z)$,

onde $$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2};$$

e) $v_r = k(\frac{1}{r^2} - 1)\cos\theta$, $v_\theta = k(\frac{1}{r^2} + 1)\operatorname{sen}\theta$, $v_z = 0 \, (r > 0)$.

Solução:

Para que os campos de velocidade dados sejam referentes a fluidos incompressíveis devemos ter, para cada um deles, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Assim:

a) $$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2kx(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{2kx(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0,$$

b) $$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

c) $$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

d) $$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv 3\frac{k}{f} - \frac{3kx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3ky^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3kz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0,$$

e) $$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{k}{r}(\frac{1}{r^2} - 1)\cos\theta - \frac{2k\cos\theta}{r^3} + \frac{k}{r}(\frac{1}{r^2} + 1)\cos\theta = 0.$$

Para os casos a) a e) a equação da continuidade é verificada.

Ex. 2.31- Determinar as possíveis relações entre a(t), b(t) e c(t) para que o escoamento de um fluido incompressível seja fisicamente possível com o campo de velocidade dado por:

$$v_x = ax, \quad v_y = by, \quad v_z = cz.$$

Resp.: $a + b + c = 0$.

Por exemplo $c = 0$ e $a = -b$.

Ex. 2.32- Sendo

$$v_x = 4x - 6y,$$
$$v_y = ky + f(x),$$

determinar k e f(x) para que este campo de velocidade represente um movimento irrotacional de um fluido incompressível. Sabe-se que $f(0) = 0$.

Resp.: $k = -4$, $f(x) = -6x$.

Ex. 2.33- Sendo

$$v_x = x^2 + z^2 + 5,$$
$$v_y = y^2 + z^2,$$

determinar a forma mais simples da componente v_z que satisfaz a equação da continuidade para um fluido incompressível.

Resp.: $v_z = -2z(x + y)$.

Ex. 2.34- Dadas as componentes das velocidades de dois escoamentos de fluidos incompressíveis:

$$A \left| \begin{array}{l} v_x = x^2 - y, \\ \\ v_y = x^3 - 2xy, \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} v_x = y^3 - 3x^2y, \\ \\ v_y = 3xy^2 - x^3, \end{array} \right.$$

pede-se:

a) verificar se os dois escoamentos são possíveis,

b) verificar se os mesmos são rotacionais ou irrotacionais,

c) no movimento rotacional determinar o LG dos pontos tais que:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\vec{e}_z \,.$$

Resp.: a) ambos possíveis, b) A é rotacional, B é irrotacional, c) $3x^2 - 2y = 0$.

Ex. 2.35 - Um fluido escoa em condições tais que sua massa específica ρ é função apenas do tempo. Dado o campo de velocidades:

$$v_x = 4x \quad , \quad v_y = -2y \; ,$$

pede-se:

a) a expressão de $\rho(t)$ para que o escoamento seja possível,

b) a equação das linhas de corrente.

Solução: Calculando o div $\vec{v}$ obtemos:

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

O fluido não pode ser incompressível. Será compressível com

$$\rho = \rho(t),$$

conforme expresso no enunciado do problema.

Para que o movimento do fluido compressível seja possível devemos ter satisfeita a equação da continuidade, a saber:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } v = 0.$$

Daí:

$$\frac{d\rho}{dt} + 2\rho = 0 \,,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -2\,dt.$$

Integrando,

$$\ell n \frac{\rho}{k} = -2t \quad e \quad \rho = ke^{-2t}.$$

Equação da linha de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

De $v_z = 0$ obtem-se $\frac{dz}{dt} = 0$ e $z = c_1$.

De $\frac{dx}{4x} = \frac{dy}{-2y}$ obtém-se $xy^2 = c_2$.

Equação das linhas de corrente: $xy^2 = c_2$,

$z = c_1$.

Ex. 2.36 - Dado o campo de velocidades de um fluido perfeito incompressível, determinar $f(y,t)$ para que o escoamento seja possível.

$$v_x = 2x^3(2 - t) - 6\,x\,\ell n\, f(y,\,t),$$
$$v_y = -6x^2y(2 - t) + 2y^3(2 - t).$$

Solução:

Para ser possível o escoamento o campo de velocidades deve satisfazer à equação da continuidade para fluidos incompressíveis, isto é:

$$\text{div}\,\vec{v} = 0.$$

Daí:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 6x^2(2 - t) - 6\ell n\, f - 6x^2(2 - t) + 6y^2(2 - t) = 0 \quad e$$

$$\ell n\, f(y,\,t) = y^2(2 - t).$$

Daí:

$$f(y,\,t) = e^{y^2 \cdot (2-t)}$$