

Análise Dimensional, Semelhança e Modelos

1 **Análise dimensional (A.D.)**

- Ligada à abordagem experimental
- Planejamento e execução de experimentos; interpretação e correlação dos resultados obtidos
- Relação entre modelo e protótipo
- Aplicação não é restrita à Mecânica dos Fluidos

Relevância da A.D. – exemplo:

Determinação da força de arrasto no escoamento ao redor de uma auto-móvel, a partir do conhecimento das condições do escoamento*.

Parâmetros importantes:

$$F_a = f(D, V, \rho, \mu)$$

F_a : força de arrasto

D : diâmetro

V : velocidade

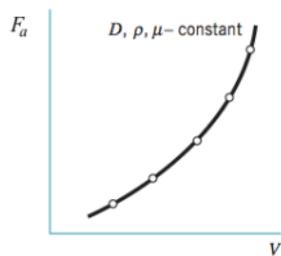
μ : viscosidade dinâmica

ρ : massa específica

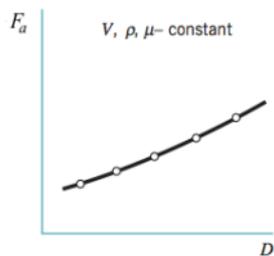
Como determinar f ?

*Falar sobre túnel de vento

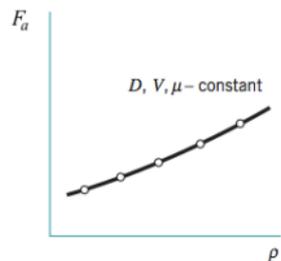
Solução óbvia: investigar como F_a varia com cada parâmetro, mantendo os outros constantes.



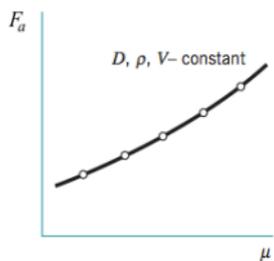
(a)



(b)



(c)



(d)

Considerando 10 valores diferentes para cada parâmetro, teríamos 10^4 experimentos[†].

- + Custo do equipamento;
- + Como combinar os resultados?

[†]Estimando 5min/experimento, total de 35 dias ininterruptos.

A A.D. mostra que podemos agrupar as variáveis em duas combinações (ou grupos) adimensionais:

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

A base para a simplificação são as dimensões envolvidas (MLt ou FLt).

1.1 Teorema Π de Buckingham

“Dada uma relação entre n parâmetros da forma $g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$, então os n parâmetros podem ser agrupados em $n - m$ razões independentes adimensionais, ou parâmetros Π , que podem ser expressos em forma funcional por

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$$

$$\text{ou } \Pi_1 = G_1(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}).$$

O número m é usualmente, mas nem sempre, igual ao número mínimo r de dimensões independentes necessárias para especificar as dimensões de todos os parâmetros q_1, q_2, \dots, q_n .”

O teorema[‡] não prevê a forma de G ou G_1 , que deve ser determinada experimentalmente.

Determinação dos grupos Π

1. Liste os parâmetros envolvidos. $\{n\}$
2. Selecione um conjunto de dimensões fundamentais (primárias) – MLt ou FLt $\{r\}$.

[‡]Este teorema é baseado no conceito de homogeneidade dimensional.

3. Liste as dimensões dos parâmetros em termos das dimensões primárias (matriz dimensional).
4. Selecione da lista um número m de parâmetros, chamados de *repetentes*, que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias. Não selecione o parâmetro dependente. (m é igual ao posto da matriz dimensional)
5. Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros repetentes com cada um dos remanescentes $\{n - meqs.\}$.
6. Verifique se cada grupo obtido é adimensional.

Aplicando o método para o nosso problema:

$$\boxed{1} \quad F_a, D, V, \rho, \mu \quad \{n = 5\}$$

$$\boxed{2} \quad \text{Usaremos MLt } \{r = 3\}$$

$$\boxed{3} \quad F_a \doteq \frac{ML}{t^2}; \quad D \doteq L; \quad V \doteq \frac{L}{t}; \quad \mu \doteq \frac{M}{Lt}; \quad \rho \doteq \frac{M}{L^3}$$

Matriz dimensional:

	F_a	D	V	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	0	-1	0	-1

($m = \text{posto} = 3$)

$\boxed{4}$ Usaremos D, V e ρ

$\boxed{5}$ $\{n - m = 2 \text{ eqs.}\}$

$$\Pi_1 = F_a D^a V^b \rho^c = (MLt^{-2})(L)^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^0 L^0 t^0$$

$$[M]: 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

$$[L]: 1 + a + b - 3c = 0$$

$$[t]: -2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $a = -1 + 2 - 3 = -2$

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2}$$

$$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c = (\text{ML}^{-1}\text{t}^{-1})(\text{L})^a (\text{Lt}^{-1})^b (\text{ML}^{-3})^c = \text{M}^0 \text{L}^0 \text{t}^0$$

$$[\text{M}]: 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

$$[\text{L}]: -1 + a + b - 3c = 0$$

$$[\text{t}]: -1 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $a = 1 + 1 - 3 = -1$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

6 Usando FLt $(\text{M} = \text{FL}^{-1}\text{t}^2)$

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \frac{F}{(FL^{-4}t^2)(Lt^{-1})^2(L)^2} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{FL^{-2}t}{(FL^{-4}t^2)(Lt^{-1})(L)} = F^0 L^0 t^0 \quad \checkmark$$

$$\therefore \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi_1 \left(\frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

Qualquer potência ou produto de adimensionais[§] também é adimensional.

$$\Pi'_2 = \Pi_2^{-1} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right) \quad (\phi \text{ é determinado experimentalmente})$$

[§]incluindo constantes numéricas

Exercício 1

A força axial exercida por um hélice, F , para deslocar um barco é função da massa específica do fluido, ρ , da velocidade do barco, V , do diâmetro do hélice, D , da rotação do hélice, n e da aceleração da gravidade, g . Encontre uma relação adimensional entre a força e os parâmetros das quais ela depende.

1.2 Grupos adimensionais importantes na MecFlu

Razão de forças, recebem nomes de cientistas.

Número de Reynolds	$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\text{F. inércia}}{\text{F. viscosas}}$
Número de Euler	$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\text{F. pressão}}{\text{F. inércia}}$
Número de Froude	$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{F. inércia}}{\text{F. gravidade}}$
Número de Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = \frac{\text{F. inércia}}{\text{F. tensão superficial}}$
Número de Mach	$Ma = \frac{V}{c} = \frac{\text{F. inércia}}{\text{F. compressibilidade}}$
Número de Strouhal	$St = \frac{\omega L}{V} = \frac{\text{F. acel. local}}{\text{F. acel. convectiva}}$

*Comentar sobre exemplo dos dinossauros.